

二階正規双曲型方程式の初期値問題

—初等的方法による解の存在証明—

浅倉史興

§ 0.

我々は次の二階正規双曲型方程式の初期値問題を考察する。

$$(0.1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_i \partial_j u + b_0(x, t) \partial_t u \\ \quad + \sum_{j=1}^n b_j(x, t) \partial_j u + c(x, t) u + f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

ここで $\partial_j u = \partial u / \partial x_j$, また係数 $a_{ij}(x, t)$ は $R^n \times [0, T]$ で定義された関数で, (1) $a_{ij} = a_{ij}$, (2) $(x, t) \in R^n \times [0, T]$, $\xi \in R^n$ に対して $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2$ ($\delta > 0$) をみたすものとする。

二階正規双曲型方程式は, 波動方程式

$$\partial_t^2 u = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u + f(x, t)$$

に代表される基本的な双曲型方程式で, 差分法を用いた解の存在証明が (少なくとも本質的な部分は) Courant-Friedrichs-Lewy [1] で与えられていると考えてよいであろう。

二階正規双曲型は Petrovskii の意味で双曲型であり, また未知関数系を適当に定めると Friedrichs の対称双曲系に帰着される。Petrovskii の双曲型方程式は Petrovskii [11], [12], Leray [8], Gårding [4], 溝畑

[9] らにより, また Friedrichs の対称双曲系は Friedrichs [3], Lax [7], John [5], 南雲 [10], 溝畑 [9], 熊ノ郷 [6] らにより種々の方法で解の存在証明が与えられている. このノートでは我々は原初的なエネルギー積分不等式と, Friedrichs の軟化子を用い微分作用素を近似することにより解の存在の初等的証明を与える.

最初に記号と用語をいくつか導入する.

$L^2(R^n) = R^n$ で Lebesgue 2 乗可積分な実数値関数全体.

$L^2(R^n)$ は内積 $(u, v) = \int_{R^n} uv dx$ ($dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$) により Hilbert 空間となる.

$C^l(R^n) = R^n$ で l 回連続的の微分可能な実数値関数全体.

$C_0^l(R^n) = \{u \in C^l(R^n) \mid u \text{ の台がコンパクト}\}$

$|v|_l = \max_{|\alpha| \leq l} (\sup_{x \in R^n} |\partial^\alpha u(x)|)$ (α は多重指数).

$B^l(R^n) = \{u \in C^l(R^n) \mid |u|_l < \infty\}$

$B^l(R^n)$ はノルム $|u|_l$ により Banach 空間となる.

定義 0.1. $u, v_j \in L^2(R^n)$ について

$$\int_{R^n} u \partial_j \varphi dx = - \int_{R^n} v_j \varphi dx$$

が任意の $\varphi \in C_0^1(R^n)$ に対して成りたつとき, u は弱微分可能であるといひ $v_j = \partial_j u$ と表わす. u が連続的の微分可能であれば弱微分可能である.

$H^l(R^n) = \{u \in L^2(R^n) \mid u \text{ は } l \text{ 回弱微分可能で } |\alpha| \leq l \text{ について } \partial^\alpha u \in L^2(R^n)\}$.

$H^l(R^n)$ は $(u, v)_l = \sum_{|\alpha| \leq l} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)$ により Hilbert 空間となる.

$j(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\text{supp } j \subset \{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}$, $j(x) \geq 0$, $\int_{R^n} j(x) dx = 1$ をみたま偶関数 $j(x)$ をひとつ選び $j_\delta(x) = \delta^{-n} j(x/\delta)$ と表わすことにする. $u \in L^2(R^n)$ に対し Friedrichs の軟化子 J_δ を

$$J_\delta u = \int_{R^n} j_\delta(x-y) u(y) dy$$

と定義する. J_δ は次の性質をもつ.

命題 0.2.

- (1) $J_\delta u \in C^\infty(R^n)$ で $\|J_\delta u\| \leq \|u\|$,
- (2) $u \in H^l(R^n)$ に対して $\delta \rightarrow 0$ のとき $\|\delta^\alpha (J_\delta u - u)\| \rightarrow 0$ ($|\alpha| \leq l$).
- (3) $u \in H^1(R^n)$ ならば $\partial_j J_\delta u = J_\delta \partial_j u$.

証明は溝畑 [9], 南雲 [10] をみよ.

