

バーンサイドの補題とその応用

西 山 豊

Abstract

This paper is written about Burnside's lemma which is used in case of solving a mathematical puzzle. I will show you some coloring problem. How many different cases do you count when you paint a cube by three colors? I will attempt to solve this puzzle by using Burnside's lemma. This lemma is very powerful but not known usually. I mention that it is most important to solve mathematical problem by using pencil and paper rather than using PC easily.

Keywords: Burnside's lemma, Group theory, Coloring problem

1. サイコロを3色で塗り分ける

ある雑誌に次のような問題を出題したところ、読者からバーンサイドの補題を使った素晴らしい解答が寄せられた[1]。私はバーンサイドの補題を知らなかった。これは、群論の知識が必要で記号に慣れる必要があるが、それほど難しくなく高校生でも理解できるのではないだろうか。出題はつぎの通りであった。図1のように対角線を境に色分けしている正方形がある。この正方形4枚を使って 2×2 のマスを埋めるとき、異なったパターンは全部で何通りできるか。ただし、色の対称、回転対称、反転対称などは同じとみなす。解答はこの稿の最後に示すものとする。

さて、今回はバーンサイドの補題の紹介が目的であるので、よく使われる例題の説明から入ろう。図2のようにサイコロがある。このサイコロの6面を3色で塗り分けた場合、何通りの異なるパターンができるだろうか。

2. 場合分けによる解法

はじめに場合分けによる一般的な解法を説明しよう。サイコロは正6面体であるから、

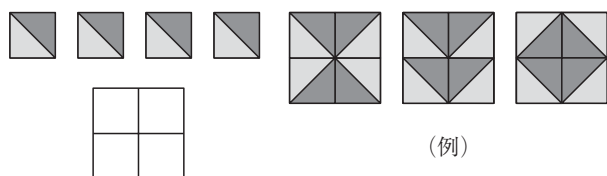


図1 全部で何通り？

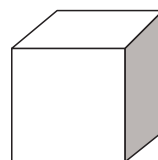


図2 サイコロを3色で塗り分ける。

面の数が6個ある。そこに3色（たとえば青色，黄色，赤色）を塗るとしよう。ひとつの面には3色の塗りわけが可能である。そして6面がそれぞれ独立しているので全部で

$$3^6=729 \text{ 通り}$$

の塗り方があることになる。

これらをすべてチェックするのは困難な作業である。そこで，つぎのように整理して考えてみよう。塗りわけに何色用いるかで分類すると1色，2色，3色の3通りとなる。これを大分類としよう。1色の場合は単純で青色が6面，黄色が6面，赤色が6面の3パターンとなる。つぎに2色の場合は，色の比率が5面と1面，4面と2面，3面と3面の3通りとなる。これを中分類としよう。そして，2色は3色の中からどの2色を選ぶかの組合せが関係する。3色の場合は，色の比率が4面と1面と1面，3面と2面と1面，2面と2面と2面の3通りとなる。このようにして数え上げていくと異なったパターンは57通りとなる。

この数え上げ作業はノートと鉛筆ではおそらく不可能であろう。私は，実際にパソコンで展開図を描き，それに色を配置して何度も確認した。頭の中で考えていた異なったパターンを実際に作ってみると同じものであることが何度もあった。最終的にはDIY店で工作材の木製のブロック（1辺が2センチ）を買い，それに色紙を貼って57パターンを確認した。表1に57パターンのすべてを示しておく。青色をB，黄色をY，赤色をRとし，先頭行の1から6の数字は展開図に示した面の番号である（図3）。

3. バーンサイドの補題による解法

このように積み上げ方式で数えるにはいくら慎重に数えても，数え間違いや取りこぼしがあるものである。このようなとき，バーンサイドの補題という群論の知識を応用した有力な方法がある。以下，それを説明しよう。

フリーの百科事典ウィキペディアには，バーンサイドの補題についてつぎのように記述されている[2]。バーンサイドの補題はバーンサイドの数え上げ定理，ポリヤの公式，コーシー＝フロベニウスの補題または軌道計算定理と呼ばれている。これらは同じものをさしている。バーンサイドはこの補題を1900年に書いている。数学史家の中には，コーシーが1845年にフロベニウスが1887年にこの公式のことを書いているのでバーンサイドが第一発見者でなく，「バーンサイドの補題でない」と呼ぶのが正式な呼び方であるとする人もいる。

集合 X に作用する置換群 G があるとき，群 G の要素 g によって不変なものの個数を X^g とするとき，軌道 (orbit) の数 $|X/G|$ はつぎの公式で表される。

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

軌道の数と同値なものの数を意味する。

サイコロの6面を3色で塗り分ける場合， $3^6=729$ 通りの塗り方があることは前に示した。この集合を X とする。集合 X に対して4種類の回転群 G が考えられる。

