需要分析における双対関係

渡 部 重 明

0. 本稿の目的は，需要分析における基本的な双対関係の要約を与えることである．これは，理論的に需要の内部構造を探る上で必要であるのみならず，実証分析を進める上でも重要である[1]．効用関数（直接効用関数）あるいは需要関数を直接規定するのが困難な場合でも，間接効用関数，基準化関数あるいは支出関数のいずれかが規定できれば，双対関係を通じて間接的に効用関数あるいは需要関数についての分析が可能である．あるいはまた，直接的分析が可能な場合でも，他の関数を通じて，別の観点からチェックしてみることも興味のある点である．

財　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n_+$〔n 次元非負象限〕

価格　$\mathrm{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_n)\in S^n$〔n 球面〕

所得　$m\in R_{++}$〔正の実数〕

直接効用関数　$u(x)$[2]

間接効用関数　$v(p, m)$

基準化関数　$d(x, u)$[3]

支出関数　$e(p, u)$

1) Barten［1］, Lau［9］参照.

2) 生産関数についても同様の展開がなされる．その場合，効用関数・生産関数いずれの場合にも適用できる一般論を展開するのに都合がよいとして，Diewert［7］は，aggregator function なる名称を提唱している．これは極めて適切であると思う．

3) これは一般的用語法ではない．Deaton［3］および Shephard［10］では，

1. 間接効用関数

$$\max \quad u(x_1, \cdots, x_n)$$
$$s.\ t. \quad p_1x_1+\cdots+p_nx_n$$

から決定される

$$x_i=D_i(p_1, \cdots, p_n, m), \quad (i=1, \cdots, n)$$

が通常の需要関数 (ordinary or uncompensated demand function) である.

これを効用関数に代入すると,

$$\begin{aligned} u&=u(x_1, \cdots, x_n)\\ &=u[D_1(p, m), \cdots, D_n(p, m)]\\ &=v(p_1, \cdots, p_n, m)\end{aligned}$$

となる。これを間接効用関数と呼ぶ.

最適点においては,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\lambda p_i, \quad (i=1, \cdots, n)$$

である。したがって,

(1) $$\frac{\partial v}{\partial p_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial p_j}=\lambda\sum p_i\frac{\partial x_i}{\partial p_j}=-\lambda x_j$$

$$(\because\ \sum p_ix_i=m\Rightarrow\sum p_i\frac{\partial x_i}{\partial p_j}+x_j=0)$$

(2) $$\frac{\partial v}{\partial m}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial m}=\lambda\sum p_i\frac{\partial x_i}{\partial m}=\lambda$$

$$(\because\ \sum p_ix_i=m\Rightarrow\sum p_i\frac{\partial x_i}{\partial m}=1)$$

(1), (2)より, Roy の恒等式の第1表現を得る.

---

distance function と呼んでいる. 他方, Blackorby・Primont・Russell [2] では, transformation function を, さらに Diewert [7] では, deflation function なる用語を使っている. しかし, これらはいずれも他の一般的用語法と混同する恐れがある. したがって, 筆者は基準化関数 (normalization function) が適当ではないかと考えている.

(3) $$x_j=-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial v}{\partial m}}$$

さらに，(1)の両辺に p_j をかけて合計すると，

$$\sum p_j\frac{\partial v}{\partial p_j}=-\lambda\sum p_jx_j=-\lambda m$$

$$\therefore\ \lambda=-\frac{1}{m}\sum p_j\frac{\partial v}{\partial p_j}$$

となる。

したがって，(2)から，

$$\frac{\partial v}{\partial m}=\lambda=-\frac{1}{m}\sum p_j\frac{\partial v}{\partial p_j}$$

となる．故に，Roy の恒等式の第2表現が得られる．

(4) $$x_j=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_j}}{\dfrac{1}{m}\sum p_j\dfrac{\partial v}{\partial p_j}}$$

特に，$m=1$ なる場合には，第2表現が必要である。

間接効用関数が与えられれば，(3)あるいは(4)により，需要量を決定することができる．すなわち，(3)あるいは(4)は通常の需要関数の別表現と考えることができる．