命題 0.3. (K. O. Friedrichs)

$a \in B^l(R^n)$, $u \in H^l(R^n)$ に対して

- (1) $\|\delta^\alpha [J_\delta, a \partial_j] u\| \leq C \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \|\delta^\beta u\|$,
- (2) $\delta \rightarrow 0$ のとき $\|\delta^\alpha [J_\delta, a \partial_j] u\| \rightarrow 0$ ($|\alpha| \leq l$),

となる. ここで $[X, Y] = XY - YX$ (交換子) とする.

証明は溝畑 [9], 南雲 [10] をみよ.

更に関数 $u(x, t)$ について各 t を固定したとき x の関数として $B^l(R^n)$ (または $H^l(R^n)$) に属し, 対応 $t \rightarrow u(x, t)$ が m 回連続的の微分可能であるとき $u \in C_t^m(B(R^n))$ (または $C_t^m(H^l(R^n))$) と表わすことにする.

以後, 方程式の係数に以下の仮定をおき議論を進める.

仮定 0.4.

- (1) a_{ij}, b_j, c は $(x, t) \in R^n \times [0, T]$ で定義された実数値関数で $a_{ij}, b_j, c \in C_t^1(B^2(R^n))$.
- (2) $a_{ij} = a_{ji}$.
- (3) $(x, t) \in R^n \times [0, T]$, $\xi \in R^n$ について

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2 \quad (\delta > 0).$$

§ 1.

この節では微分作用素 ∂_j の近似作用素 δ_j を考察する.

定義 1.1. $u \in L^2(R^n)$ に対して

$$\delta_k u = \partial_k J_\delta u = \int_{R^n} \partial_k j_\delta(x-y) u(y) dy$$

と定義する. この作用素は Taylor [13] による. ここでは δ_k を擬微分作用素として扱っている. δ_k は次の性質をもつ. 以下, 作用素の δ と軟化子のパラメーター δ とを混用する.

命題 1.2.

- (1) δ_k は $L^2(R^n)$ の有界作用素である.
- (2) $u \in H^1(R^n)$ に対して $\delta_k u = J_\delta \partial_k u$.
- (3) $u \in H^1(R^n)$ に対して $\|\delta_k u\| \leq \|\partial_k u\|$.

証明. (1)は $\int_{R^n} |\partial_k j_\delta(x)| dx < \infty$ であることよりあきらか. (2), (3)は命題 0.2. よりあきらか.

命題 1.3. (部分積分法).

$$(\delta_k u, v) = -(u, \delta_k v).$$

証明.

$$(\delta_k u, v) = \int_{R^n} v(x) \int_{R^n} \partial_k j_\delta(x-y) u(y) dy dx$$

Fubini の定理より

$$\begin{aligned} &= \int_{R^n} u(y) \int_{R^n} \partial_k j_\delta(x-y) v(x) dx dy \\ &= - \int_{R^n} u(y) \int_{R^n} \partial_k j_\delta(y-x) v(x) dx dy \\ &= -(u, \delta_k v). \end{aligned}$$

命題 1.4. (積の微分法)

$a \in B^1(R^n)$, $u \in H^1(R^n)$ とする.

このとき, $L^2(R^n)$ の有界作用素 a'_k が存在して

$$(1) \quad \delta_k(au) = a\delta_k u + a'_k(u),$$

$$(2) \quad \|a'_k(u)\| \leq K|a|_1 \|u\| \quad (K \text{ は } a, \delta \text{ には依存しない}) \text{ が成り立つ.}$$

証明).

$$\begin{aligned} \delta_k(au) &= \int_{R^n} \partial_k j_\delta(x-y) a(y) u(y) dy \\ &= a(x) \int_{R^n} \partial_k j_\delta(x-y) u(y) dy \\ &\quad - \int_{R^n} \partial_k j_\delta(x-y) \{a(x) - a(y)\} u(y) dy. \end{aligned}$$

よって

$$a'_k(u) = - \int_{R^n} \partial_k j_\delta(x-y) \{a(x) - a(y)\} u(y) dy$$

と定義すると(1)が成り立つ. また

$$\begin{aligned} &|\partial_k j_\delta(x-y) \{a(x) - a(y)\}| \\ &\leq |a|_1 |x-y| |\partial_k j_\delta(x-y)|, \end{aligned}$$

$$\int_{R^n} |x| |\partial_k j_\delta(x)| dx = K \quad (\delta \text{ には依存しない})$$

であるから(2)が成り立つことがわかる.

