

Stepwise Chow Test 再論*

二 宮 正 司

はじめに

1. 構造変化と Chow Test

1-1. 計量モデルと構造変化

1-2. Chow Test の概要

2. 先行研究と Stepwise Chow Test

2-1. 先行研究

2-2. Stepwise Chow Test の方法

2-3. Stepwise Chow Test 研究の経緯

3. Riddell 論文への回答

3-1. Riddell の問題提起

3-2. モンテカルロ実験の手順

3-3. モンテカルロ実験の結果

(1) first step の結果 (2) second step の結果 (3) sub-step の重要性和その結果
むすび

は じ め に

Stepwise Chow Test が世に出たのは、1975年の学会発表をもとにした二宮（1977a）が学会機関誌に掲載されてからであるが、正に、隔世の感がある。その後、Stepwise Chow Test を経済・経営の構造変化を実証分析する方法として適用した研究としては、経済企画庁（1988）、本田（1990）、Takeuchi（1991）、Nomura（1991）¹⁾、Kato（2007）、Kato（2008）などがある。この方法を紹介した文献としては、刈屋・日本銀行（1985）、廣松・藤原（1990）、千田（1989）がある。

他方、Stepwise Chow Test の発展として、多和田（1983）は、Stepwise を含んだ Chow Test の一般化を試みている。また、二宮（1977a）の公表直後に、Riddell（1978）は、ア・プリオリな情報を一切用いない幾つかの方法の中で Stepwise Chow Test の優位性を認定しながらも、その利用に際して留意すべき点を指摘している。

本稿の目的は、Stepwise Chow Test 研究を再度レビューし、理由があって今日まで応えて来っていない Riddell の問題提起に答えることである。

* 本論を今年3月4日に83歳の天寿を全うされた恩師杉浦一平先生に捧げる。また、本稿のモンテカルロ実験の計算作業にあたり、4年ゼミ生の戸張泰幸さんの協力を得た。

1) この論文が出る前の1989年6月に、理論・計量経済学会（現日本経済学会）西部部会（於同志社大学）で発表された。その際に、筆者はコメンテーターを務めた。

1. 構造変化と Chow Test

1-1. 計量モデルと構造変化

計量モデルの構造変化とは、推定期間内に於いてモデル方程式の係数の相等性が棄却される時、係数の変化を持ってこう呼んでいる²⁾。構造変化テストは、説明変数の説明力を見るために行う各係数の t 検定などと並んで、モデルの安定性や予測力を調べるために試みる検定の一つである。ところで、構造変化の存在は、そのモデルが経済・経営理論を背景として成り立っているならば経済・経営構造の変化を意味し、統計的には、モデルの性能が劣化していることを意味している。

計量モデルの構造変化の検定方法は、Fisher (1941) の開発した分散分析の手法³⁾を多変量回帰分析へ拡張したものであり、一般に、Chow (1960) が提示した方法に依拠して行われている。そこでは、「ア・プリオリに与えられた特定の時点」に関してこのテストを適用し、構造変化が統計的に認定されると、このア・プリオリな時点を所与の異質なデータを2つの同質なデータ・グループに分割する分割点とする。この分割点を、経済・経営分野における「構造変化の転換点」と見なすことができる。

1-2. Chow Test の概要

計量回帰方程式は、一般に、次のように表記される。

$$Y = XB + U \quad (1.1)$$

ただし Y は被説明変数ベクトル、 X は説明変数マトリクス、 B は回帰係数ベクトルである。ここで、誤差項ベクトル U は X と独立で、 $N(0, \sigma^2 I)$ に従う確率変数である。

全標本期間の数を N 、変数の数を p とすると、(1.1)式は次のように表記できる⁴⁾。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (1.1')$$

いま、全標本期間 N を第Ⅰ期と第Ⅱ期に2分割し、それぞれの期間数を n_1, n_2 とすると、 $N = n_1 + n_2$ である。このとき、各期の構造方程式は、

$$\text{Ⅰ期} \quad Y_1 = X_1 B_1 + U_1 \quad (1.2)$$

$$\text{Ⅱ期} \quad Y_2 = X_2 B_2 + U_2 \quad (1.3)$$

と表記される。そして、(1.2)と(1.3)は、それぞれ(1.2')と(1.3')に同値である。

2) 回帰モデルの構造および構造変化に関する説明は、Christ (1965) の1, 2, 4, 7の各章に詳しい。

3) Fisher (1941) を参照。

4) 一般に、 $x_{i1} = 1$ ($i = 1, \dots, N$) である。従って β_1 は Y 軸切片を意味する。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n_1 1} & x_{n_1 2} & \cdots & x_{n_1 p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ \vdots \\ u_{1n_1} \end{bmatrix} \quad (1.2')$$

$$\begin{bmatrix} y_{n_1+1} \\ y_{n_1+2} \\ y_{n_1+3} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n_1+1, 1} & x_{n_1+1, 2} & \cdots & x_{n_1+1, p} \\ x_{n_1+2, 1} & x_{n_1+2, 2} & \cdots & x_{n_1+2, p} \\ x_{n_1+3, 1} & x_{n_1+3, 2} & \cdots & x_{n_1+3, p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{N, 1} & x_{N, 2} & \cdots & x_{N, p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{2p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ \vdots \\ u_{2n_2} \end{bmatrix} \quad (1.3')$$