No.	1	2	3	4	5	6	B	Y	R		
1	B	B	B	B	B	B	6				
2	Y	Y	Y	Y	Y	Y		6		6	1 色
3	R	R	R	R	R	R			6		
4	B	Y	B	B	B	B	5	1			
5	B	R	B	B	B	B	5		1		
6	Y	B	Y	Y	Y	Y	1	5		5+1	
7	Y	R	Y	Y	Y	Y		5	1		
8	R	B	R	R	R	R	1		5		
9	R	Y	R	R	R	R		1	5		
10	B	Y	Y	B	B	B	4	2			
11	B	R	R	B	B	B	4		2		
12	Y	B	B	Y	Y	Y	2	4			
13	Y	R	R	Y	Y	Y		4	2		
14	R	B	B	R	R	R	2		4		
15	R	Y	Y	R	R	R		2	4	4+2	2 色
16	B	Y	B	Y	B	B	4	2			
17	B	R	B	R	B	B	4		2		
18	Y	B	Y	B	Y	Y	2	4			
19	Y	R	Y	R	Y	Y		4	2		
20	R	B	R	B	R	R	2		4		
21	R	Y	R	Y	R	R		2	4		
22	B	Y	Y	B	B	Y	3	3			
23	Y	R	R	Y	Y	R		3	3		
24	R	B	B	R	R	B	3		3	3+3	
25	B	Y	Y	Y	B	B	3	3			
26	Y	R	R	R	Y	Y		3	3		
27	R	B	B	B	R	R	3		3		
28	B	Y	R	B	B	B	4	1	1		
29	Y	R	B	Y	Y	Y	1	4	1		
30	R	B	Y	R	R	R	1	1	4	4+1+1	
31	B	Y	B	R	B	B	4	1	1		
32	Y	R	Y	B	Y	Y	1	4	1		
33	R	B	R	Y	R	R	1	1	4		
34	B	Y	Y	R	B	B	3	2	1		
35	Y	R	R	B	Y	Y	1	3	2		
36	R	B	B	Y	R	R	2	1	3		
37	B	R	R	Y	B	B	3	1	2		
38	Y	B	B	R	Y	Y	2	3	1		
39	R	Y	Y	B	R	R	1	2	3		
40	B	Y	R	B	B	Y	3	2	1		
41	Y	R	B	Y	Y	R	1	3	2		
42	R	B	Y	R	R	B	2	1	3	3+2+1	3 色
43	B	R	Y	B	B	R	3	1	2		
44	Y	B	R	Y	Y	B	2	3	1		
45	R	Y	B	R	R	Y	1	2	3		
46	B	Y	R	Y	B	B	3	2	1		
47	Y	R	B	R	Y	Y	1	3	2		
48	R	B	Y	B	R	R	2	1	3		
49	B	R	Y	R	B	B	3	1	2		
50	Y	B	R	B	Y	Y	2	3	1		
51	R	Y	B	Y	R	R	1	2	3		
52	Y	B	R	B	R	Y	2	2	2	2+2+2	
53	R	Y	B	Y	B	R	2	2	2		
54	B	R	Y	R	Y	B	2	2	2		
55	B	Y	R	R	B	Y	2	2	2		
56	B	Y	R	R	Y	B	2	2	2		
57	B	R	B	R	Y	Y	2	2	2		

表1 3色による塗り分け (B:青, Y:黄, R:赤)

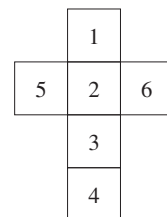


図3 サイコロの面の番号

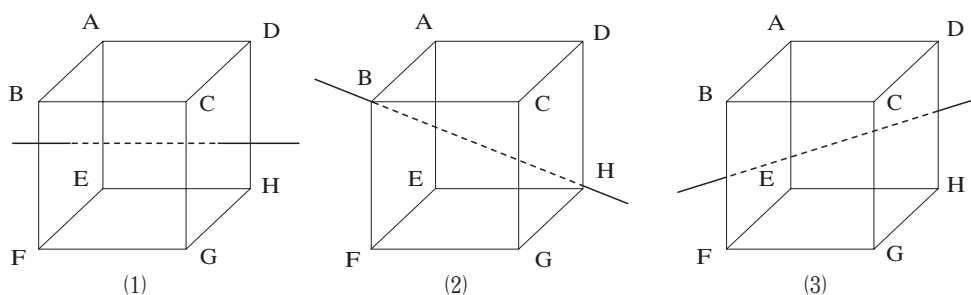


図4 回転軸と回転群

(1) たがいに向かい合う面と面を貫く軸を中心に 90° 回転する (これは6つある)。図4(1)のように面 $ABFE$ と面 $DCGH$ を貫く軸を中心に 90° 回転する。この場合、向かい合う面 $ABFE$ と $DCGH$ は色が異なってもよいので 3^2 通り、 90° 回転移動する4つの面 $ABCD$, $BFGC$, $EFGH$, $AEHD$ は同じ色でなければならないので3通り。したがって各軸に対して 3^3 通りあり、ぜんぶで 6×3^3 通りである。