命題 1.5. δ により添字づけられた関数族 $\{u^{(\delta)}\}$ が

$$(1) \quad \|u^{(\delta)}\| \leq L_0,$$

$$(2) \quad \max_j \|\delta_j u^{(\delta)}\| \leq L_1 \quad (L_0, L_1 \text{ は } \delta \text{ に依存しない})$$

をみたすとする. このとき, ある $u \in H^1(R^n)$ が存在して, $u^{(\delta)}$ の適当な部分列をとれば $u^{(\delta)} \rightarrow u$, $\delta_j u^{(\delta)} \rightarrow \delta_j u$ ($L^2(R^n)$ の弱収束) となるようにできる.

証明). $\|u^{(\delta)}\|$, $\|\delta_j u^{(\delta)}\|$ が一様有界であるから, 対角線論法によりある

二階正規双曲型方程式の初期値問題

$v, u_j \in L^2(R^n)$ が存在して, $u^{(k)}$ の適当な部分列をとれば

$$u^{(k)} \rightarrow u, \quad \delta_j u^{(k)} \rightarrow u_j \quad (L^2(R^n) \text{ の弱収束})$$

とできる. 一方, $\varphi \in C_0^1(R^n)$ に対して

$(\delta_j u^{(k)}, \varphi) = -(u^{(k)}, J_j(\delta_j \varphi))$ であるから, 両辺の極限をとれば $(u_j, \varphi) = -(u, \delta_j \varphi)$ が成りたつことがわかる. 故に $u_j = \delta_j u \in L^2(R^n)$ となり $u \in H^1(R^n)$ であることがわかる.

§ 2.

初期値問題 (0. 1) において, ∂_j を δ_j におきかえた問題

$$(2.1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \delta_i \delta_j u + b_0(x, t) \partial_t u \\ \quad \quad \quad + \sum_{j=1}^n b_j(x, t) \delta_j u + c(x, t) u + f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

を考察する.

定理 2. 1.

$u_0(x), u_1(x) \in H^2(R^n) \cap B^2(R^n)$, $f(x, t) \in C_t^2(H^2(R^n) \cap B^2(R^n))$ とするとき, (2. 1) の解 $u^{(k)}(x, t)$ で $u^{(k)} \in C_t^2(H^2(R^n) \cap B^2(R^n))$ となるものが存在する.

証明). δ_j は Banach 空間 $H^2(R^n) \cap B^2(R^n)$ の有界作用素であるから, (2. 1) は Banach 空間に値をとる関数の常微分方程式と考えられる. 故に, Picard の逐次近似法により求める解が得られる.

§ 3.

方程式の解 $u \in C_t^0(H^2(R^n)) \cap C_t^1(H^1(R^n)) \cap C_t^2(L^2(R^n))$ に対して, エネルギー積分をつぎのように定義する.

$$(3.1) \quad E_0(u(t)) = \int_{R^n} (\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u \partial_j u + u^2 dx$$

$$(3.2) \quad E_1(u(t)) = E_0(u(t)) + \sum_{k=1}^n E_0(\partial_k u(t)) \\ = E_0(u(t)) + \tilde{E}_1(u(t)).$$

次の定理は古典的である。証明は Courant-Hilbert [2] を参照のこと。そこでは滑らかな解について不等式が証明されているが、定理の仮定の下で成りたつことは容易にわかる。

定理 3.1. (エネルギー積分不等式)

$$u \in C_i^0(H^2(R^n)) \cap C_i^1(H^1(R^n)) \cap C_i^2(L^2(R^n))$$

を初期値問題 (0.1) の解とすると

$$(3.3) \quad E_0(u(t)) \leq e^{\gamma_0 t} E_0(u(0)) + C_0 \int_0^t e^{\gamma_0(t-s)} \|f(s)\|^2 ds$$

が成りたつ。更に $f(x, t) \in C_i^0(H^1(R^n)) \cap C_i^1(L^2(R^n))$ とすると

$$(3.4) \quad E_1(u(t)) \leq e^{\gamma_1 t} E_1(u(0)) + C_1 \int_0^t e^{\gamma_1(t-s)} (\|f(s)\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\partial_k f(s)\|^2) ds$$

が成りたつ ($C_0, C_1, \gamma_0, \gamma_1$ は正定数)。

§ 2 で得た (2.1) の解 $u^{(0)}$ に対し (3.1), (3.2) に習い次のような積分を定義する。

$$(3.5) \quad E_0^{(0)}(u(t)) = \int_{R^n} (\partial_t u^{(0)})^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u^{(0)} \partial_j u^{(0)} + (u^{(0)})^2 dx$$

$$(3.6) \quad E_1^{(0)}(u(t)) = E_0^{(0)}(u(t)) + \sum_{k=1}^n E_0^{(0)}(\partial_k u^{(0)}) \\ = E_0^{(0)}(u(t)) + \tilde{E}_1^{(0)}(u(t)).$$

次の定理は以下の考察で決定的である。

定理 3.2.