ここで、(1.1)式、(1.2)式、(1.3)式の最小 2 乗推定量および残差を $\hat{B}$, $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$, $\hat{U}$, $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ とすると、各期間の残差は以下のように表記できる。

$$\hat{U} = Y - X\hat{B} \quad (1.4)$$

$$\hat{U}_1 = Y_1 - X_1\hat{B}_1 \quad (1.5)$$

$$\hat{U}_2 = Y_2 - X_2\hat{B}_2 \quad (1.6)$$

Chow の検定統計量は、 $n_1 > p$, $n_2 > p$ の場合、2つの異質なデータグループである第 1 期と第 II 期との間で帰無仮設 (1.7) 式が成り立つとき、(1.8) 式によって与えられる。

$$H_0: B_1 = B_2 = B, \text{ すなわち } \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} F(\varphi_A, \varphi_W) &= \frac{[\hat{U}'\hat{U} - (\hat{U}_1'\hat{U}_1 + \hat{U}_2'\hat{U}_2)]/\varphi_A}{(\hat{U}_1'\hat{U}_1 + \hat{U}_2'\hat{U}_2)/\varphi_W} \\ &= \frac{\left[\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n_1} \hat{u}_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} \hat{u}_{2i}^2 \right) \right] / \varphi_A}{\left(\sum_{i=1}^{n_1} \hat{u}_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} \hat{u}_{2i}^2 \right) / \varphi_W} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ただし、 $\varphi_A = p$, $\varphi_W = (n_1 - p) + (n_2 - p) = N - 2p$ は、それぞれ自由度である。この F は、第 I 期の誤差 U_1 と第 II 期の誤差 U_2 の分散を σ_1^2 および σ_2^2 とすると、 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の場合に自由度 (φ_A , φ_W) の F 分布することが知られている⁵⁾。

いま、 $\alpha\%$ 有意水準を採用するとき、 $F > F_\alpha(\varphi_A, \varphi_W)$ ならば、仮説は棄却され、構造変化を否定できない。他方、 $F < F_\alpha(\varphi_A, \varphi_W)$ ならば、仮説は採択され、構造変化は認められない⁶⁾。

他方、 $n_1 > p$, $n_2 \leq p$ の場合の検定統計量は、(1.9) 式で与えられる。

5) Chow (1960) p. 597, Fisher (1970) p. 362 を参照。

6) Chow (1960), Fisher (1970) は、一部の係数の同等性に関する検定統計量についても定式化している。また、Williams (1959) pp. 131-132 では、 Y 軸切片の検定 (位置の検定)、切片以外の係数の検定 (平行性の検定) も提示されている。

$$F(\varphi_A, \varphi_W) = \frac{(\hat{U}'\hat{U} - \hat{U}_1'\hat{U}_1)/\varphi_A}{\hat{U}_1'\hat{U}_1/\varphi_W} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 - \sum_{i=1}^{n_1} \hat{u}_{1i}^2\right)/\varphi_A}{\left(\sum_{i=1}^{n_1} \hat{u}_{1i}^2\right)/\varphi_W} \quad (1.9)$$

ただし自由度は、 $\varphi_A = n_2$, $\varphi_W = n_1 - p$ である。

さらに、 $n_1 \leq p$, $n_2 > p$ の場合の検定統計量は、(1.9)式とその自由度の添字 1, 2 を入れ替えて考えればよい。

2. 先行研究と Stepwise Chow Test

2-1. 先行研究

一般に、ア・プリオリな情報とは、データを異なるグループに分割する境界点（構造変化の転換点）と異なるグループの数（その転換点の数）とである。しかし、Chow Test は異なるグループの数を 2 つ（転換点の数は 1 つ）と前提して、特定の転換点に関して構造変化テストを適用する方法である。そうすると、ア・プリオリ情報が全く無い場合、Chow Test は使えないことになる。ここで、ア・プリオリな情報が無い場合は、いかなる方法で構造変化を調べるべきかという問題が生じる。

あるいは、ア・プリオリ情報があつたとしても、それとは独立に、所与のデータのみから一定の手続で構造変化に関する統計的情報を得ることができるならば、それは経済・経営分析にとって極めて有効な実証情報になる。

転換点の数が既知の場合に、転換点の時点を検定する方法に関しては、いくつかの研究がある。例えば、Quandt (1958), Quandt (1960), Robinson (1964) は、転換点が 1 つ、すなわち全データが 2 つの異質なグループから成っている場合について、最尤法を用いて理論的に検討している。彼らの主題は、転換点の時点が未知のとき、所与のデータのみからその時点を統計的に探し出すことである。

しかし、Quandt によれば、転換点の時点の推定には、少なくとも転換点の数が正確に分かっていなければならないと結論づけている⁷⁾。しかし、転換点の数はア・プリオリな情報であるし、一般に、転換点の数は 1 つ以上で、その数は未知であると考えられる。したがって、理論的には、ア・プリオリな情報を一切用いずに、構造変化の数とその転換点の時点を検出することは不可能だと言える。

この様な点を踏まえて、どちらかと言えばプラグマチックなものであるが、ア・プリオリな情報を一切用いずに、転換点の数が複数で未知、かつその時点も未知の場合に、転換点の数とその時点を推定する方法が研究されている。それらは、Brown and Popkin (1962), Brown (1966), McGee and Carleton (1970), 二宮 (1977a), 二宮 (1977b) である。特に、McGee and Carleton および二宮 (1977a) は、方法の理論的不充分さをモンテ・カルロ実験によって補充している。これら論文の検定量は、いずれも Chow の F 統計量を用

7) Quandt (1958) p 880. その他の研究は、例えば Goldfeld and Quandt (1976) を参照。

いているが、検定の手法と手続面で Chow Test の拡張が行われている。

なかでも McGee 達は、Quandt (1960) の実験モデルを適用して所望の結果を得ている。さらにモンテカルロ実験によって、彼らの方法である Piecewise Regression の検出力を検証し、ほぼ望ましい結果が得られたとしている⁸⁾。他方、二宮 (1977a)・(1977b) では、McGee and Carleton の方法が紹介されるとともに、二宮の方法である Stepwise Chow Test を、先ず Quandt のデータ (転換点の数が1つ) と McGee 達のデータ (転換点の数が3つ) に適用し、次に McGee 達の実験モデル (転換点の数が2つ) を採用したモンテカルロ実験を試みている。その結果、Stepwise Chow Test の検出力が Piecewise Regression と較べて決して劣らず、しかも計算時間が約半分で済むことを検証している。

