ヘキサフレクサゴン（hexaflexagon）の一般解

西　山　　　豊

Summary

Hexaflexagon is a mathematical puzzle which Arthur H. Stone invented in 1939. I am interested in this puzzle for about 20 years after knowing the fun of it in 1985. It has the form of hexagon made of paper. It can be opened by taking hold of two triangles and pinching them together, and show a new face from center. Although Mobius strip is twisted 180 degrees, hexaflexagon is twisted 540 degrees. These are surfaces without distinction of front and reverse sides in topology.

Martin Gardner showed patterns of hexaflexagons from 3 to 7 faces. I referred to it and have realized them. Joseph S. Madachy showed structure diagram and proved the possibility of the infinite series by straight models; n=3, 6, 12, 24... I examined any n from 3 to 24 faces, created all patterns, and did the complete check of operation.

Moreover, I created a universal pattern applicable to all models by the Visual Basic program. Since hexaflexagon contains many mathematical elements, it is suitable as a teaching material of mathematical education.

Keywords: hexaflexagon, topology, mathematical puzzle, mathematical education

は じ め に

このパズルを知ったのは1985年であるが20年近くも関心が続いている。その理由のひとつは３面折りから４面折り，５面折りへとパズルを完成していく自らの記録更新の歴史であったからだ。たかが数学パズルのひとつに過ぎないが，このパズルには数学的に興味深いことがらが多く存在している。今回，すべての n に対して n 面折りが可能であるということが理論化できたので，その全容をまとめてみることにする。

１．　裏表のない平面

このパズルはイギリスの数学者アーサー・H・ストーン（Arthur H. Stone）が1939年に考案したもので，ヘキサフレクサゴン（hexaflexagon）という名前がついている。

このパズルを紹介したマーチン・ガードナーの本が邦訳され1960年に白揚社から出版されているが，ヘキサフレクサゴンという名前がなじまないのか，翻訳にあたった金沢養は「オリガミ六角形」と意訳している[1]。また他の文献で池野信一は「たたみかえ折り紙」としている[2]。パズルの面白さを伝えたいのだが適訳が見つからず翻訳には苦労しているようである。私が原稿を書くときは「オリガミ六角形」または「図形の折りたたみ」としたが，これらは皆同じパズルのことを言っているのである。この論考では考案者の原題を尊重して「ヘキサフレクサゴン」とした。

ヘキサフレクサゴンのヘキサ（hexa）とは６のことで，フレクサゴン（flexagon）とはフレキシブル（flexible）なもの，曲げやすいもの，いろいろな形になるものの意味であるから「たたみかえ可能な六角形のもの」ということになろうか。フレクサゴンには六角形以外のものもあり，たとえばテトラフレクサゴン（tetraflexagon）は四角形のものだが，理論的にも実践的にも面白いのはヘキサフレクサゴンのほうである。

私がこのパズルの面白さを知ったのは，1985年に民間企業から大学へ転任した年のことである。私は数学を専攻し数学をひととおり勉強しているので，その面白さを学生にも伝えたいと思っていた。ところが転任した大学が文科系大学で，ほとんどの学生が中学生までに数学が嫌いになっているのである。「数学嫌い」「数学アレルギー」とはこのことを言っているのかと痛感した。数学の面白さを伝えるには因数分解や２次関数などの「受験の数学」では駄目だと悟り，文科系学生にもわかる楽しい数学の話題はないかと文献を調査した。

そのとき目にとまったのが，前述の『数理科学』に掲載された池野信一の記事である[2]。これは正六角形の形をした折り紙で，たたみ変えていくと次々と新しい面が出てくる不思議なパズルである。日本になかったパズルかというとそうでもなく，古くからある玩具「びょうぶがえ」に類似している。

このパズルは紙製のもので六角形のかたちをしている。その六角形は６つの三角形で構成されていて，図１のように親指と人差し指で隣接する２つの三角形をつまむと，真ん中から新しい面が現れてくるというのだ。もし新しい面が出てこないようだったら，三角形をひとつずらしてつまむとよい。六角形は表と裏の２面しかないように思われるが３つ目の面が隠れていて，それが簡単な操作で出すことができるのだ。

このパズルを知って20年近くなるが，今でもその感動と新鮮さは色あせることはない。私が講演や講習会でこのパズルを紹介すると，聴衆から一瞬どよめきがおこる。数学教育は感動を与えることが常に大切で，驚きや不思議から好奇心，謎解きへと発展すると数学も見直されるのではなかろうか。

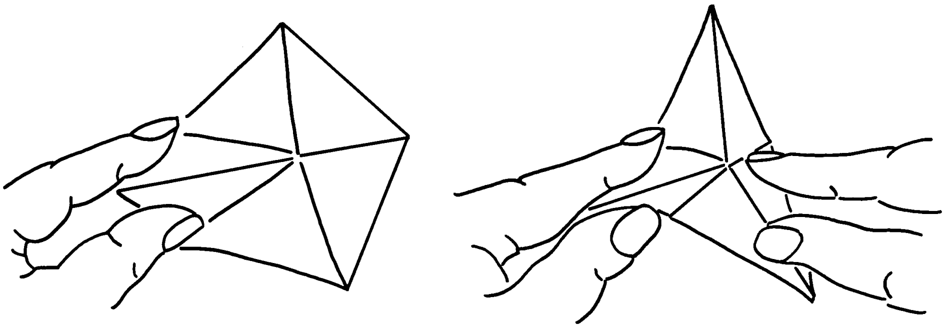


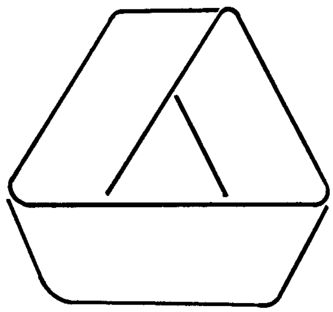
図１．新しい面の出し方

図２はトポロジー（位相幾何学）でいう裏表のない平面についての説明図である。普通の帯を180度だけひねってノリづけしたのがメビウスの帯とよばれるもので，ドイツの天文学者メビウス（A. F. möbius, 1790-1869）が考案したものである。ひねりの向きは右ねじ，左ねじのどちらの向きでもよく，180度ひねると裏と表がなくなりつながった平面となる。それを確かめるためにはメビウスの帯の上に鉛筆を走らせてみるとよい。一周すると平面の真下（裏側）に来て，もう一周すると元の位置に戻ってくる。つまり裏にも表にも行けるわけだが，どうしてこのようなものを考案したのか，それは宇宙の構造を理解するための思考実験であるということだけにとどめておこう。そしてこのアイデアを特許として商品化したものにエンドレス・テープがある。メビウスの帯をはさみで二等分するとどうなるのか，三等分するとどうなるのかの面白い話題もあるが，ここでは本題からはずれるので割愛することにする。