(2) たがいに向かい合う面と面を貫く軸を中心に 180° 回転する (これは3つある)。図4(1)のように面 $ABFE$ と面 $DCGH$ を貫く軸を中心に 180° 回転する。この場合、向かい合う面 $ABFE$ と $DCGH$ は色が異なってもよいので 3^2 通り、 180° 回転移動するので4つの面に対面する面は同じ色でなければならない。たとえば面 $ABCD$ と $EFGH$, 面 $BFGC$ と $AEHD$ は同じ色であるから 3^2 通り。したがって各軸に対して 3^4 通りあり、ぜんぶで 3×3^4 通りである。

(3) たがいに向かい合う頂点と頂点を貫く軸を中心に 120° 回転する (これは8個ある)。図4(2)のように頂点 B と頂点 H を貫く軸を中心に 120° 回転する。この場合、頂点 B を含む3つの面 $ABCD$, $BFGC$, $ABFE$ は同じ色でなければならない、頂点 H を含む3つの面 $DCGH$, $EFGH$, $AEHD$ は同じ色でなければならない。色の組合せは各軸に対して 3^2 通りあり、ぜんぶで 8×3^2 通りである。

(4) たがいに向かい合う辺と辺を貫く軸を中心に 180° 回転する (これは6つある)。図4(3)のように辺 BF と辺 DH を貫く軸を中心に 180° 回転する。この場合、辺 BF を含む2つの面 $BFGC$, $ABFE$ は同じ色でなければならない、辺 DH を含む2つの面 $DCGH$, $AEHD$ は同じ色でなければならない。また、 180° 回転移動する2つの対面 $ABCD$, $EFGH$ は同じ色でなければならない。色の組合せは各軸に対して 3^3 通りあり、ぜんぶで 6×3^3 通りである。

回転群 G の要素の数は恒等置換 e を加えて $1+6+3+8+6=24$ である。
以上を公式にあてはめると

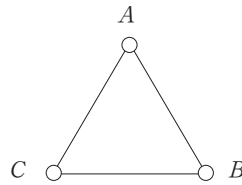


図5 正三角形

$$\frac{1}{24}(3^6 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 8 \times 3^2 + 6 \times 3^3) = 57$$

となり，異なるパターンは57通りである。

(問) 正4面体を3色で塗り分ける場合，何通りあるか。

(答) $\frac{1}{12}(3^3 + 4 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + 3 \times 3^3) = 15$ 通りである。

4. 群論，置換群，そして同値類

この節の記述は参考文献[3]，[4]をもとにしてバーンサイドの補題についてまとめたものである[3][4]。集合 X と X の置換群 G とが与えられているとき， G によって誘導される X 上の同値関係による X の同値類の個数を求めたい。この問題は，その同値関係を求めそれから同値類の個数を数えることによって，直接解くこともできる。しかしながら，集合 X が非常に多くの要素を含んでいるとき，そのような数え上げは，手がつけられないほどめんどろなものとなる。

バーンサイドの定理によれば，その群の要素（置換）のもとで不変な X の要素を数えることによって，同値類の数を求めることができる。ある置換がある要素を自分自身にうつすならば，その要素はその置換のもとで不変である（invariant）とよばれる。

置換群 G に含まれる要素（置換）の個数を $|G|$ と表す。置換 $\pi \in G$ に対して， π によって自分自身に写像される要素を“不変な”要素すなわち不変元と呼び，不変元の個数を $n(\pi)$ と表す。

【定理】（バーンサイド） 集合 X の置換群 G によってもたらされる同値関係による集合 X の同値類の個数 $N(X)$ は次式で与えられる。

$$N(X) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} n(\pi) \quad (1)$$

簡単な例題を以下に示す。図5のように正三角形の3つの頂点をそれぞれ A, B, C とし，これらの頂点に赤または白の色を塗る場合を考える。このような塗り方は図6の $P = \{P_1, P_2, \dots, P_8\}$ のように全部で $2^3 = 8$ 通りある。ここで，たとえば正三角形の中心を通り三角形に垂直な軸のまわりに時計方向に 120° ずつ回転させると図6の P_2 は P_3 に， P_3 は P_4 になる。つまり P_2, P_3, P_4 などは“同値”であるとみなすことができる。