$u^{(0)} \in C_i^2(H^2(R^n)) \cap B^2(R^n)$ を (2.1) の解とすると

二階正規双曲型方程式の初期値問題

$$(3.6) \quad E_0^{(s)}(u(t)) \leq e^{\tau_0 t} E_0^{(s)}(u(0)) + C_0 \int_0^t e^{\tau_0(t-s)} \|f(s)\|^2 ds$$

$$(3.7) \quad E_1^{(s)}(u(t)) \leq e^{\tau_1 t} E_1^{(s)}(u(0)) + C_1 \int_0^t e^{\tau_1(t-s)} (\|f(s)\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\partial_k f(s)\|^2) ds$$

が成り立つ。

証明). 簡単のため $u^{(s)} = u$ と表わす。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_0^{(s)}(u(t)) &= 2 \int_{R^n} \partial_i u \partial_i^2 u + \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i u \partial_j \partial_i u \\ &\quad + u \partial_t u + \sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_i u \partial_j u dx \\ &= 2 \int_{R^n} \partial_i u \{ \partial_i^2 u - \sum_{i,j} \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + u \} \\ &\quad + \sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_i u \partial_j u dx \quad (\text{命題 1.3 を用いた}) \\ &= 2 \int_{R^n} \partial_i u \{ \partial_i^2 u - \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u - \sum_{i,j} a'_{ij} (\partial_i u) + u \} \\ &\quad + \sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_i u \partial_j u dx \quad (a'_{ij} \text{ は命題 1.4 の作用素}) \\ &= 2 \int_{R^n} \partial_i u \{ b_0 \partial_i u + \sum_j b_j \partial_j u + \sum_{i,j} a'_{ij} (\partial_i u) \\ &\quad + (C+1)u + f \} + \sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_i u \partial_j u dx \\ &\leq C \int_{R^n} |\partial_i u|^2 + \sum_j |\partial_j u| |\partial_i u| \\ &\quad + \sum_{i,j} |a'_{ij} (\partial_i u)| |\partial_i u| + |\partial_i u| |u| + |\partial_i u| |f| dx \end{aligned}$$

Schwarz の不等式を用い, また $\|a'_{ij} (\partial_i u)\| \leq K |a'_{ij}| \|\partial_i u\|$ であることより

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{R^n} |\partial_i u|^2 + \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 + |u|^2 + |f|^2 dx \\ &\leq \tau_0 E_0^{(s)}(u(t)) + C_0 \|f(t)\|^2 \text{ となる.} \end{aligned}$$

これは

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt} \{ e^{-\tau_0 t} E_0^{(s)}(u(t)) \} \leq C_0 e^{-\tau_0 t} \|f(t)\|^2$$

となるから, (3.8) を 0 から t まで積分すると (3.6) が得られる.

(3.7) については (2.1) の両辺を ∂_k で微分すると

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \partial_i^2(\partial_k u) &= \sum_{i,j} a_i \partial_i \partial_j (\partial_k u) + b_0 \partial_i (\partial_k u) \\
 &+ \sum_j b_j \partial_j (\partial_k u) + c(\partial_k u) + \partial_k f \\
 &+ \sum_{i,j} \partial_k a_{ij} \partial_i \partial_j u + \partial_k b_0 \partial_i u + \sum_j \partial_k b_j \partial_j u + \partial_k c u.
 \end{aligned}$$