Stepwise Chow Test は、ア・プリオリな情報を前提としない種々方法と較べて、構造変化の検出力において決して劣っていないし、何よりも、極めてシンプルであるところに優位性を持っていると言える。しかし、ア・プリオリな情報を用いる伝統的な方法と、そのような情報を一切用いないプラグマチックな方法は、排他的でなく、相互に補完的なものであると考える。

2-2. Stepwise Chow Test の方法

Stepwise Chow Test は、ア・プリオリな情報を一切用いずに、構造変化の「転換点の時点」と「転換点の数」を同時に推定する方法である。その手続きは以下の通りである。

所与の全標本期間 ($N=n_1+n_2$) において、何れの時期に構造変化が起こったかは未知であるから、どの時期もその可能性を同程度に持っていると考ええる。そこで、もし構造変化が起こっているならばと仮定して、全期間を2分割するのに可能な $N-1$ 個の分割期 (時点) について、それぞれ連続的に仮設検定を実行する。

- (1) 先ず第Ⅰ期を $n_1=1$ 、第Ⅱ期を $n_2=N-1$ の分割で Chow の F 値を求め、次に、第Ⅰ期を $n_1=2$ 、第Ⅱ期を $n_2=N-2$ 、さらに、第Ⅰ期を $n_1=3$ 、第Ⅱ期を $n_2=N-3$ と分割して F 値を計算する。これを順次、第Ⅰ期を $n_1=N-1$ 、第Ⅱ期を $n_2=1$ まで連続的に繰り返して F 値を計算する。分割時点を1期ずつずらせながら計算していくと、全部で $N-1$ 個の F 値が得られることになる。
- (2) もし $N-1$ 個の F 値の中で有意水準を超えているものが何も無い (有意でない) 場合は、期間中に構造変化が起こらなかったと判断し、同質なデータグループとする。しかし、有意水準を超えた (有意である) F 値が1つの場合は、その分割点を構造変化の転換点の時点と判断し、2つの異質なデータグループとして(3)の手順へ進む。また度々起こることなのだが、幾つかの F 値が連続して有意になる場合は、これを構造変化の「移行期」⁹⁾ と呼ぶが、その中で F 値が最大である分割点を転換点とし、(3)

8) McGee and Carleton (1970) pp. 1115-1116 および p. 1122 Table 8.

9) この呼称は、Brown (1966) Ch. 5 の transition period に依拠している。「移行期」は、二宮 (1977a) p. 59 脚注 9)、二宮 (1977b) pp. 183-185 で述べているように重要かつ有用な概念である。また、「移行期」を考慮できるのは、Stepwise Chow Test のみである。

の手順へ進む。有意な最大 F 値を選択する理由は、 F 値が大きいほど、仮説を棄却する根拠がより強いからである。Stepwise Chow Test では、以上の手順を「first step」と呼んでいる。

- (3) first step で転換点と推定された時点を異質なデータの分割点と見なして、その時点でデータを2分割して切り離す。そして、分割されたそれぞれのデータについて、上記の(1)と(2)を繰り返す。この手順を「second step」と呼ぶ。
- (4) second step で転換点が見つければ、さらにそれを異質なデータの分割点として切り離し、(1)と(2)を繰り返す。この手順を「third step」と呼ぶ。
- (5) この手順は有意な F 値が算出されなくなるまで繰り返されるが、繰り返しごとに「fourth step」, 「fifth step」と呼称する。
- (6) (5)の手順が終了した段階で構造変化の転換点の推定時点が確定するが、推定時点を組み合わせて出来る全てのデータグループを取り上げて、手順(1)と(2)を繰り返す¹⁰⁾。

Stepwise Chow Test では、(1)から(5)までの手順を「main step」、手順(6)を「sub-step」と呼称する¹¹⁾。経験的に「main step」での推定は、ほとんどがそのまま有効である。「sub-step」は「main step」結果を補強することになるし、時々「main step」結果を修正する役割を果たすことがある。

以上の手順を踏むことによって、構造変化の「転換点の時点」が推定でき、同時に「転換点の数」が推定できることになる¹²⁾。

2-3. Stepwise Chow Test 研究の経緯

Stepwise Chow Test の萌芽は大学院の研究テーマにあり、その成果を二宮（1972）としてまとめた。そこでは、Fisher（1941）の開発した分散分析の手法とその多変量回帰分析への拡張、および Chow（1960）の構造変化テストとの関連について理論的に探究して、「分散分析と構造変化の検定」としてまとめている。その中で、実証分析として、日本の中期マクロモデルの主要関数に Chow Test を適用し、日本経済の構造変化について論じた。その際に、消費関数と投資関数の検定で、Chow Test を連続的に適用した F 値のグラフを描いている。

この方法の発想は、次の点である。すなわち、(1.8)式の F 値の有意点は、その自由度が不変である限り一定であるから、連続して計算される F 値を絶対的に比較できるという点である¹³⁾。それならば、ア・プリオリ情報を一切用いないで、所与のデータの全ての

10) Stepwise の名称は、①標本期間の分割時点を1期ずつずらしながらその都度 Chow Test を繰り返す、②有意な F 値が出なくなるまで手順の step を繰り返す、という方法に由来する。また、この呼称は、和歌山大学・神戸大学で指導を受けた定道宏教授（神戸大学）に命名していただいたものである。

11) sub-step の詳細は、二宮（1977a）p. 54、二宮（1977c）p. 112・121・125・127・131 を参照。

12) 以上の手順の詳細は、二宮（1977a）、二宮（1977b）を参照。

13) 修士論文の研究テーマは、指導を仰いだ杉浦一平教授（和歌山大）から示唆されたものであるが、その指導の中でヒントを得た。

時点において構造変化が起こっているかも知れないと仮定し、全ての時点について Chow Test を行い、その結果から転換点を推定する方法が可能になる。

この成果は、1973年7月の理論・計量経済学会（現：日本経済学会）西部部会（於：名古屋大学）で「戦後日本経済の構造変化」として発表した¹⁴⁾。続いて、修士論文の成果の内、分析方法に焦点を当てて内容をブラッシュアップし、1975年7月の理論・計量経済学会西部部会（於：神戸大学）で「Stepwise Chow Test」として発表した¹⁵⁾。