正三角形の中心を通り三角形に垂直な軸のまわりに時計方向 $120^\circ, 240^\circ$ にずつ回転さ

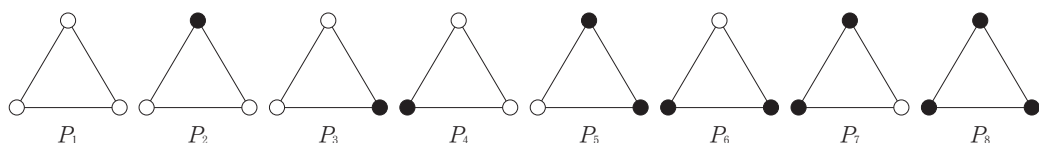


図6 正三角形の彩色

せた場合, $P_1, \dots, P_8$ がどのように置換されるかについては, 以下のように表すことができる。

$$\pi_1 = (P_1)(P_2P_3P_4)(P_5P_6P_7)(P_8)$$

$$\pi_2 = \pi_1\pi_1 = (P_1)(P_2P_4P_3)(P_5P_7P_6)(P_8)$$

そして, それぞれの置換 π に対する不変元の個数 $n(\pi)$ は次のようになる。

$$n(\pi_1) = n(\pi_2) = 2 \quad (2)$$

一方, 正三角形を1つの頂点と対辺の中点を結ぶ直線のまわりに 180° 回転させると, P_5 は P_7 , あるいは P_5 は P_6 になる。このことから, やはりこれらが“同値”であることがわかる。これらの場合の $P = \{P_1, P_2, \dots, P_8\}$ の置換については, 以下のように表すことができる。

$$\pi_3 = (P_1)(P_2)(P_3P_4)(P_5P_7)(P_6)(P_8)$$

$$\pi_4 = (P_1)(P_2P_4)(P_3)(P_5P_6)(P_7)(P_8)$$

$$\pi_5 = (P_1)(P_2P_3)(P_4)(P_5)(P_6P_7)(P_8)$$

そして, それぞれの置換 π に対する不変元の個数 $n(\pi)$ は次のようになる。

$$n(\pi_3) = n(\pi_4) = n(\pi_5) = 4 \quad (3)$$

すでに示した置換 $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5\}$ に, すべての要素をそれ自身に写像する恒等置換である

$$\pi_0 = (P_1)(P_2)(P_3)(P_4)(P_5)(P_6)(P_7)(P_8)$$

を加えると, これらが群をなすことがわかる。このように置換群によってもたらされる集合 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_8\}$ の同値類の個数 $N(X)$ は, 式(2), (3), そして π_0 を用いると, 式(1)より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} N(P) &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^5 n(\pi_i) \\ &= \frac{1}{6} (8 + 2 \times 2 + 3 \times 4) = 4 \end{aligned}$$

したがって, 同値類の個数は4となり, それぞれの同値類は

$$\{P_1\}, \{P_2, P_3, P_4\}, \{P_5, P_6, P_7\}, \{P_8\}$$

のように与えられることがわかる。表2は置換による要素の移り方を, 表3は置換によっても変わらない不変元を, 表4は同値関係を示している。

	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
P_1	P_1	P_1	P_1	P_1	P_1	P_1
P_2	P_2	P_3	P_4	P_2	P_4	P_3
P_3	P_3	P_4	P_2	P_4	P_3	P_2
P_4	P_4	P_2	P_3	P_3	P_2	P_4
P_5	P_5	P_6	P_7	P_7	P_6	P_5
P_6	P_6	P_7	P_5	P_6	P_5	P_7
P_7	P_7	P_5	P_6	P_5	P_7	P_6
P_8	P_8	P_8	P_8	P_8	P_8	P_8

表2 置換による要素の移り方

	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
P_1	=	=	=	=	=	=
P_2	=			=		
P_3	=				=	
P_4	=					=
P_5	=					=
P_6	=			=		
P_7	=				=	
P_8	=	=	=	=	=	=

8 2 2 4 4 4

表3 不変元

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
P_1	✓							
P_2		✓	✓	✓				
P_3		✓	✓	✓				
P_4		✓	✓	✓				
P_5					✓	✓	✓	
P_6					✓	✓	✓	
P_7					✓	✓	✓	
P_8								✓

表4 同値関係

5. 数学パズルふたたび

さて、最初に示した数学パズルについて考えてみよう。

【解法1：数え上げによる方法】

埋める正方形のことをタイルとよぶことにする。 2×2 のマス目に4枚のタイルを埋めるが、タイルはその位置関係によって図7左のように4通りある。したがって、生成されるパターンは全部で $4^4 = 256$ 通りということになる。タイルの色を無視して、フレームでみると位置関係は図7右のように2通りとなる。そこでフレームだけで何通りのパターンができるかを考えてみる。

フレームには対角線が1本入っている。この対角線が 2×2 のマス目の中心に何本集まるかを考えることでつぎのように分類できる。対角線が中心に集まるのが0本の場合は A 、1本の場合は B 、2本の場合は C_1 と C_2 、3本の場合は D 、4本の場合は E として図8に示しておく。この基本的な6パターンに分類することが問題を複雑にしないキーポイントになっている。