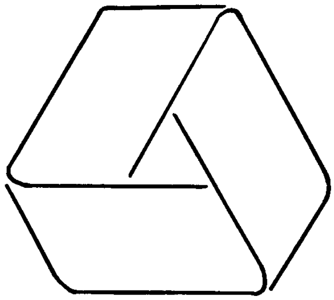
左図のメビウスの帯は180度ひねっているが，右図のヘキサフレクサゴンは540度ひねってできている。この場合もひねりの向きは右ねじ，左ねじのどちらでもよく540度ひねるということが大切である。540度とは180度の３倍である。一般に180度の奇数倍ひねってノリづけすると裏表のない平面になり，偶数倍ひねると裏表のある平面になる。

540度ひねりの帯とヘキサフレクサゴンの関係については戸田盛和の説明が詳しい[3)]。540度ひねりの帯の真ん中の空洞をなくしていくとヘキサフレクサゴンになるのだ。

図２(2）の状態であるなら，帯の長さを短くしていけば空洞は小さくなり，いずれは無くなる。180度ひねりの帯の空洞をなくしてもヘキサフレクサゴンにはならない。後述するが540度ひねりというのは意外と難しく，実際に学生にやらせてみると失敗することが多い。その場合のほとんどがメビウスの帯になっていて３面が現れないの



(1)メビウスの帯（180度ひねり)



(2)ヘキサフレクサゴン（540度ひねり）

図２．裏表のない平面

だ。

２．基本の３面折り

ヘキサフレクサゴンは，アーサー・H・ストーンが1939年に考案したと前述したが，そのエピソードを紹介しておこう。彼はイギリスのプリンストン大学の大学院生だったときアメリカへ留学した。アメリカで使用しているノートのサイズがイギリスのものより一回り大きかったので，バインダーからはみ出してしまった。はみ出た部分をはさみで切り取ったが，その切れはしをゴミ箱に捨てるのではなく，講義を聴きながら切れはしを折りたたんで遊んでいるうちにヘキサフレクサゴンを発見したという[1)]。紙の切れはしでも研究の対象になりうるのだ。そして紙と鉛筆で研究ができるというのはいかにも数学者らしい。

さて，ものごとは基本が大切である。ヘキサフレクサゴンの３面折りは基本中の基本であるので，読者はこの３面折りを完全にマスターして欲しい。

一辺が６センチの正三角形を図3(1）のように横に10個並べる。この程度の図ならコンパスと定規で描けるはずだ。10個の三角形の右端のひとつはノリづけのためにあるので，実際は９個の三角形がパズルに関係している。三角形は裏表の２面あるから，９×２＝18で合計18個の三角形があることになる。一方，フレクサゴンの六角形は三角形が６個でできているから，18÷６＝３で３面折りのものができることが数字の上からはなりたつ。

数字の上で勘定が成り立っても，三角形がどういう配置になっていればよいかが肝心であるが，その説明は後述するとして正しい折り方だけを説明しておこう。

$a-b$ の線にそって谷折りし（図3(2)），$c-d$ の線にそって谷折りし（図3(3)），＜のり＞の下をくぐらせて $e-f$ の線にそって谷折りして，のりづけをする（図3(4)）。

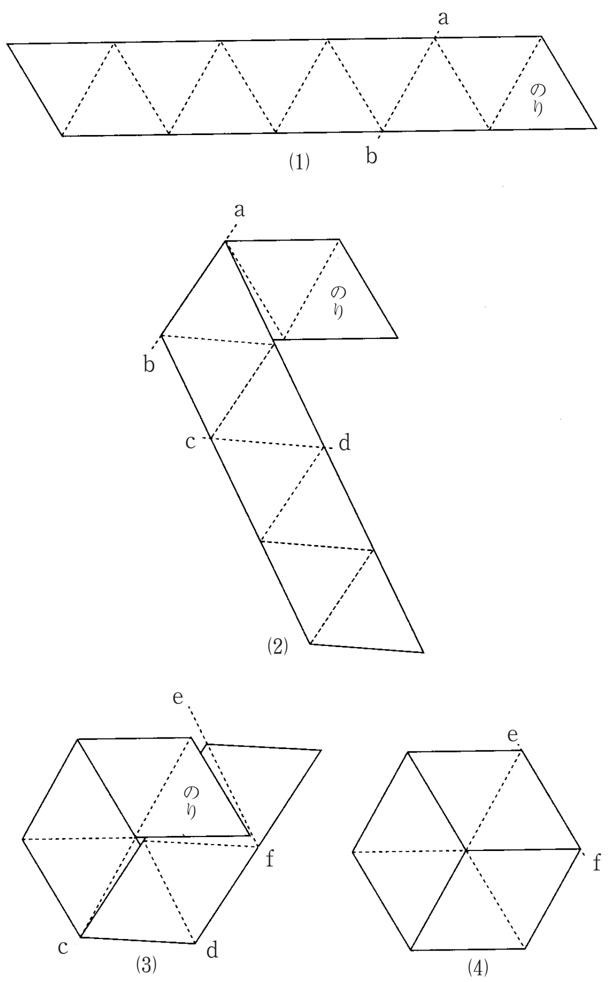


図３．折りたたみの手順（３面折り）

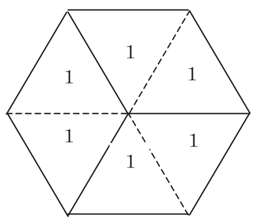


図４．数字を記入

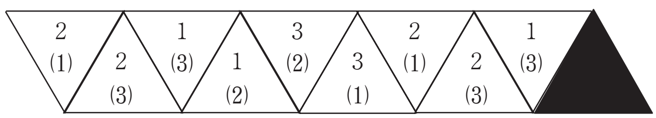


図５．3つの面の関係

谷折りを３回したことになるから180度×３＝540度ひねったことになる。この作業で多くの読者は⑶の折り方を間違えてしまう。図3(3) が読み取りにくいのかもしれないが，540度ひねりの意味を理解して慎重に折れば間違わないはずだ。

できあがったものは線にそって谷折り山折りの両方向によく折り曲げておくこと。図１のように隣接する２つの三角形を親指と人差し指でつまんでいくと，真ん中から新しい面が自然と現れてくる。もし出てこなかったら，無理に引っ張らずに三角形をひとつづらして（中心角で60度）みることだ。それでも出てこないようだったら，作り方が間違っているので図３にしたがってもういちど作り直してほしい。

ヘキサフレクサゴンが正しく動作するかどうかを確認しておこう。そのためには６角形の面に数字を記入していく。最初の面を「１」とし，つぎに現れた面を「２」，そのつぎに現れた面を「３」とする。これらは１→２→３→１→２→３というように３つの面がサイクリックに現れるのがわかる。数字を記入するのは表側から見た面だけとし，ヘキサフレクサゴンを裏返して数字を記入してはいけない。