その後、理論・計量経済学会誌へ投稿が査読論文として採用され、二宮（1977a）となった¹⁶⁾。ここでは、モンテカルロ実験の結果、Stepwise Chow Test が McGee and Carleton の Piecewise Regression より優れた方法であることが実証された。さらに、ここで初めて「移行期」と「sub-step」の概念が登場する。また、ここで採り上げたモデルは2変量モデルであるが、多変量モデルにも適用できることも実証した。さらに、二宮（1977b）では、Brown（1966）の方法のレビューを行うと共に、Chow Test の検定統計量(1.8)式は2つのデータグループの分散が均一であることが前提にされているが、これが成り立たない誤差の不均一分散性に関するレビュー¹⁷⁾も行っている。

Stepwise Chow Test 研究は、それまで主として単一方程式を取り上げて論じられてきたが、連立体系としての計量マクロ経済モデルを採り上げて、連立モデル全体の構造変化を総合的に引き出す方向へ広がって行った。その準備として、二宮（1977c）において、経済審議会計量委員会（1971）の中期マクロモデルの各関数を詳細に検証し、経済の事実との対比を行った。同時に、誤差項の不均一分散性の検証も試みた。その結果、「移行期」と「sub-step」が、構造変化の分析において重要な情報を提供してくれることが判明した。そして、 F 値が山形を描く理由と、「移行期」が構造変化の存在を証明する必要条件であることが述べられた。また、新たに「準移行期」¹⁸⁾の概念とその適用結果が展開された。このような経緯をたどって、二宮（1979）では、各計量マクロ関数に Stepwise Chow Test を適用し、その結果を総合化することによって、日本経済の構造変化を検証した。

3. Riddell 論文への回答

3-1. Riddell の問題提起

Riddell（1978）は、2つのモデルを示しながら、Stepwise Chow Test の問題点として2つのケースを提起している。すなわち、1つ目のモデルでは、構造変化が存在するがそれを検出できないケースであり、2つ目のモデルでは、存在しない構造変化の時点を誤って

14) 発表に際し、木下宗七教授（名古屋大学）から貴重なコメントをいただいた。

15) 発表に際し、畠中道雄教授（大阪大学）から貴重なコメントをいただいた。

16) 神戸大学大学院で研究指導いただいた斎藤光雄教授の指導と励めのお陰である。1973年と1975年の学会発表についても同様の指導を得ている。

17) ここでは、豊田（1973）、Toyoda（1973）、Johnston（1972）の議論を採り上げた。

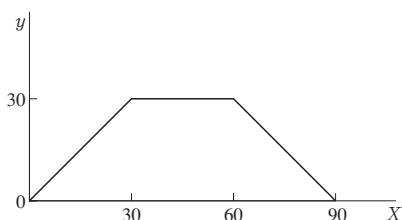
18) 移行期が長期に亘って出現する場合が多いので、有意な F 値のピーク（最大値）とその隣接時点を対象とする概念である。

推定するケースである。そして彼は、2つ目の問題点の方が深刻であるとしている。

当時、この問題提起は、数理的問題としての興味はあるが、経済・経営分析の話題としては余りにもトリッキーであるという感想を持っていたことに加え、筆者の研究テーマの主軸が新しい分野へ移行しつつあったために、この提起に対応してこなかった。しかし、近年、Kato (2007)・(2008) は、マーケティング構造の変化を実証研究するために Stepwise Chow Test を適用しているが、この中で、Riddell (1978) に言及し、彼の問題提起に対する筆者の論及に未だ触れることができていないと述べている。本稿は、このような状況を踏まえて、彼がより深刻であると言う2つ目のモデルを採り上げて回答する。

Riddell のモデルは(3.1)式で、そのグラフは図1の通りである¹⁹⁾。

図1. Riddell モデルのグラフ



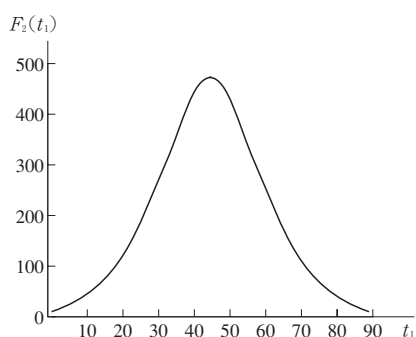
$$\begin{aligned}
 y_t &= \alpha_t + \beta_t X_t + u_t & t &= 1, 2, \dots, 90 & (3.1) \\
 \alpha_t &= 0.0 & \beta_t &= 1.0 & t &= 1, 2, \dots, 30 \\
 \alpha_t &= 30.0 & \beta_t &= 0.0 & t &= 31, 32, \dots, 60 \\
 \alpha_t &= 90.0 & \beta_t &= -1.0 & t &= 61, 62, \dots, 90
 \end{aligned}$$

Riddell は、このモデルに Stepwise Chow Test を適用して、誤差項 u_t が平均 $\mu=0$ 、分散 $\sigma^2=1.0$ に従う場合のモンテカルロ実験を行っている。実験の試行回数と実験結果の詳細は不明であるが、次のような結果が得られたとしている。

モンテカルロ実験の試行毎に85個の F 値時系列 ($t=3, 4, \dots, 88$)²⁰⁾ が得られる。次いで、各時点 t 毎に試行回数分の F 値を平均すると、図2のようになった。図のピークの時点＝転換点は $t=45$ で、そこでの平均 F 値は487.7であった。他方、各試行で算出される有意な F 値の最大値に注目し、最大値が検出された時点 t の数を合計すると、最頻値となる時点＝転換点は $t=47$ である。次に、Stepwise Chow Test の second step に沿って、各試行毎にデータを2分割し、それぞれのデータグループに対してテストを進めると、平均的に $t=30$ と $t=60$ が転換点として検出された。さらに third step を進めたが、もはや有意な F 値は計算されなかった。結局、Stepwise Chow Test は、構造変化の転換点を $t=30, 45$,