その後、それぞれのパターンについて色塗りをしていくが、色塗りはタイルごとに2通



図7 タイルのパターン

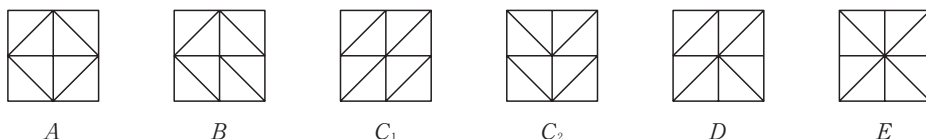


図8 基本6パターン

りあるから、全部で $2^4=16$ 通りあり、この中から合同なものを重複として省いていく。その結果、 A 型は4個、 B 型は4個、 C_1 型は5個、 C_2 型は6個、 D 型は4個、 E 型は4個となる。そして、

$$4+4+5+6+4+4=27$$

で27個の異なるパターンが求まる (図9)。考え方はあっていても色塗りの作業は見落としやすいものである。

27パターンを色、回転、左右反転で移り行くパターンの数で分類すると図10になる。移り行くパターンの数が2は4パターン、4は4パターン、8は9パターン、16は10パターンになる。そして、

$$2 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 9 + 16 \times 10 = 256$$

のように合計すると全体の256になる。以上は小学生でも理解できるエレガントな解答だが、記号を用いて数学的に考えてみよう。2×2 のマス目に4枚のタイルを入れるとき、色、回転および左右反転により合同なパターンが存在する。基本パターンを e とする。回転対称は90度回転を r 、180度回転を r^2 、270度回転を r^3 とする。また左右反転は y 軸に対して反転なので y 、色対称を c とする。

まず、回転対称のグループ

$$e \rightarrow r \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$$

がある。そして基本パターン e に対して左右反転のパターン y があり、これについても回転対称のグループ

$$y \rightarrow yr \rightarrow yr^2 \rightarrow yr^3$$

がある。これら2つのグループに対してそれぞれ色対称のグループ

$$ce \rightarrow cr \rightarrow cr^2 \rightarrow cr^3 \text{ と } cy \rightarrow cyr \rightarrow cyr^2 \rightarrow cyr^3$$

があるので図11のように合計16の同値なパターンが存在する。

図12のように4×4 のマス目を xy 座標系で表し、4つのマス目の位置を第1象限から第4象限に対応させる。またタイルの種類も座標系に合わせて同図のような位置関係で1から4までの番号をつける。