記入した１から３の数字が，実際どのような配置になっているかを知ることは興味のあるところだ。いったん作成したヘキサフレクサゴンのノリをはがして展開したものが図５である。数字の⑴，⑵，⑶は紙片の裏側に記入された数字を示している。１つの面は６つの三角形で構成されている。その６つの三角形につけられた同じ数字は連続した領域にあるのではなく，裏表にとびとびについていて全体として６個になっている。数字は完全にバラバラかというとそうでもなく，２つずつのペアが等間隔に並んでいるのだ。

また，図１の折りたたみとの関係でいえば，１回目の操作で裏側に移動し２回目の操作で中に隠れることになる。つまり，ヘキサフレクサゴンはひとつの細長い帯状の平面をずらしながら見ているだけの話しである。

３．マーチン・ガードナーの型紙

私は，この不思議なパズルーヘキサフレクサゴンを学生に知らせるとともに記事としてまとめた[5)]。それは1990年のことで，知っていたのは３面折りだけであり，作成したのは画用紙にコンパスと定規で作図したものである。

ヘキサフレクサゴンは他大学でも紹介することがあった。３面折りができた学生から４面折りはどうするのですか，と質問を受けても十分に説明できなかった。前掲の池野信一の記事には４面折りの型紙はのせてあったが[2)]，説明がわかりにくく実現できなかった。また，ある書店で雑誌を立ち読みしていると，中村義作が６面折りについて解説しているのを知った。４面折りができていないというのに，５面折りをとび

こして６面折りの方法が説明されていた。私は文房具店で模造紙を買い，コンパスと定規で６面折りの型紙を作図して折ってみると，６面折りが意外と簡単に出来るのだった。

気分をよくした私は，もっと本格的に調べてみる気持ちになった。池野信一が参考文献としてあげていたマーチン・ガードナーの『現代の娯楽数学』[1)] には何かが載っていそうな気がした。発行年度が古いので，この本は書店で入手することができず，大阪府立中之島図書館に問い合わせてみた。蔵書としてあることはあるが，中之島図書館が古くなったので中央図書館（荒本）へ移転中であるというのだ。早く読んでみたいが入手できない。このもどかしさを経験して数ケ月後やっと本を手に入れることができた。なお，この本は往年のベストセラーであるので現在は復刊されていて書店で入手できる。

『現代の娯楽数学』にはヘキサフレクサゴンの紹介記事があり，この本の25ページに４面折りから７面折りまでの型紙がのせてある。図６に示したものがそれで，Ａが４面折り，Ｂが５面折り，Ｃの左右が６面折り，Ｄの３つが７面折りである。図６のタイトルをマーチン・ガードナーの型紙としたが，これらの型紙を彼が考案したわけではなく，ただ紹介しただけである。

この本には型紙の図が掲載されているだけで折り方の説明はなかった。興味をもたれた読者はこの型紙を拡大コピーして試してみるとよい。私が実現できたのは，Ａの４面折り，Ｂの５面折り，Ｄ（上）の７面折りの型紙からだけであり，６面折りについては後述する別の型紙からである。実現できたといっても簡単にできたわけではない。解答がのっていないから自力で解かねばならない。ああでもないこうでもないと失敗を何度も繰り返しながら実現できたわけで，失敗がヘキサフレクサゴンの数学的な構造を知ることにもつながっている。どうしても折り方の手順がわからない読者は参考文献(6)をご覧ください。

ヘキサフレクサゴンの多面折り（$n\geq4$）を実現するには面の数が多くなればなるほど，理論だけではなく実際に作成する用紙，作図法などが密接に関係してくる。最初にパズルを知った1985年ころは，画用紙にコンパスと定規で作図していた。３面折りだけならこれでよいが，面の数が多くなると作図の精度が要求される。鉛筆の芯は0.3ミリ，定規の目盛は1ミリ単位であるので，いくら慎重に作図したとしても手書きによる誤差は最低0.1ミリあるだろう。１つの三角形の誤差が0.1ミリであったとしても，三角形が10個になると誤差が蓄積されて1ミリになってしまう。もし24面折りを作成するなら三角形の数が73個になるので，誤差は7.3ミリとなり無視できなくなる。

また，当初，画用紙を使っていたが，画用紙は強いようで意外と駄目である。何度

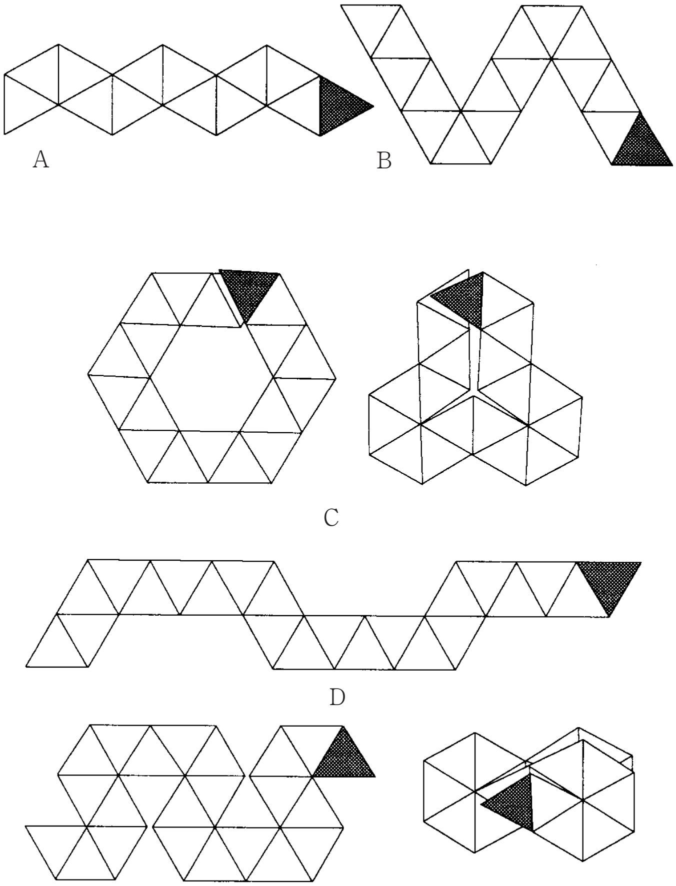


図６．マーチン・ガードナーの型紙（４面～７面）[1]

も折り曲げしているうちに破れてしまうのだ。紙以外の材質だったらどうだろうか。ヘキサフレクサゴンが商品化されているのを一度だけ玩具店で見たことがある。それは紙製ではなくビニール製であった。破れないようにとの工夫であろうが，なんとなくごわごわしていて多面折りには向かないようだ。

　このような経験から作図はコンパスと定規をあきらめ，パソコンを使って Visual Basic 言語でプログラムを作成するようにした。パソコンの場合は手書きの誤差0.1ミリはでてこず，かなり正確である。私は図６をもとにして４面折り，５面折り，７面折り型紙のプログラムを作成して型紙の複製を容易にした[6]。また画用紙は折り曲げに弱いので，普通のコピー用紙で作ることにした。コピー用紙は薄いが意外と強い。紙の繊維が違うのだろう。コピー用紙で指を切るということをよく経験するが，折り