一般的に，需要関数 D は0次同次関数である．したがって，上の定義から，間接効用関数 v も0次同次関数である．

2. 支出関数

$u=u^\circ$ のとき，支出関数 e は次のように定義される．

$$e(p,\ u^\circ)=min\{\sum p_ix_i\,|\,u(x)=u^\circ\},$$

これは，u° の効用水準を達成するのに必要な最小費用を意味する．とこ

ろで，最適点においては，

$$u_i=\lambda p_i,\quad (i=1,\ \cdots,\ n)$$

である．したがって，

(5)　$e=\sum p_i x_i$

の両辺を p_j で微分すると，

(6)　$$\frac{\partial e}{\partial p_j}=x_j+\sum p_i\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$
$$=x_i+\frac{1}{\lambda}\sum u_i\frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

となる．他方，最適点においては，

$$u^\circ=u(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

であるから，

(7)　$$0=\sum u_i\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

である．故に，(6)，(7)により，

(8)　$$x_j=\frac{\partial e}{\partial p_j},\quad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

を得る．この(8)は，Shephard の補題と呼ばれている．

〔別解〕　Shephard の補題は次のようにみることもできる．最適点に関しては，特に $m=e(p,\ u^\circ)$ であるから，これを $v(p,\ m)$ に代入すると，

$$u^\circ=v[p,\ e(p,\ u^\circ)]$$

となる．したがって，両辺を p_j で微分すると，

$$0=\frac{\partial v}{\partial p_j}+\frac{\partial v}{\partial m}\cdot\frac{\partial e}{\partial p_j},$$

よって，Roy の恒等式により，

$$\frac{\partial e}{\partial p_j}=-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial v}{\partial m}}=x_j$$

を得る．ただし，次のことを注意しなければならない．一般的には，$\partial e/\partial p_i$ は補償需要関数と呼ばれるものであり，通常の需要関数とは異なる．前者は，所得効果が相殺されているからである．しかし，最適点においては，両者は一致しているから，(8)により需要量が決定される．すなわち，支出関数が与えられれば，(8)により需要量を求めることができる．

もう一つの注意すべき重要な点は，(8)を(5)に代入すると，

$$e=\sum p_i\frac{\partial e}{\partial p_j}$$

となる．よって，Euler の定理により，e が価格に関して1次同次関数であることがわかる．

3. 基準化関数

R^n_+ の任意の点を x とする．原点から x を通る半直線上で $x/d(x, u)$ なる点を考える．これは，ベクトル x の縮小あるいは拡大された点を示す．いま，$x/d(x, u)$ を効用関数に代入すると，

$$u=u\left\{\frac{x}{d(x, u)}\right\}$$

となる．そして，明らかに，

(9) $u(x)=u^\circ \Leftrightarrow d(x, u^\circ)=1$

である．このような $d(x, u)$ を基準化関数という．$d(x, u)=1$ は効用関数の陰関数表現になっている．

d の一つの具体的な表現が，Shephard [10] に与えられている．原点から x を通る半直線と u° 水準の無差別曲線との交点を z とするとき，

$$d(x, u)=\left\{\frac{\sum x_i^2}{\sum z_i^2}\right\}^{1/2}$$

がそれである．

4. Gorman［8］，Deaton［3］による双対関係をみよう．$d(x, u)=$

k とし，$x^*=x/k$ とする．また，p と x の内積を $p\cdot x$ と表わす．すると，最小費用としての支出関数の定義から，

$$e(p,\ u)\leqq p\cdot x^*=p\cdot\frac{x}{k}$$

(10) $\therefore\quad ke(p,\ u)\leqq p\cdot x$

である．したがって，$e(p,\ u)=1$ としたときの $p\cdot x$ の最小の値が k である．すなわち，

(11) $d(x,\ u)=\min_{p}\{p\cdot x\,|\,e(p,\ u)=1\}$

である．

また，(9)を考慮すると，支出関数の定義式は，

(12) $e(p,\ u)=\min_{x}\{p\cdot x\,|\,d(x,\ u)=1\}$

となる．

これが，基準化関数と支出関数の間の双対関係である．また，注意すべき点は，(11)から明らかなように，基準化関数は1次同次関数である．これから，$p\cdot x=m$ なることおよび e の価格に関する1次同次性を考慮すると，(10)から，