19) 図1から推察できるように、 X_t には1から90までの数値が順番に代入される。

20) F 値を比較するためには、その自由度が一定でなければならない。しかし、Ⅰ期とⅡ期のどちらかで、期間の数が方程式の変数の数以下である場合、すなわち(1.9)式の場合は、自由度が変わる。これを避けるために、今の場合は変数の数が2つであるから、各期のデータ数が最低3になるようにしている。従って、期間の数が90の場合、(1.8)式で計算される F 値の個数は85となる。

図2. F 値の時点別平均の分布

60 と推定するが、明らかに $t=45$ は誤った推定となっている。

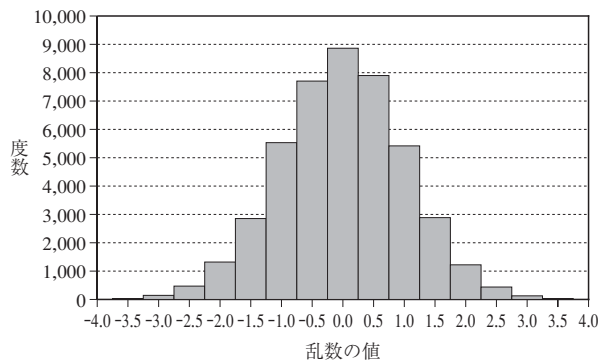
3-2. モンテカルロ実験の手順

実験モデルは、Riddell の(3.1)式を採用し、誤差項 u_i は同じ条件、平均 $\mu=0$ 、分散 $\sigma^2=1.0$ に従うとする。Riddell (1978) では不明であるが、実験の試行回数を500回とする。

まず、誤差項の正規乱数 $N(0, 1)$ を発生させる。1回の試行での期間が90、試行回数が500回であるから、合計45,000個の乱数が必要である。こうして発生させた正規乱数の度

表1. $N(0, 1)$ 乱数の分布

クラス 中央値	度数	相対度数
-4.5	0	0.00%
-4.0	4	0.01%
-3.5	20	0.04%
-3.0	118	0.26%
-2.5	432	0.96%
-2.0	1,294	2.88%
-1.5	2,853	6.34%
-1.0	5,548	12.33%
-0.5	7,743	17.21%
0.0	8,902	19.78%
0.5	7,949	17.66%
1.0	5,451	12.11%
1.5	2,897	6.44%
2.0	1,232	2.74%
2.5	421	0.94%
3.0	108	0.24%
3.5	21	0.05%
4.0	7	0.02%
4.5	0	0.00%
合計	45,000	100.00%

図3. $N(0, 1)$ 乱数の分布 (発生回数45,000)

数分布表とその分布図は、それぞれ表1、図3である。この分布から、乱数の正規性が総合的に十分に保証されていると判断できる。

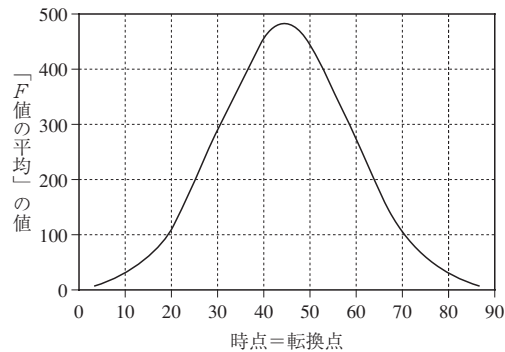
次に、1回目の試行のための実験データとして、(3.1)式の x_t に1から90を順次代入し、その都度、先に発生させた正規乱数を u_t に代入して、90個の y_t を計算する。こうして得られた90個の (x, y) データを用いて1回目の Stepwise Chow Test を試行する。first step では、まず85個の F 値の時系列 ($t=3, 4, \dots, 88$) を求める。その中に有意な F 値があれば、最大 F 値の時点でデータを2分割して、second step へ進む。この手続きは、有意な F 値が検出されなくなるまで step を進められる。モンテカルロ実験では、以上の手順を試行回数に相当する500回繰り返して行くことになる。

3-2. モンテカルロ実験の結果

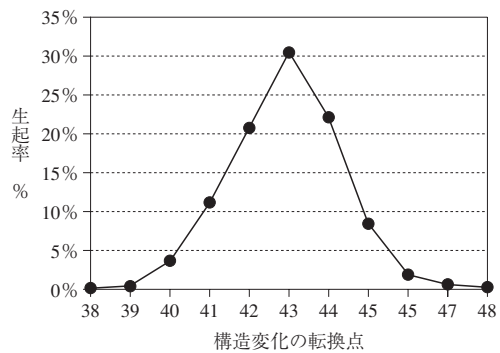
(1) first step の結果

モンテカルロ実験の試行を500回繰り返して行くと、算出される F 値の数は、85 (1回の試行で計算される数) $\times$ 500 (試行回数) = 42,500個になる。Riddell の図2と同様に、42,500個の F 値時系列を用いて、各時点 $t=3, 4, \dots, 88$ 別に F 値の時点別平均を求め、それを図にしたのが図4である。この実験モデルの自由度は $\varphi_A=2$, $\varphi_W=86$ であるから、5%と1%の有意点はそれぞれ3.10と4.86であるが、平均 F 値は全期間を通して有意になっている。また、平均 F 値が最大である時点(転換点)は $t=45$ で、その値は481.0であった。すなわち、Riddell の指摘通り、Stepwise Chow Test は構造変化の転換点として平均的に $t=45$ を推定したことになる。