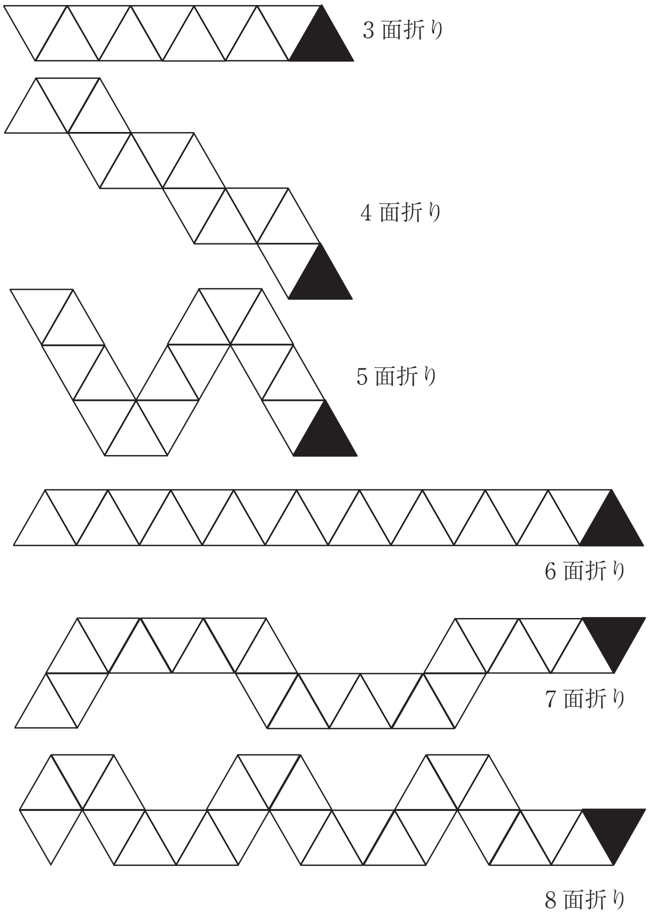


図7．3面折りから8面折りまで（型紙）

曲げにも強く多面折りには向いている。

また，面を区別するために最初は数字を記入していたが，次第に色分けしたほうがアピールすることに気づき色鉛筆で色を塗るようになるが，コピー用紙が薄くて裏まで色がうつってしまう。そこで，色鉛筆やマーカーによる塗りわけではなく，色紙（色つきの折紙）をノリで張ることにしている。

4．4面折りから8面折りまで

さて，私が4面折りから8面折りまでをどのようにして実現したかを説明しよう。この経験は，すべての$n(n \geq 3)$についてのn面折りについてヘキサフレクサゴンを理論化することにもつながっている。池野信一，マーチン・ガードナー，中村義作，

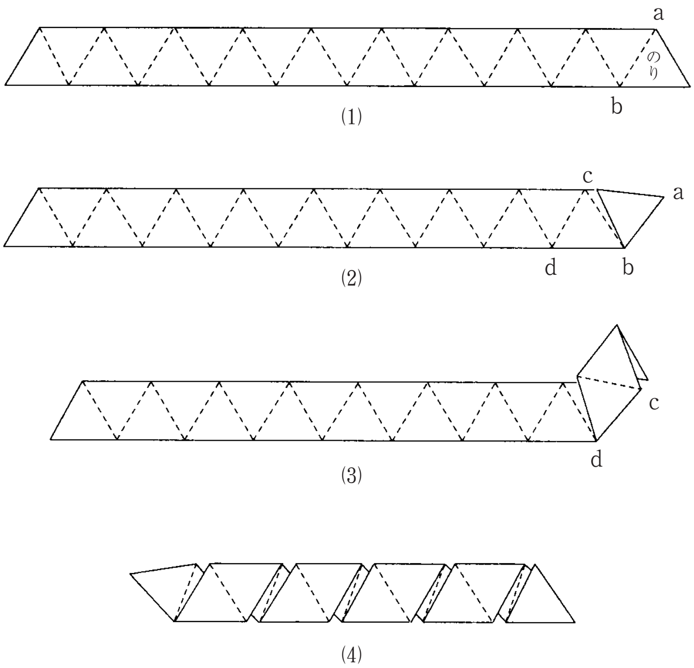


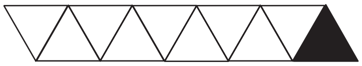
図８．６面折りの手順（６面折り→３面折り）

ジョセフ・マダチーなどの文献から，３面折りから８面折りの型紙について代表的なものを選び図７のように整理した。

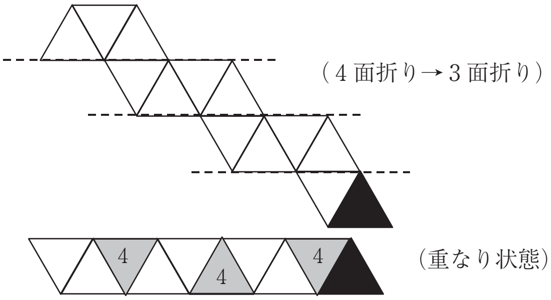
黒色の三角形はのりしろに対応するもので，実際の面の現われには関係しない。３面折りは図２(1)に示したものである。４面折りは図６Ａからの引用であるが，後述するがこのような配置が折り方の説明に適しているので右回りに30度回転させて図示した。５面折りは図６Ｂからの引用である。６面折りは３面折りのものを２枚つなぐものとした。７面折りは図６Ｄ（上）からの引用である。８面折りはジョセフ・マダチーの文献（p72-p73）から引用した[4)]。

６面折りは折り方がやさしいので，これから始めることにする。３面折りの型紙を２枚横につないでノリづけしたのが６面折りの型紙だ。三角形の数は18個であり，それにノリしろの1枚（黒色）がついた合計19枚である。図８に示すように $a-b$ にそって谷折り，$c-d$ にそって谷折りというように右ねじの方向で規則的に折っていけば３面折りの型紙と同じになる。この状態から３面折りを適用すれば６面折りが完成する。ノリづけさえ失敗しなければ誰でもが実現できる。