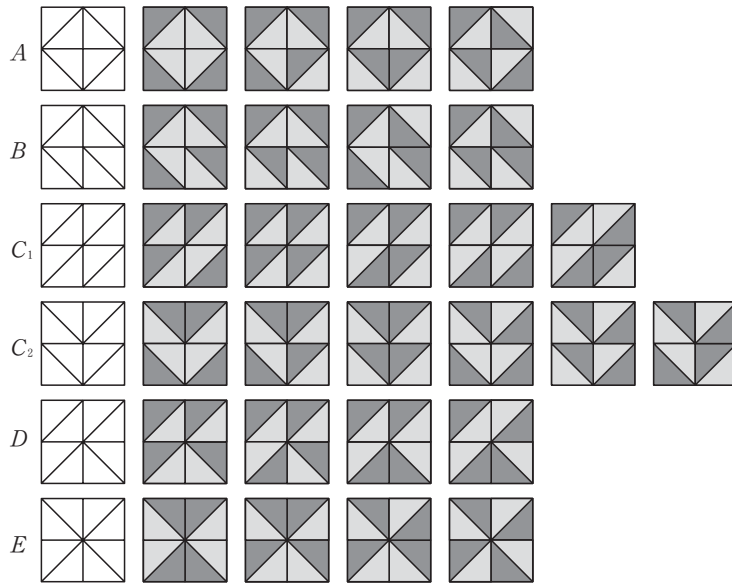


図9 色塗り

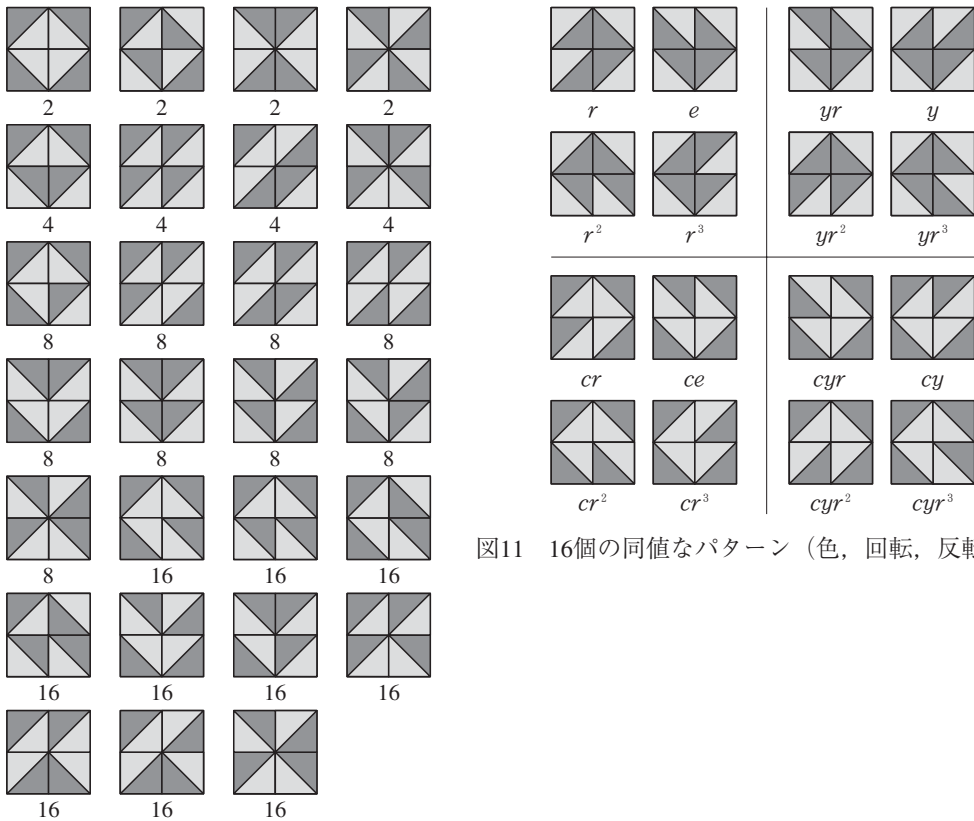


図10 合同なパターンの数

図11 16個の同値なパターン（色，回転，反転対称）

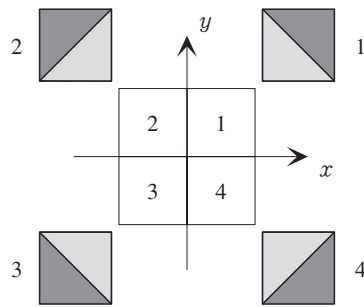


図12 座標系とタイルの番号

$D \backslash C$	e	c
e	$4^4=256$	0
r, r^3	4	4
r^2	16	16
y, yr^2	16	16
yr, yr^3	16	16

表5 変換によって不変なものの数

【解法2：バーンサイドの補題】

サイコロを3色で色分けする問題に使ったバーンサイドの補題をここでも使ってみよう。パターンの集合を Ω とすると、パターンの数は $|\Omega|=4^4=256$ であるが、 Ω には変換群 G が作用しているので、異なったパターンはバーンサイドの補題より $|\Omega/G|$ として計算できる。ここで

$$G=CD$$

C : 2次の巡回群 (色の対称)

D : 4次の2面体群 (回転対称, 反転対称)

である。

G の各要素 g で変換によって不変なもの (固定されるもの) で Ω の部分集合 Ω_g の要素数を数える。恒等変換を e , 色変換を c , パターンの90度回転を r , 左右反転を y とすると,

$$C = \{e, c\}, \quad D = \{e, r, r^2, r^3, y, yr, yr^2, yr^3\} \quad \text{なので}$$

$$G = CD = \{e, r, r^2, r^3, y, yr, yr^2, yr^3,$$

$$c, cr, cr^2, cr^3, cy, cyr, cyr^2, cyr^3\}$$

となり、 $|\Omega_g|$ は、変換群 G の各要素 g で不変な数で、表5のようになる。そして、異なったパターンの数は

$$\begin{aligned}
 |\Omega/G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\Omega_g| \\
 &= \frac{1}{2 \times 2 \times 4} (256 + 4 \times 4 + 10 \times 16 + 1 \times 0) \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

と簡単に計算される。ここでは図を加えてわかりやすく説明していこう。

- (1) e, c で不変：256通り， 0 通り

恒等変換 e ではすべてのパターンが変化しないから，不変なパターンは256通りとなる。一方，色替え c ではすべてのパターンが変化するので，不変なパターンは0通りとなる。

- (2) r, r^3 で不変：それぞれ4通り

90度回転で不変ということは，第1象限が第2象限に移り，第2象限が第3象限に移り，第3象限が第4象限に移り，第4象限が第1象限に移っても不変ということだ。それは第1象限から第4象限まですべて同じものであるということだ。270度回転は-90度回転ということであり，90度回転と同じように，第1象限から第4象限まですべて同じものであるということだ。90度回転および270度回転で不変はともに，第1象限にあるものでパターンが決まる。第1象限に入るのは4通りがあり4パターンが生成される（図13）。