次に、算出された F 値時系列において、有意になった F 値の最大値の時点を一試行毎に記録して度数表にまとめたのが表2、その分布図が図5である。全ての試行で F 値が有意になっているので、度数の合計は試行回数と同じである。これによると、最大 F 値が生起する時点(=転換点)は $t=43$ で、その生起率は30.6% (試行500回の内153回)であった。これは、Riddell の $t=47$ と対比できる²¹⁾。

図4. F 値の時点別平均の分布 (試行500回の平均)表2. 最大 F 値の時点別合計 1st step

転換点	度数	生起率
38	1	0.2%
39	2	0.4%
40	18	3.6%
41	56	11.2%
42	104	20.8%
43	153	30.6%
44	111	22.2%
45	42	8.4%
46	9	1.8%
47	3	0.6%
48	1	0.2%
合計	500	100.0%

図5. 最大 F 値の時点別合計 1st step

(2) second step の結果

500回の試行において F 値が最大になる時点 (転換点) は異なるので, second step で用いるデータの期間は様々となる。すなわち, 異質なグループとして分割されるデータ数が試行毎に違い, そのことで自由度が異なるから有意点も変わってくる。このような極めて煩雑な計算作業を伴うモンテカルロ実験で得られた結果は, 表3と図6, 表4と図7にまとめられている。前者の図と表は分割した前半期間の検定結果であり, 後者は分割した後半期間の検定結果である。分割した各期間での実験結果によると, 両期間共に, 500回の試行の全てで F 値が有意になったために, 最大 F 値の数も500になっている。前半のデータ期間は, 必ず $t=1$ から始まる。しかし, その終わりの時点は実験ごとに500回ともバラバラであるが, ほぼ $t=45$ 近辺になる。他方, 後半のデータ期間は, 始まりの時点がほぼ $t=45$ 近辺で, 終わりの時点が必ず $t=90$ である。

前半期間では, 有意な最大 F 値の時点別合計が, $t=28$ と $t=31$ において最も大きく,

- 21) この違いは, 関数で発生させる乱数は完全にランダムとは言えず, 一定の癖を持っているためである。モデル方程式の右辺で乱数を加算して y データを作るので, その癖が y に組み込まれるのである。90個の y の範囲で見れば, この癖がかなり明確に出る場合がある。したがって, 有意な最大 F 値の転換点は, 試行毎で $t=45$ 付近になるということであろう。

表3. 最大 F 値の時点別合計
second step: 前半期間

転換点	度数	生起率
24	2	0.4%
25	5	1.0%
26	20	4.0%
27	50	10.0%
28	100	20.0%
29	84	16.8%
30	76	15.2%
31	100	20.0%
32	46	9.2%
33	14	2.8%
34	3	0.6%
合計	500	100.0%

図6. 最大 F 値の時点別合計
second step: 前半期間

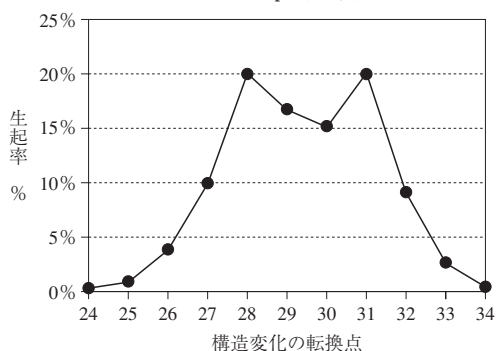
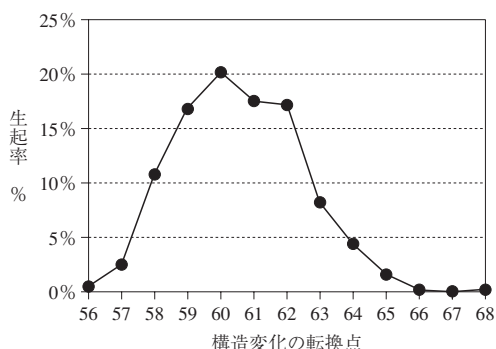


表4. 最大 F 値の時点別合計
second step: 後半期間

転換点	度数	生起率
56	2	0.4%
57	12	2.4%
58	54	10.8%
59	84	16.8%
60	101	20.2%
61	88	17.6%
62	86	17.2%
63	41	8.2%
64	22	4.4%
65	8	1.6%
66	1	0.2%
67	0	0.0%
68	1	0.2%
合計	500	100.0%

図7. 最大 F 値の時点別合計
second step: 後半期間



生起率はそれぞれ20%（500回中100）である。実験モデルの転換点は $t=30$ であるが、これを挟んでほぼ山型になっている様子が読み取れる。一方、後半期間では、有意な最大 F 値の時点別合計が、 $t=60$ において最も大きく、生起率が20.2%（500回中101）である。モデルの転換点は $t=60$ であるが、やはり、これを挟んで山型になっている。以上の結果から、Riddellの場合と同様に、構造変化の転換点を $t=30$ 、 $t=60$ と推定することができる。

(3) sub-stepの重要性とその結果

つづいて、third step以降のmain-stepでは、ほとんどの試行で F 値が有意にならず、構造変化は認められないという結果を得たが、詳細は省略する。いま対応すべき課題は、Stepwise Chow Testの方法では、構造変化の転換点として $t=45$ を誤って推定するというRiddellの指摘である。確かに、Riddellの指摘通り、筆者のモンテカルロ実験でも同じ結果になった。

しかし、Stepwise Chow Testは「main step」と「sub-step」で構成されており、中でも「sub-step」は重要な役割を持っていて、「main step」の推定結果を補強すると共に、場