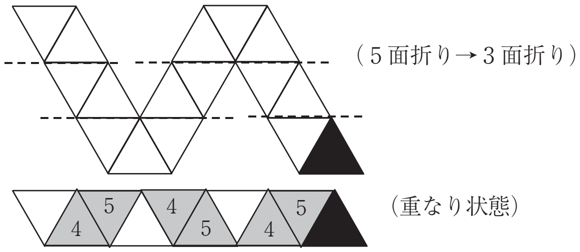
３面折り，６面折りの型紙のように細長い真っすぐな紙片のことをジョセフ・マダ



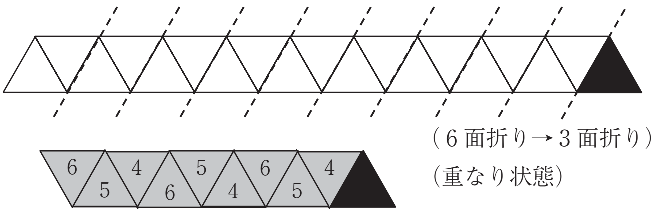
⑴　3面折り（型紙）



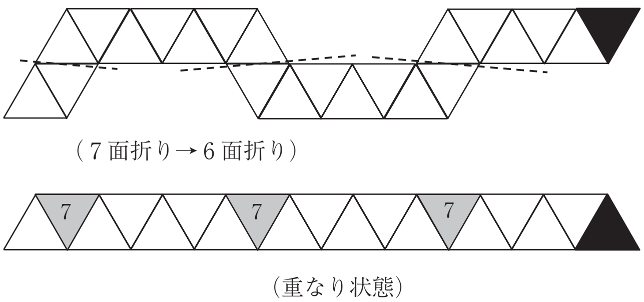
⑵　4面折り手順



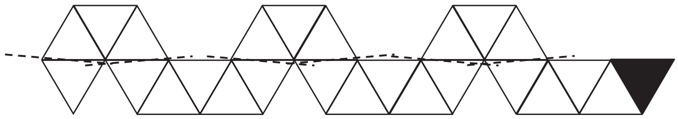
⑶　5面折り手順



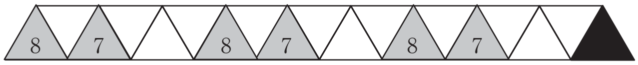
⑷　6面折り手順



⑸　7面折り手順



（8面折り→6面折り）



（重なり状態）

⑹　8面折り手順

図9．4面折りから8面折りまで（手順）

チーはストレート・モデル（straight models）とよんでいる[4]。このストレート・モデルは $n=3\times 2^p,(p\geq 0,1,2,\ldots)$ で成り立つ。p に値を代入すると $n=3,6,12,24,\ldots$ となり，3面折り，6面折り，12面折り，24面折りがこの方法で可能だということだ。そして，$n=\infty$ つまり面の数が無限のものも理論的には可能だということになる。無限面折りが可能だとしても，すべての n について可能かどうかに私の関心が移っていった。それを調べるために4面折りから8面折りまでの手順を明らかにしておこう。

4面折りの手順は，3箇所の点線のうち下から順番に右ねじの法則で折っていくと3面折りの型紙となる。重なり部分を灰色で示し，その部分は新しい面を構成するので「4」と記入した。（重なり状態）に3面折りを適用すれば4面折りが完成する。

5面折りの手順は，6箇所の点線のうち右下から順番に右ねじの法則で折っていくと3面折りの型紙となる。数字の「4」と「5」を記入したが，5面折りの型紙で「5」に対応する箇所だけを折っていくと4面折りの型紙になるということだ。

7面折りの手順は，3箇所の点線のうち右端から順番に右ねじの法則で折っていくと6面折りの型紙となる。重なり部分に数字の「7」を記入した。この6面折りの型紙から3面折りの型紙までもっていき，3面折りを適用することになる。つまり，7面折り→6面折り→3面折りという手順になる。

8面折りの手順は，6箇所の点線のうち右端から順番に右ねじの法則で折っていくと6面折りの型紙となる。以下は7面折りの手順と同じである。

5．推 移 図

3面折りから8面折りまでを説明したが，これだけの説明では不十分だとする読者は参考文献⑹を参照のこと。ここではもう少し詳しい図が載せてある。

さて，折り方さえわかればその数の面がでてくるのは確かだが，面と面との関係，

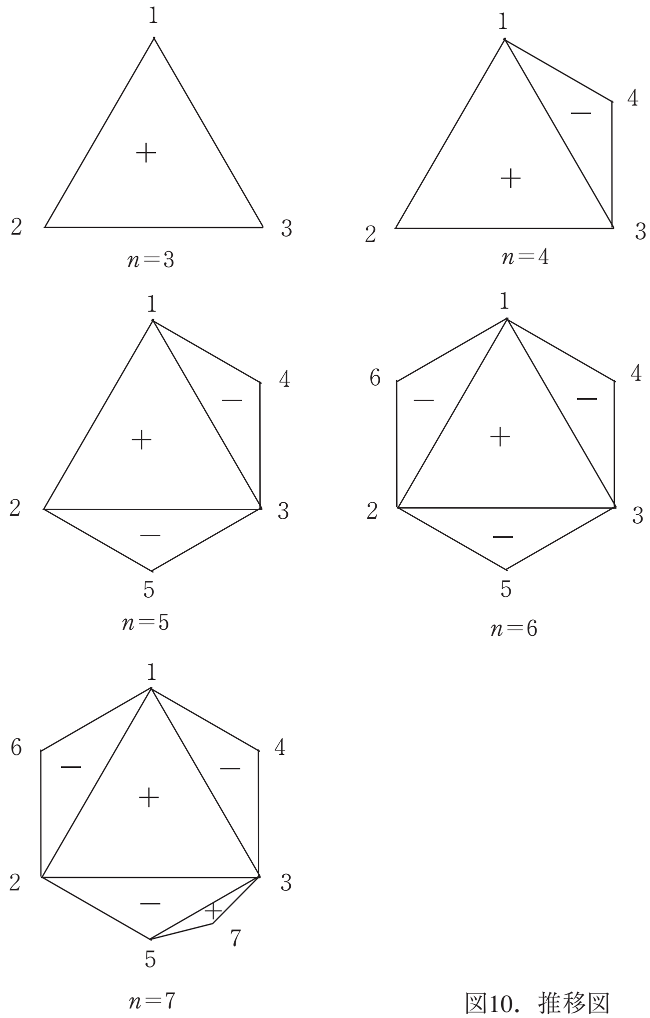


図10．推移図

出てくる順番はどのようになっているのだろうか。それには図10に示す推移図を参考にするとよい。この図はジョセフ・マダチーの文献を参考にして私が作成したものである。

３面折り（$n=3$）の場合は，推移図が三角形で表現される。三角形の頂点に記入した数字の１，２，３は面の番号である。三角形の内部にプラス（＋）記号を記入したが，これは面の番号が１→２→３というように反時計回りに循環するということである。

４面折り（$n=4$）の場合は，３面折り（$n=3$）の推移図に頂点１から頂点３に至る辺に新しい三角形が追加される。それは新しい面の数字４が関係する三角形である。

この三角形の内部にマイナス（－）記号を記入したが，これは面の番号が１→４→３というように時計回りに循環するということである。４面折りの場合は１→２→３のプラス（＋）循環と，１→４→３のマイナス（－）循環の２つが存在するということだ。たとえば，３から４に行くには直接行けないので，１→２→３のプラス（＋）循環で３→１と進み，１→４→３のマイナス（－）循環で１→４と進み４に到達する。この場合，１は中継点となっている。