- (3) r^2 で不変：4×4=16 通り

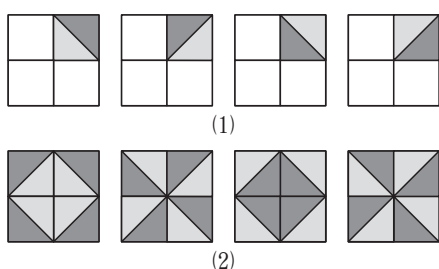
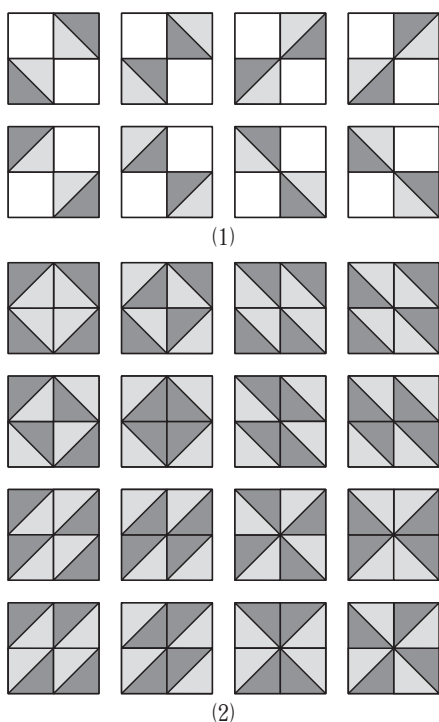
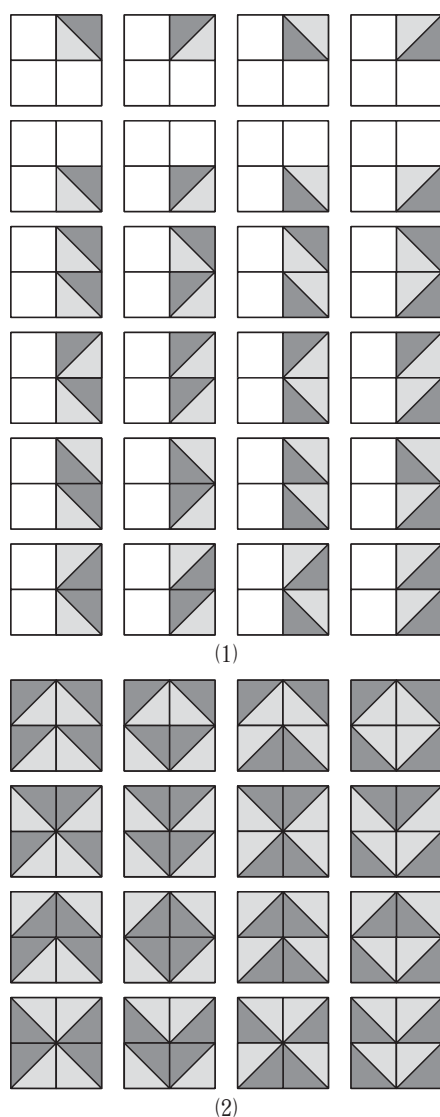
180度回転で不変ということは，第1象限が第3象限に移り第3象限が第1象限に移り，第2象限が第4象限に移り，第4象限が第2象限に移っても不変であるということだ。第1象限と第3象限，第2象限と第4象限の組合せはそれぞれ4通りある。そして生成されるのは16パターンであるが，これらを作図する必要はまったくない。このようなパターンが180度回転 (r^2) で不変となることをイメージとして示しただけである（図14）。

- (4) y で不変：4×4=16 通り

左右反転ということは y 軸に関して裏返すということである。第1象限と第2象限が交替し第4象限と第3象限が交替するのであるから，第1象限と第4象限にあるものがパターンを決めることになる。第1象限および第4象限に入るのはそれぞれ4通りあり，第1象限と第4象限の組合せは16通りとなり，16パターンが生成される（図15）。

- (5) yr^2 で不変：4×4=16 通り

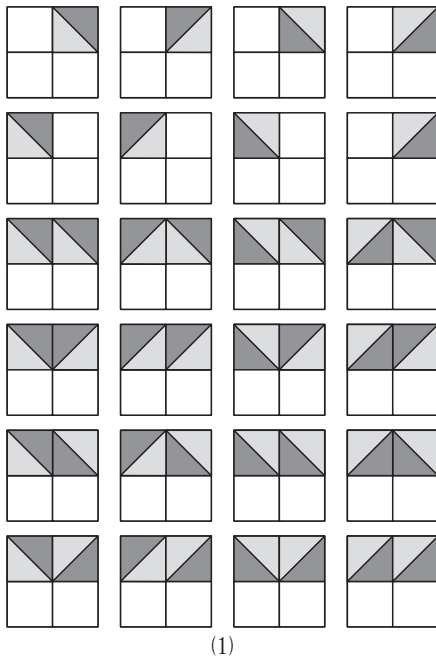
y 軸に関して対称移動して180度回転して不変ということは，パターンが上下反転つまり x 軸に関して対称になっていることだ。第1象限と第4象限が交替し第2象限と第3象限が交替するのであるから，第1象限と第2象限にあるものがパターンを決めることになる。第1象限および第2象限に入るのはそれぞれ4通りあり，第1象限と第2象限の組