合によっては「main step」が推定した結果を再検討し修正させる情報を提供してくれる。

「sub-step」の手続きは次の通りである。例えば、或る試行において、first step で転換点が $t=43$ であったとする。second step では、分割された前半のデータ期間は $t=1, 2, \dots, 43$, 後半のそれは $t=44, 45, \dots, 90$ であるが、それぞれの期間で Stepwise Chow Test を適用する。その結果、例えば、転換点が前半期間で $t=29$, 後半期間は $t=57$ であったとする。ここまでの段階で推定された転換点は、 $t=29, t=43, t=57$ となる。そこで、「sub-step」は先ず、推定された転換点を基準にしたデータ期間の組み合わせを考える。それらの全ては、 $t=1, 2, \dots, 29, t=1, 2, \dots, 43, t=1, 2, \dots, 57, t=30, 31, \dots, 43, t=30, 31, \dots, 90, t=44, 45, \dots, 90, t=58, 59, \dots, 90$ である。

Riddell モデルに関するモンテカルロ実験結果の詳細な紹介は別の機会に譲るが、例えば、 $t=1, 2, \dots, 45$ 周辺、 $t=1, 2, \dots, 60$ 周辺の期間では、実験モデルの転換点 $t=30$ の推定を補強し、 $t=30$ 周辺、 $\dots, 89, 90$ と $t=45$ 周辺、 $\dots, 89, 90$ の期間では、モデルの転換点 $t=60$ の推定を補強する結果が得られた。その他の期間については、有意な F 値はほぼ検出されず、構造変化は認められなかった。

Riddell 論文に対する回答として、ここでは $t=30$ 周辺から $t=60$ 周辺に対応する期間を対象にした「sub-step」の結果を提示する。モンテカルロ実験結果では、 $t=30$ の推定時点（転換点）が $t=24 \sim 34$ の範囲にあり、その分布は表 3 と図 6 の通りである。同様に $t=60$ の推定時点の範囲は $t=56 \sim 68$ であり、その分布は表 4 と図 7 の通りである。こうして、試行 500 回分の様々なデータ期間において Stepwise Chow Test を適用した結果は、表 5、図 8、図 9 である。

表 5 では、有意水準が 5 % で有意になった全ての時点を対象にしている。すなわち、有意な最大 F 値の時点のみを対象にしているのではなく、「移行期」を取り上げ、試行 500 回で得られた「移行期」を時点別に合計した数である。ここで、表の「有意」の 2 列は、500 回の試行回数の中で F 値が有意であった回数（度数）を時点別に示しているとともに、その割合（生起率）を示している。非有意の生起率は有意にならなかった回数の割合である。

ここから分かることは、試行 500 回で、 $t=45$ 付近に構造変化が認められる割合は、高くして僅か 16.4 % であるということである。逆の表現をすると、図 8 が直感的に示しているように、構造変化が無いという可能性が 83.6 % 以上あるということを示している。参考として 1 % 有意水準の場合も図 9 に示したが、その場合は、構造変化が認められない可能性が 93.2 % 以上あることを示している。

Riddell は、Stepwise Chow Test の弱点として、実際には構造変化が存在しない時点を存在すると誤って推定する可能性があると指摘した。しかし、モンテカルロ実験結果から判明したことは、「sub-step」を確実に適用することによって、この弱点をかなり高い確率で無くすることが出来ることが立証されたということである。

表5. sub-step ($\alpha=5\%$)
有意・非有意の時点別生起率

転換点	有意		非有意
	度数	生起率	生起率
27	3	0.6%	99.4%
28	5	1.0%	99.0%
29	12	2.4%	97.6%
30	17	3.4%	96.6%
31	23	4.6%	95.4%
32	29	5.8%	94.2%
33	32	6.4%	93.6%
34	45	9.0%	91.0%
35	53	10.6%	89.4%
36	54	10.8%	98.2%
37	57	11.4%	88.6%
38	53	10.6%	89.4%
39	56	11.2%	88.8%
40	58	11.6%	88.4%
41	64	12.8%	87.2%
42	65	13.0%	87.0%
43	72	14.4%	85.6%
44	70	14.0%	86.0%
45	78	15.6%	84.4%
46	81	16.2%	83.8%
47	82	16.4%	83.6%
48	79	15.8%	84.2%
49	76	15.2%	84.8%
50	76	15.2%	84.8%
51	71	14.2%	85.8%
52	68	13.6%	86.4%
53	67	13.4%	86.6%
54	61	12.2%	87.8%
55	45	9.0%	91.0%
56	45	9.0%	91.0%
57	30	6.0%	94.0%
58	21	4.2%	95.8%
59	18	3.6%	96.4%
60	13	2.6%	97.4%
61	9	1.8%	98.2%
62	2	0.4%	99.6%
63	1	0.2%	99.8%
64	1	0.2%	99.8%

図8. sub-step ($\alpha=5\%$)
非有意の時点別生起率

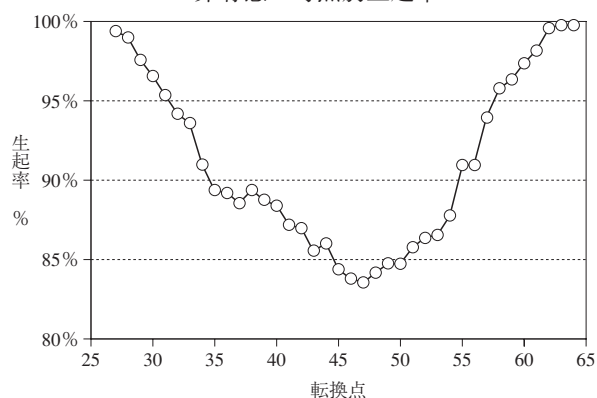
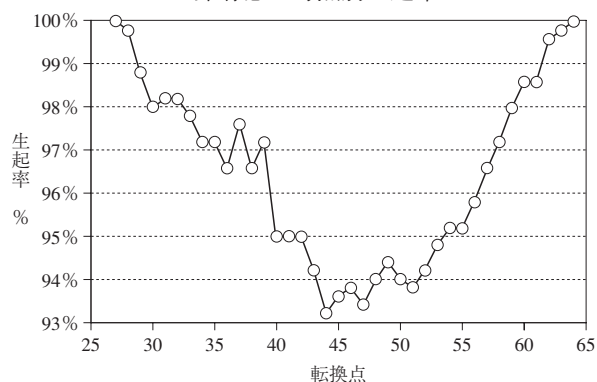