５面折り（$n=5$）の場合は，3面折り（$n=3$）の推移図に２つの三角形が追加される。１→２→３のプラス（＋）循環，１→４→３のマイナス（－）循環，２→３→５のマイナス（－）循環の３つが存在する。たとえば4から５に行くには，１→４→３のマイナス（－）循環で４→３→１と進み，１→２→３のプラス（＋）循環で１→２→３と進み，２→３→５のマイナス（－）循環で３→５と進み，５に到達する。

６面折り（$n=6$）の場合は，３面折り（$n=3$）の推移図に３つの三角形が追加される。１→２→３のプラス（＋）循環のまわりに，１→４→３，２→３→５，１→２→６の３つのマイナス（－）循環が存在する。

７面折り（$n=7$）の場合は，６面折り（$n=6$）の推移図の外側に３→５→７のプラス（＋）循環の三角形が追加される。

３面折りから７面折りの推移図を注意深く見てみると，次の点を知ることができる。

(1)　n 面折りに対して n 多角形の推移図が対応する。

(2)　n 多角形は $n-2$ 個の三角形に分割される。

(3)　三角形は循環の向きにより反時計回り（＋）と時計回り（－）の２種類がある。

(4)　隣り合わせる三角形の符号は互いに異なる。

以上のような推移図を作成しておくと，任意の面を出す作業がスムーズになり，確実となる。

６．多面折りの一般解

４面折りから８面折りの手順（図９）と推移図（図10）を念頭におきながら，$n \geq 9$ についてこれが可能かどうか検討していこう。

まず，ストレート・モデルの基本系列が存在する。基本系列とは $n=3\times2^p, (p\geq0,1,2,\ldots)$ で表されるもので，$n=3,6,12,24,\ldots$ である。これ以外の n については面を重ねあわすことによって，この系列にのせればいいことになる。

そして図９でみたように，灰色で示した三角形の配置が規則的であればそれが型紙として正しいことになる。図9(6)の８面折りの（重なり状態）に注目すると，６個の灰色の三角形の配置はこれ以外にも，図11上のような配置でも規則的であることがわ

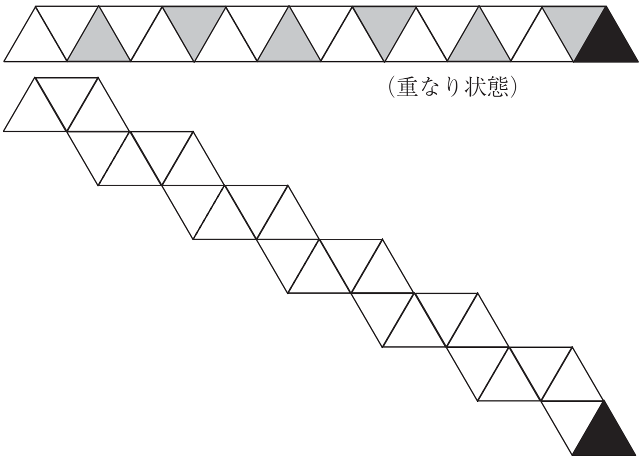


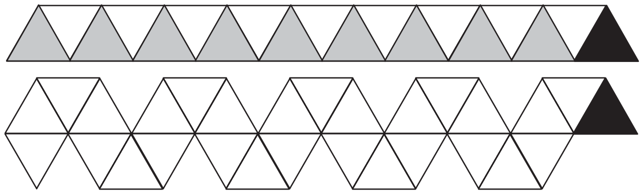
図11．8面折り型紙（別解）

かる。そしてこれをもとに型紙を作ってみると図11下となる。実際に作ってみると８面折りを確認できた。これは８面折りの別解である。

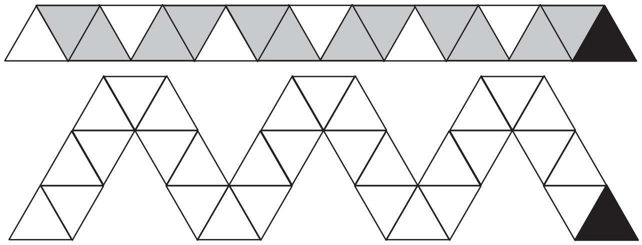
このことからもわかるように，新しい型紙を作る場合は（重なり状態）をどうするかがキーポイントとなる。９面折りは灰色が９箇所必要である（重なりは三角形が２個分になるから合計 $9\times2=18$ 個，１つの面は６個の三角形がいるから $18\div6=3$ で３面増えることになる。９面折りは６面折りに退化するから，これで勘定があう）。９箇所に灰色を配置するのはそれほど難しくはない。それを展開すると９面折りの型紙となる。10面折り，11面折りについても同様に，まず（重なり状態）を決めてから，それを展開すればよい。それを図12に示しておく。

12面折りはストレート・モデルである。つぎのストレート・モデルは24面折りである。ここでは13面折りから23面折りまでを検討していこう。結論から言うと，すべての型紙が作図でき，それをもとにパズルを作成して動作確認したところ，理論どおりであった（図13）。これらの型紙は面の数が少ないほうから順番に完成したわけでもない。簡単なものから済ませていったのでできた順番はアトランダムである。なかでも19面折りは最後まで未解決だった。$n=19$ というのが素数であるので，不可能ではないかと悩んだが，試行錯誤するうちに灰色の位置がきまり，展開図をつくると蛇のような形となった。

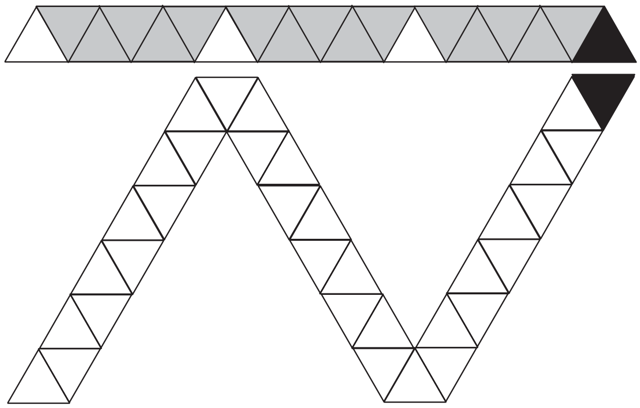
12面折りから23面折りまでの図を概観すると，それは波の数や高さに対応しているようにも見える。n が増すにつれて波の数（振動数）が増え，波の高さ（振幅）が大きくなっていく。ストレート・モデルは波のまったくない平坦な海面である。$n=3$