前と同様に

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tilde{E}^{(3)}(u(t)) &= 2 \sum_k \int_{R^n} \partial_i^2 \partial_k u \partial_i \partial_k u \\
 &+ \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_k u \partial_j \partial_k u + \partial_k u \partial_i \partial_k u dx \\
 &= 2 \sum_k \int_{R^n} \partial_i \partial_k u \{ \partial_i^2 \partial_k u - \sum_{i,j} \partial_i (a_{ij} \partial_j \partial_k u) + \partial_k u \} dx \\
 &= 2 \sum_k \int_{R^n} \partial_i \partial_k u \{ \partial_i^2 \partial_k u - \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j (\partial_k u) \\
 &+ \partial_k u - \sum_{i,j} a'_{ij} (\partial_i \partial_k u) \} dx
 \end{aligned}$$

(3.9) を代入して, 更に Schwarz の不等式を用いて整理すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tilde{E}_1^{(3)}(u(t)) &\leq C \sum_k \int_{R^n} |\partial_i \partial_k u|^2 + \sum_j |\partial_j \partial_k u|^2 + |\partial_k u|^2 \\
 &+ |\partial_i \partial_j u|^2 + |\partial_k f|^2 + \sum_j |\partial_j u|^2 + |\partial_i u|^2 + |u|^2 dx \text{ を得る.}
 \end{aligned}$$

$\|\partial_i \partial_j u\| \leq \|\partial_i \partial_j u\|$ であるから

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} \tilde{E}_1^{(3)}(u(t)) \leq \gamma' \tilde{E}_1^{(3)}(u(t)) + C' E_0^{(3)}(u(t)) + C' \sum_k \|\partial_k f(t)\|^2$$

となる.

(3.10) と (3.8) より

$$(3.11) \quad \frac{d}{dt} E_1^{(3)}(u(t)) \leq \gamma_1 E_1^{(3)}(u(t)) + C_1 \|f(t)\|^2 + C_1 \sum_k \|\partial_k f(t)\|^2$$

を得 (3.8) のように考えると (3.7) を得る.

仮定 0.4(3) よりエネルギー積分 $E_0^{(3)}(u(t))$ は

$$\|\partial_t u(t)\|^2 + \sum_j \|\partial_j u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2$$

と同値であるから次の定理が成りたつ.

定理 3.3. $u^{(3)}$ を (2.1) の解とすると

$$\begin{aligned} (3.12) \quad & \|\partial_t^2 u^{(3)}(t)\|^2 + \sum_{j,k} \|\partial_j \partial_k u^{(3)}(t)\|^2 + \sum_k \|\partial_t \partial_k u(t)\|^2 \\ & + \|\partial_t u^{(3)}(t)\|^2 + \sum_k \|\partial_k u^{(3)}(t)\|^2 + \|u^{(3)}(t)\|^2 \\ & \leq C(t) (\sum_k \|\partial_k u_1\|^2 + \|u_1\|^2 + \sum_{j,k} \|\partial_j \partial_k u_0\|^2 \\ & + \sum_k \|\partial_k u_0\|^2 + \|u_0\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 + \sum_k \|\partial_k f(s)\|^2 ds) \\ & = C(t) (\|u_1\|_1^2 + \|u_0\|_2^2 + \int_0^t \|f(s)\|_1^2 ds). \end{aligned}$$

(証明). $\partial_j \partial_k u$, $\partial_t \partial_k u$, $\partial_t u$, $\partial_k u$, u については定義よりあきらか. また $u^{(3)}$ が (2.1) の解であることより $\partial_t^2 u^{(3)}$ は他の微分で評価される.

更に $\|u\|_T^2 = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$ と表わすことにすると, (3.12) を 0 から T まで積分することにより

定理 3.4. $u^{(3)}$ を (2.1) の解とするとき

$$\begin{aligned} (3.13) \quad & \|\partial_t^2 u^{(3)}\|_T^2 + \sum_{j,k} \|\partial_j \partial_k u^{(3)}\|_T^2 + \sum_k \|\partial_t \partial_k u^{(3)}\|_T^2 \\ & + \|\partial_t u^{(3)}\|_T^2 + \sum_k \|\partial_k u^{(3)}\|_T^2 + \|u^{(3)}\|_T^2 \\ & \leq TC(T) (\|u_1\|_1^2 + \|u_0\|_2^2 + \|f\|_{1,T}^2). \end{aligned}$$

を得る. 更に

定理 3.5. $u^{(3)}$ を (2.1) の解とするとき

$$\begin{aligned} (3.14) \quad & \|u^{(3)}(t_1) - u^{(3)}(t_2)\|^2 + \|\partial_t u^{(3)}(t_1) - \partial_t u^{(3)}(t_2)\|^2 \\ & + \sum_{k=1}^n \|\partial_k u(t_1) - \partial_k u(t_2)\|^2 \leq L |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

二階正規双曲型方程式の初期値問題

ここで L は $\|u_1\|_1, \|u_0\|_2, \|f\|_{1,T}$ に依存する.