図9. sub-step ($\alpha=1\%$)
非有意の時点別生起率



む す び

Riddell が指摘した2つ目のケースに関連する筆者の方法の弱点は、Stepwise Chow Test を完全に適用すれば、ほとんど解消されることが判明した。

加えるに、本稿ではモンテカルロ実験結果の詳細を大幅に省略したが、この中に筆者の方法の優位性を語ってくれる事例も幾つか出ている。この詳細は別の機会に譲ることにする。

Riddell の1つ目のケースに対する回答を、本稿では行わなかった。このモデルは2つ目のケースより更にトリッキーだと感じるものである。直感的に考えて、全データを大きく2分割して適用する筆者の方法は、いわば「マクロ的接近からミクロ的接近へ」とも言える手順を取って進められるので、このようなモデルには不向きであると思われる。一般的に言っても、分析方法は必ず強みと弱みを持っており、どんなケースに対しても有効な

方法は存在しない。1つ目のモデルは株価変動に類似する動きなので、ミクロ的接近からマクロ的接近へ進む手順を採用しなければならないと思われる。次の機会では、このようなモデルに答えられるように、Stepwise Chow Test の Stepwise 概念を生かしたバリエーションを提案し、モンテカルロ実験でその有効性を立証してみたい。

参 考 文 献

- Brown, M. and J. Popkin (1962), "A Measure of Technological Change and Returns to Scale," *Review of Economics and Statistics* 44, pp. 402-411.
- Brown, M. (1966), *On the Theory and Measurement of Technology Change*, Chambridge.
- Chow, G. C. (1960), "Tests of Equality between Sets of Coefficients in Tow Linear Regressions," *Econometrica*, Vol. 28, No. 3, pp. 591-605.
- Christ, C. F. (1965), *Econometric Models and Methods*, John Wiley.
- Fisher, R. A. (1941), *Statistical Method for Research Workers*, Oliver and Boyd.
- Fisher, F. M. (1970), "Tests of Equality between Sets of Coefficients in Tow Linear Regressions: An Expository Note," *Econometrica*, Vol. 38, No. 2, pp. 361-366.
- Goldfeld, S. M. and R. E. Quandt (1976), "Technique of Estimating Switching Regressions," Ch. 1 in *Studies in Non-Linear Estimation*, Cambridge: Ballinger.
- 廣松毅・藤原直哉 (1990) 『計量経済学の実際』 新生社, 1990。
- 本田豊 (1990) 「CHOW テストによる日本経済の構造変化」『立命館経済学』 第39号第3巻 (8月), pp. 49-73。
- Johnston, J. (1972), *Econometric Methods*, 2nd ed., McGraw-Hill.
- Kato, Junichi (2007), "Marketing Structure Change Analysis: The Analysis of the Changing Point of Product Life Cycle by Using Stepwise Chow Test", *Working Paper*, No. 1, Tukuba International University.
- Kato, Junichi (2008), "On Transcendental Hypothesis in Marketing", *Working Paper*, No. 2, Tukuba International University.
- 刈屋武昭監修・日本銀行調査統計局編 (1985) 『計量経済分析の基礎と応用』 東洋経済新報社。
- 経済企画庁 (1988) 『経済分析——計量経済分析再考』 第112号。
- 経済審議会計量委員会 (1971) 『計量委員会第3次報告』。
- McGee, V. E., and W. T., Carleton, (1970) "Piecewise Regression," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 65, pp. 1109-1124.
- Nomura, Masuo (1991), "The Displacement Effect on Government Expenditure of Two Oil Crises: Japan, the United Kingdom and the United States.", *The Manchester School of Economic And Social Studies*, Vol. LIX No 4, pp. 408-418.
- 二宮正司 (1977a) 「Stepwise Chow Test」『季刊理論経済学』 28巻1号 (4月), pp. 50-60。
- 二宮正司 (1977b) 「構造変化とその転換点の検出方法」『名古屋学院大学論集』 13巻2・3・4合併号 (8月), pp. 165-190。
- 二宮正司 (1977c) 「Stepwise Chow Test と計量マクロ関数への適用」『名古屋学院大学論集』 14巻1号, 8月, pp. 97-138。
- 二宮正司 (1979) 「Stepwise Chow Test のマクロ経済モデルへの適用——戦後日本経済の構造

- 変化——」,『名古屋学院大学論集』15巻4号(3月), pp. 111-131。
- 二宮正司(1972)「分散分析と構造変化の検定——付:計量マクロモデルによる検定結果」,修士論文(和歌山大学)。
- Quandt, R. E. (1958), "The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, pp. 873-880.
- Quandt, R. E. (1960), "Test of the Hypothesis that a Linear Regression System Obeys Two Separate Regimes," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 55, pp. 324-330.
- Riddell, Wm. C. (1978), "The Use of the Stepwise Chow Test", *The Economic Studies Quarterly*, Vol. 29, No. 3, pp. 242-247.
- Robinson, D. E. (1964), "Estimation for the Points of Intersection of Two Polynomial Regression," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 59, pp. 214-224.
- 千田亮吉(1989)『数量経済分析』文真堂, pp. 141-142。
- 多和田真(1983)「構造変化に関する Chow 検定の一般化」『商大論集』第35巻第3号(12月), pp. 64-83。
- Takeuchi, Y. (1991), "Trend and Structural Changes in Macroeconomic Time Series," *Journal of the Japan Statistical Society* (日本統計学会誌), Vol. 21, No. 1, pp. 13-25.
- 豊田利久(1973)「係数同等性の検定と分散不均一性」,『神戸大学経済学研究年報』20。
- Toyoda, T. (1973), "Use of the Chow Test under Heteroscedasticity," *Econometrica*, Vol. 42, pp. 601-608.
- Williams, E. J. (1959), *Regression Analysis*, John Wiley.