$$d(x,\ u)e\left(\frac{p}{m},\ u\right)\leqq 1$$

となる．そして，最適点では等号がなりたつ．すなわち，最適点においては，基準化関数の値と支出関数の値は逆比例関係にある．

この関係式は次のように表現することができる．最適点においては，

(13) $d(x,\ u)=1\Leftrightarrow e\left(\frac{p}{m},\ u\right)=1$

である．

5. Deaton［3］に基づき，もう一つの双対関係をみよう．間接効用関数は0次同次関数であるから，

$$u=v(p,\ m)=v\left(\frac{p}{m},\ 1\right)=v^*\left(\frac{p}{m}\right)$$

と表わすことができる．最後の式は，所得によって基準化された基準価格による間接効用関数表現である．そこで，d と双対な基準化関数を $d^*(p,\ u)$ とする．すると，一般の間接効用関数表現は，

$$u=v^*\left\{\frac{p}{d^*(p,\ u)}\right\}$$

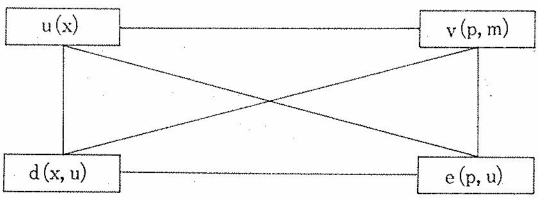
となる．そして，明らかに，

(14) $$v^*\left(\frac{p}{m}\right)=u^\circ \Leftrightarrow d^*(p,\ u^\circ)=m$$

である．したがって，$d^*(p,\ u)=m$ は間接効用関数の陰関数表現である．そして，最適点に関しては，$m=e(p,\ u^\circ)$ であるから，

$$d^*(p,\ u^\circ)=m=e(p,\ u^\circ)$$

である．すなわち，最適点においては，双対基準化関数の値と支出関数の値は一致する．これが，直接効用関数と基準化関数の間の対応に対する間接効用関数と支出関数の間の双対関数である．すなわち，間接効用関数の基準化関数に対応するものが支出関数である．



さらに注意すべき重要な点は，(14)から，d^* が価格に関して1次同次関数であることが導かれることである．すなわち，

$$d^*(\alpha p,\ u)=e(\alpha p,\ u)=\alpha e(p,\ u)=\alpha d^*(p,\ u)$$

となるが，これは e が価格に関する1次同次関数であることによる．このことから，(14)を(9)に対応する形で表現すれば，

$$v^*\left(\frac{p}{m}\right)=u^\circ \Leftrightarrow d^*\left(\frac{p}{m},\ u^\circ\right)=1\left[=e\left(\frac{p}{m},\ u^\circ\right)\right]$$

となる．

6.　4．における双対関係は，次のように幾何学的に説明できる[4)]．(Shephard [10]) 以下は2次元の場合の説明であるが，n 次元の場合も同様になりたつ．

まず定円を定める．定点を通って引いた任意の直線が，定円と交わる点をそれぞれ A, B とするとき，この直線上にあって，

$$\frac{2}{P_1P}=\frac{1}{P_1A}+\frac{1}{P_1B}$$

を満足するような点 P を，2点 A, B に関する調和共役点 (harmonic conjugates) という．このような調和共役点の軌跡は直線である．この直線を，点 P_1 のこの円に関する極線 (polar line) といい，点 P_1 をこの直線の極 (pole) という．

補題1．ある直線の極は，円の中心を通り，与えられた直線と直交する直線上にあり，円の中心からの距離が，円の中心から与えられた直線までの距離の逆数に等しい点である．

一般的に，1つの円に関して，点P_1 の極線 l_1 が他の点 P_2 を通れば，点 P_2 の極線 l_2 は P_1 を通る．このような2点を，この円に関して共役であるという．また，1つの円に関して，1直線 l_1 の極 P_1 が他の直線 l_2 の上にあれば，直線 l_2 の極 P_2 は直線 l_1 上にある．このような2直線を，この円に関して共役であるという．

さて，いま定円として単位円を考える．点 P$(x_1,\ x_2)$ の接線を $\bar{l}_1$ とする．すなわち，

$$l_1:\quad p_1x_1+p_2x_2=d(x,\ u)$$

4)　以下の幾何学的用語は，矢野健太郎，「初等解析幾何学」による．

である．あるいは，ヘッセの標準型で表現すれば（$d(x, u)=1$ を考慮して），

$$\frac{p_1}{\sqrt{p^2+p_2^2}}x_1+\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}x_2=\frac{1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}$$