証明).

$$|u^{(s)}(x, t_1) - u^{(s)}(x, t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\partial_t u^{(s)}(x, s)| ds$$

であるから, 両辺を 2 乗して x について積分すれば

$$\|u^{(s)}(t_1) - u^{(s)}(t_2)\|^2 \leq |t_1 - t_2| \|\partial_t u^{(s)}\|_2^2$$

を得る. $\partial_t u, \partial_x u$ も同様に評価され, 定理 3.4 により L は $\|u_0\|_2, \|u_1\|_1, \|f\|_{1,T}$ に依存することがわかる.

§ 4.

前節までの結果を用い, 我々は次の存在定理を証明することができる.

定理 4.1. (解の存在)

初期値問題 (0. 1) において, $u_0 \in H^2(R^n), u_1 \in H^1(R^n), f(x, t) \in C_0^\infty(H^1(R^n))$ とするとき, 解 u で $u \in C_0^\infty(H^2(R^n)) \cap C_1^\infty(H^1(R^n)) \cap C_2^\infty(L^2(R^n))$ となるものが一意的に存在する.

証明). エネルギー積分不等式 (3.3) より初期値問題の解が一意的であることはあきらかである.

定理 3.4 と命題 1.5 よりある $u \in H^2(R^n \times [0, T])$ が存在して $u^{(s)}$ の適当な部分列をとれば $u^{(s)} \rightarrow u$ ($H^2(R^n \times [0, T])$ の弱収束) となる. 更に, $\{t_j\}$ を $[0, T]$ の有理数全体とすると, 定理 3.3 と命題 1.5 により対角線論法を用いれば, 各 t_j について $u^{(s)}(x, t_j) \rightarrow u(x, t_j)$ ($H^2(R^n)$ の弱収束) と考えてよい.

定理 3.5 と弱位相によるノルムの下半連続性により

$$\begin{aligned} & \|u(t_j) - u(t_k)\|^2 + \|\partial_t u(t_j) - \partial_t u(t_k)\|^2 \\ & + \sum_i \|\partial_i u(t_j) - \partial_i u(t_k)\|^2 \end{aligned}$$

二階正規双曲型方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{ \|u^{(\delta)}(t_j) - u^{(\delta)}(t_k)\|^2 + \|\partial_i u^{(\delta)}(t_j) - \partial_i u^{(\delta)}(t_k)\|^2 \\ &\quad + \sum_i \|\partial_i u^{(\delta)}(t_j) - \partial_i u^{(\delta)}(t_k)\|^2 \} \\ &\leq L |t_j - t_k| \end{aligned}$$

を得る. 従って $R^n \times [0, T]$ の測度 0 の集合の上で $u(x, t)$ の値を修正すると $u(x, t) \in H^2(R^n \times [0, T]) \cap C_i^0(H^1(R^n)) \cap C_i^1(L^2(R^n))$ と考えてよい. $\delta \rightarrow 0$ のとき $\delta_j u^{(\delta)} \rightarrow \delta_j u$ であるから $u(x, t)$ は $H^2(R^n \times [0, T])$ において方程式

$$\partial_i^2 u = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + b_0 \partial_i u + \sum_j b_j \partial_j u + cu + f$$

をみたしていることがわかる. この両辺に軟化子 J_ϵ を作用させると

$$\begin{aligned} \partial_i^2 (J_\epsilon u) &= \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j (J_\epsilon u) + b_0 \partial_i (J_\epsilon u) \\ &\quad + \sum_j b_j \partial_j (J_\epsilon u) + c (J_\epsilon u) + J_\epsilon f \\ &\quad + \sum_{i,j} [J_\epsilon, a_{ij} \partial_i] \partial_j u + [J_\epsilon, b_0] \partial_i u \\ &\quad + \sum_j [J_\epsilon, b_j \partial_j] u + [J_\epsilon, c] u \end{aligned}$$

を得る.

$$\begin{aligned} g_\epsilon &= \sum_{i,j} [J_\epsilon, a_{ij} \partial_i] \partial_j u + [J_\epsilon, b_0] \partial_i u \\ &\quad + \sum_j [J_\epsilon, b_j \partial_j] u + [J_\epsilon, c] u \end{aligned}$$