図13 r, r^3 で不変図14 r^2 で不変図15 y で不変

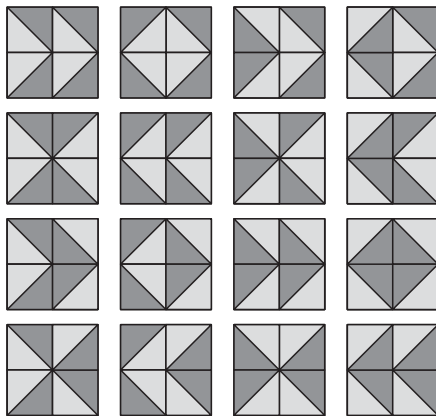
合は16通りとなり、16パターンが生成される (図16)。

(6) yr で不変 ($y = -x$ 軸に対称) : $4 \times 4 = 16$ 通り

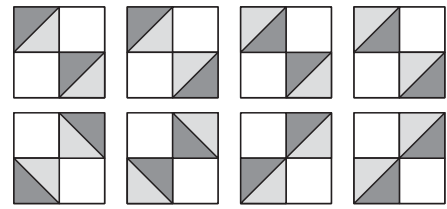
y 軸に関して対称移動して90度回転するということは $y = -x$ 軸に関して対称と同じである。これが不変ということは、第2象限と第4象限の組合せおよび第1象限と第3象限の組合せが $y = -x$ 軸に関して対称であることだ。第2象限と第4象限、第1象限と第3象限の組合せはそれぞれ4通りあり、これらは独立しているので組合せは合計16通りにな



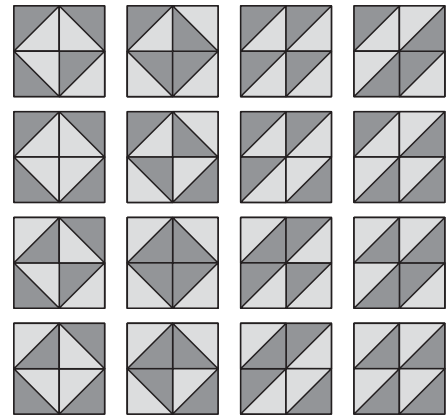
(1)



(2)

図16 yr^2 で不変

(1)



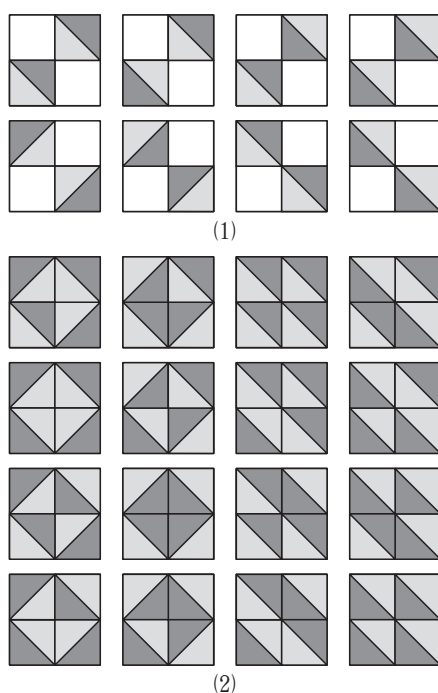
(2)

図17 yr で不変

り、16パターンが生成される（図17）。

(7) yr^3 で不変 ($y=x$ 軸に対称) : $4 \times 4 = 16$ 通り

y 軸に関して対称移動して270度回転するということは、 y 軸に関して対称移動して-90度回転するということであり、これは $y=x$ 軸に関して対称である。これが不変ということは、第1象限と第3象限の組合せおよび第2象限と第4象限の組合せがそれぞれ $y=x$ 軸に関して対称であることだ。第1象限と第3象限、第2象限と第4象限の組合せはそれ

図18 yr^3 で不変

それぞれ4通りあり，これらは独立しているので組合せは合計16通りになり，16パターンが生成される（図18）。

色対称の cr , cr^2 , cr^3 , cy , cyr , cyr^2 , cyr^3 についても，同様にして表1のように不変な数は計算できるが，色が変わることを考慮しなければならず，作図には少し思考の訓練がいる。以上2つの解法を紹介したが，パソコンなどに頼らず紙と鉛筆で解けることの素晴らしさを再確認した。

参 考 文 献

- [1] 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』2006年9月号，p95～p100
- [2] Burnside's lemma, from Wikipedia.
- [3] C. L. Liu 著，成嶋弘，秋山仁共訳『コンピュータサイエンスのための離散数学入門』Ohmsha, 1995年，p450～p457
- [4] 大山達雄『パワーアップ離散数学』共立出版，1997年，p70～p76