９面折り



10面折り



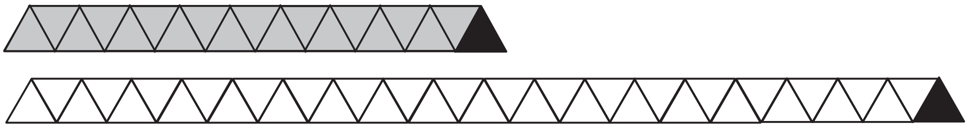
11面折り

図12. 9面折りから11面折りまで（型紙）

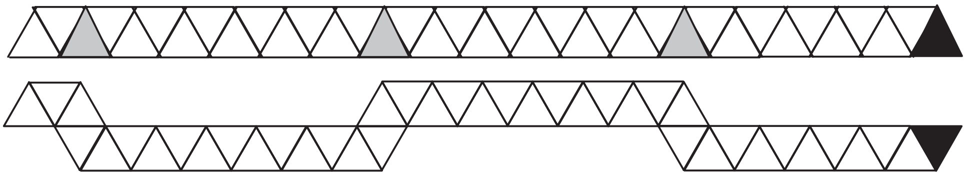
から $n=\infty$ になるにつれて平穏→さざ波→中波→大波→平穏を周期的に繰り返しているようである。

７．万能型紙

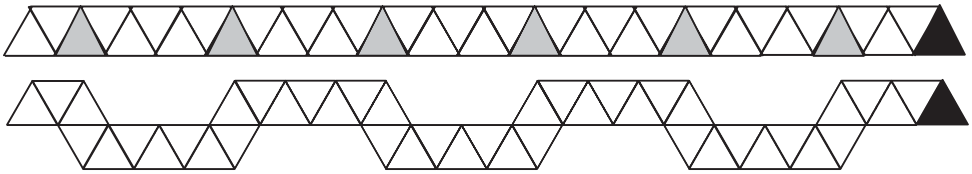
以上は，$3\leq n\leq 24$ のすべての n について n 面折りが可能であることを示しただけであって，任意の n について数学的な証明をしたわけでもない。$n\geq 25$ についてもこつこつと検討していけば恐らく問題ないであろうが，実際にものを作って確認作業をすることは大変である。私は24面折りまでを確認したが，普通のコピー用紙を使って