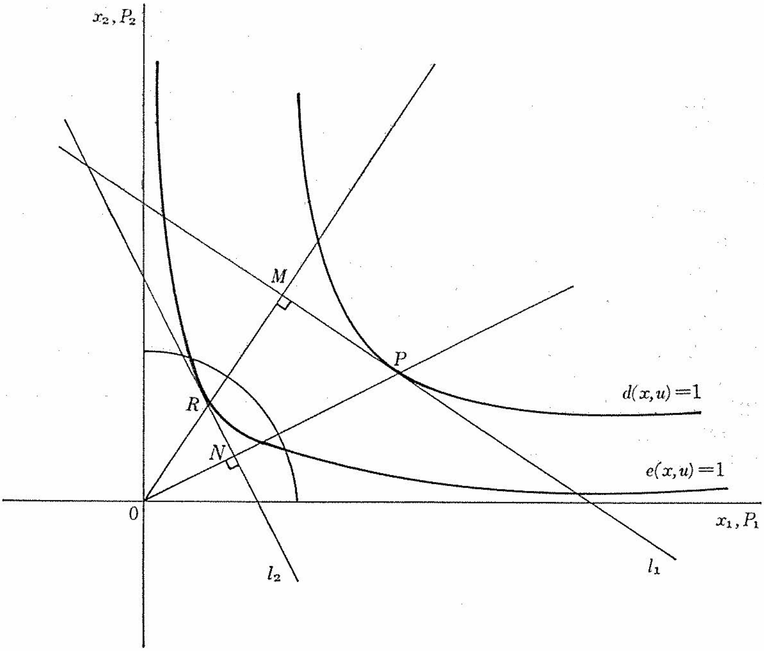
である．したがって，図の $OM=1/\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ である．

他方，$R(p_1, p_2)$ の接線を l_2 とすると，

$$l_2:\ \ p_1x_1+p_2x_2=e(p, u)$$

である．そして，$OR=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ である．したがって，$OM=1/OR$ である．よって，補題1により，R は l_1 の極である．

逆に，ON の方向比は p_1/p_2 であり，$ON=1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ である．そして，$OP=x_1^2+x_2^2$ であるから，補題1により，P は l_2 の極である．そして，P と R は共役であり，l_1 と l_2 も共役である．これが双対関係の幾何学的意味である．



参 考 文 献

[1] A. P. Barten, 'The Systems of Consumer Demand Functions Approaches: A Review', (in "Frontiers of Quantitative Economics, Ⅲ A" ed. by M. D. Intriligator, (North Holland, 1977), Chapter 2a)
[2] C. Blackorby, D. Primont and R. R. Russell, "Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications", (North-Holland, 1978)
[3] A. S. Deaton, 'The Distance Function in Consumer Behavior with Applications to Index Nunbers and Optimal Taxation', (The Review of Economic Studies, 46 (1979), 391-405)
[4] A. Deaton and J. Muellbauer," Economics and Consumer Behavior", (Cambridge University Press, 1980)
[5] W. E. Diewert, 'An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function', (J. Political Economy, 79 (1971), 481-507)
[6] W. E. Diewert, 'Applications of Duality Theory', (in "Frontiers of Quantitative Economics, vol. Ⅱ "eds. by M. D. Intriligator and D. A. Kendrick, (North-Holland, 1974), Chapter 3)
[7] W. E. Diewert, 'Duality Approaches to Microeconomic Theory', (in "Handbooks of Mathematical Economics, vol. Ⅱ" eds. by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, (North-Holland, 1982), Chapter 12)
[8] W. M. Gorman, 'Tricks with Utility Functions', (in "Essays in Economic Analysis" eds. by M. Artis and R. Nobay, (Cambridge University Press, 1976), Chapter 11)
[9] L. J. Lau, 'Complete Systems of Consumer Demand Functions through Duality', (in "Frontiers of Quantitative Economics, Ⅲ A" ed. by M. D. Intriligator, (North-Holland, 1977), Chapter 2b)
[10] R. W. Shephard, "Cost of Production Functions", (Princeton University Press, 1953). Reprinted as "Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 194", (Springer, 1981)
[11] R. W. Shephard, "Theory of Cost and Production Functions", (Princeton University Press, 1970)
[12] H. Theil, "Theory Measurement of Consumer Demand, vol. 1, vol. 2", (North-Holland, 1975, 1976)
[13] 矢野健太郎,「初等解析幾何学」(岩波全書)