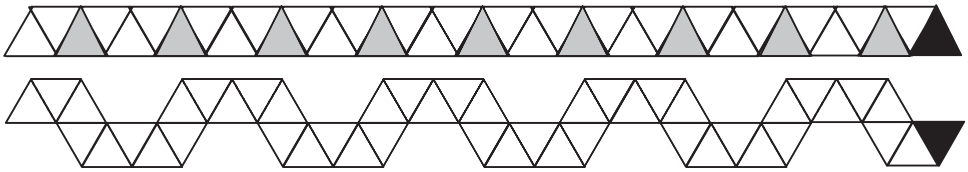
12面折り



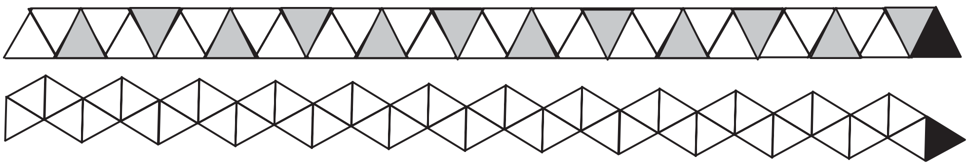
13面折り



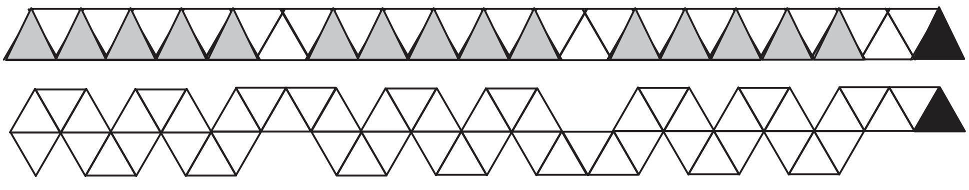
14面折り



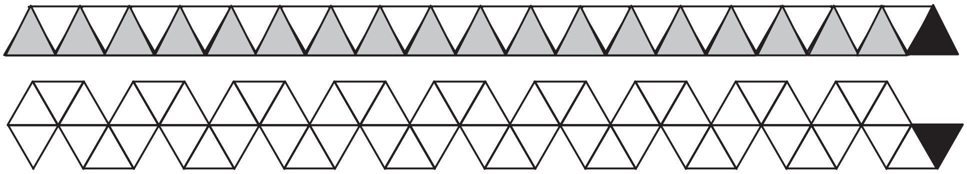
15面折り



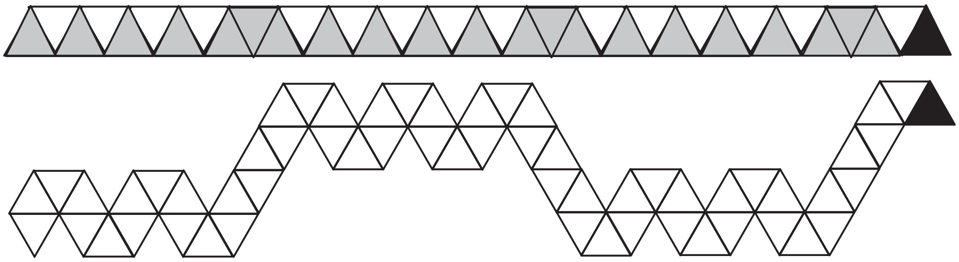
16面折り



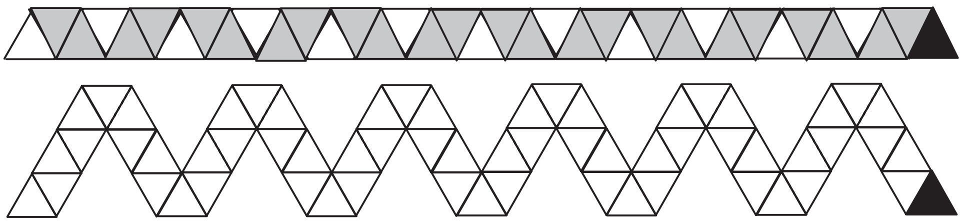
17面折り



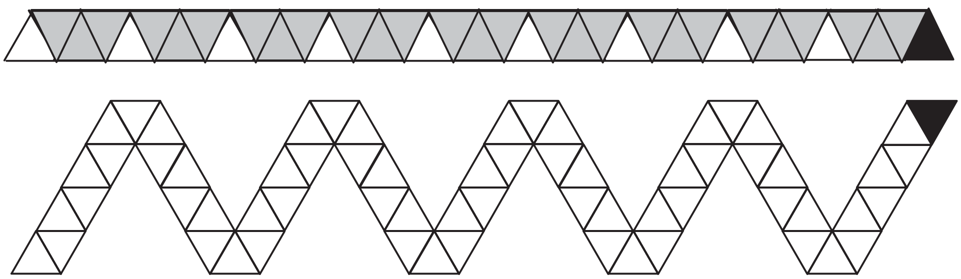
18面折り



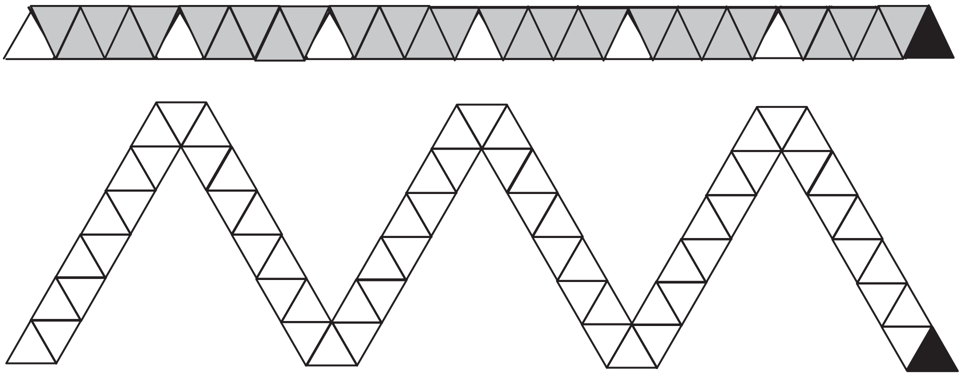
19面折り



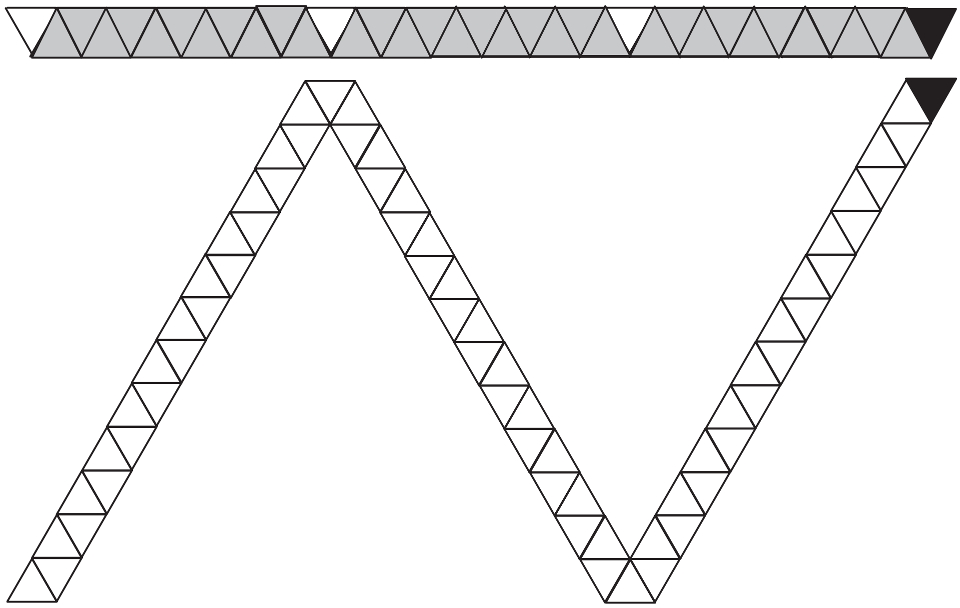
20面折り



21面折り



22面折り



23面折り

図13.　12面折りから23面折りまで（型紙）

確認できるのはこれが限界であると思う。

型紙をコンパスと定規で描くという方法は時間もかかるし誤差もでてくる。そこで前述のようにパソコンで作図することにした[6)]。ただし，３面折り型紙プログラム，４面折り型紙プログラムというように，プログラムを型紙に固定してしまったのが失敗だった。そこで今回，すべての型紙に適用可能な万能型紙プログラムとした。これは Visual Basic で約30行の命令でできたプログラムで（表），RUN すると図14のような万能型紙が画面に表示される。これを印刷しコピー機で複製すればよい。必要な型

```
Private Sub Command1_Click()
Dim x1, y1, x2, y2 As Integer
x0 = 1500
y0 = 200
nx = 6
ny = 6
d = 2000
For j = 1 To ny
  yb = y0 + d * (j - 1) * Sqr(3) / 2
  k = j Mod 2
  xs = x0 + d * 1 / 2 * (k - 1)
  xe = xs + d * (nx - k)
  Line (xs, yb)-(xe, yb)
  If j = ny Then GoTo last
  For i = 1 To nx
    x1 = x0 + d * ((i - 1) - 1 / 2)
    y1 = yb + d * Sqr(3) / 2 * k
    x2 = x1 + d
    y2 = y1
    x3 = (x1 + x2) / 2
    y3 = yb - d * Sqr(3) / 2 * (k - 1)
    Line (x1, y1)-(x3, y3)
    Line (x2, y2)-(x3, y3)
  Next i
Next j
last:
End Sub
```

表. Visual Basic による万能型紙

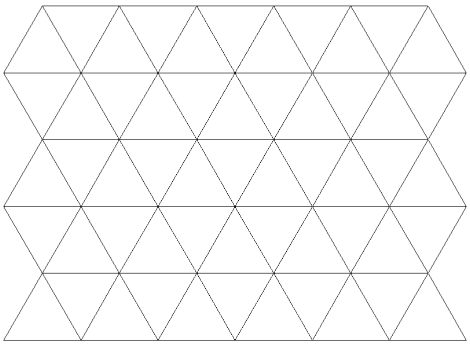


図14. 万能型紙

紙の形にはさみで切り取ればいいのである。

ヘキサフレクサゴンは，まず３面折りの現象をみて感動する。そして４面折りができるだろうかと考える。４面折りができると５面折りや６面折り，そして任意の n 面折りは可能だろうかと考える。これらの思考の過程は「拡張」「一般解」「連続性」「同値，同型」といった数学で行う手法に似ている。たかがパズルであるが，理論化，体系化するとパズルが立派に見えてくるのだ。パズルを作るだけなら美術・工作で終わってしまうが，三角形の配置や現れる順番を考えると数学的な要素がいっぱい詰まっている。基本の３面折りでも感動は十分に伝わるので，このパズルを経験していない読者は是非とも試していただきたい。

参考文献

1）M.ガードナー著，金沢養訳「オリガミ六角形」『現代の娯楽数学』白揚社，1960，p13－p28
2）池野信一「たたみかえ折り紙」『別冊：数理科学，「パズル」IV』サイエンス社，1979，p78-p82
3）戸田盛和『おもちゃセミナー』日本評論社，1973年，p226-p227
4）Joseph S. Madachy, *Madachy's Mathematical Recreations*, Dover, 1979
5）西山豊「折り紙六角形」『BASIC 数学』現代数学社，Vol.23，No.12，1990.12，p82-p84
6）西山豊「オリガミ六角形の多面折り」『大阪経大論集』Vol.50，No.1，1999.7，p353-p378
7）西山豊「図形の折りたたみ」『数学教育』明治図書，Vol.43，No.11，2002.11，p66-p70