とすると $a. e. t$ について

$$\begin{aligned} \|g_\epsilon(t)\|^2 + \sum_k \|\partial_k g_\epsilon(t)\|^2 \\ &\leq C \left(\sum_{i,j} \|\partial_i \partial_j u(t)\|^2 + \sum_j \|\partial_i \partial_j u(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_j \|\partial_j u(t)\|^2 + \|\partial_i u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. 定理 3.4 によりこの右辺は t について可積分であり, また命題 0.3 より $a. e. t$ について $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\|g_\epsilon(t)\| + \sum_k \|\partial_k g_\epsilon(t)\|^2) = 0$ が成り立つ. 従って Lebesgue の収束定理により

二階正規双曲型方程式の初期値問題

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|g_\epsilon(t)\|^2 + \sum_k \|\partial_k g_\epsilon(t)\|^2 dt = 0$$

を得る. さて $u_{\epsilon_1 \epsilon_2} = u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}$ とおくと

$$u_{\epsilon_1 \epsilon_2} \in C_i^0(H^2(R^n)) \cap C_i^1(H^1(R^n)) \cap C_i^2(L^2(R^n))$$

となり, 方程式

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_{\epsilon_1 \epsilon_2} &= \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u_{\epsilon_1 \epsilon_2} + b_0 \partial_t u_{\epsilon_1 \epsilon_2} \\ &\quad + \sum_k b_k \partial_k u_{\epsilon_1 \epsilon_2} + c u_{\epsilon_1 \epsilon_2} + J_{\epsilon_1} f - J_{\epsilon_2} f + g_{\epsilon_1} - g_{\epsilon_2} \end{aligned}$$

をみます. 従って定理 3.1 のエネルギー積分不等式により

$$\begin{aligned} &\|\partial_t^2 u_{\epsilon_1 \epsilon_2}(t)\|^2 + \sum_{i,j} \|\partial_i \partial_j u_{\epsilon_1 \epsilon_2}(t)\|^2 \\ &\quad + \sum_k \|\partial_k \partial_t u_{\epsilon_1 \epsilon_2}(t)\|^2 + \|\partial_t u_{\epsilon_1 \epsilon_2}(t)\|^2 \\ &\quad + \sum_k \|\partial_k u_{\epsilon_1 \epsilon_2}(t)\|^2 + \|u_{\epsilon_1 \epsilon_2}(t)\|^2 \\ &\leq C_T \{ \|J_{\epsilon_1} u_1 - J_{\epsilon_2} u_1\|_1^2 + \|J_{\epsilon_1} u_0 - J_{\epsilon_2} u_0\|_2^2 \\ &\quad + \int_0^T \|J_{\epsilon_1} f(t) - J_{\epsilon_2} f(t)\|_2^2 dt \\ &\quad + \int_0^T \|g_{\epsilon_1}(t) - g_{\epsilon_2}(t)\|_2^2 dt \} \end{aligned}$$

を得る. この右辺は $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ のとき 0 に収束するから, u_ϵ は $C_i^0(H^2(R^n)) \cap C_i^1(H^1(R^n)) \cap C_i^2(L^2(R^n))$ において Cauchy 列をつくることがわかる.

故に $u \in C_i^0(H^2(R^n)) \cap C_i^1(H^1(R^n)) \cap C_i^2(L^2(R^n))$ を得る.

一般の初期値については, u_0, u_1 を $H^2(R^n) \cap B^2(R^n)$ の関数で近似して解いた解を u_ϵ とするとき, 上と同様にしてエネルギー積分不等式へ代入すると, u_ϵ は $C_i^0(H^2(R^n)) \cap C_i^1(H^1(R^n)) \cap C_i^2(L^2(R^n))$ の Cauchy 列をつくることがわかる. 以上により定理 4.1 が証明された.

注意 4.2. 方程式の係数が 3 階以上連続的の微分可能のときは, 定理 4.1 の証明の後半の議論は必要ない.

二階正規双曲型方程式の初期値問題

$$E_2(u(t)) = E_0(u(t)) + E_1(u(t)) + \sum_{i,j} E_0(\partial_i \partial_j u(t))$$

について定理 3.1, 3.2, 3.3 を証明すれば $u^{(n)}$ の極限が

$$C_1^2(H^2(R^n)) \cap C^1(H^1(R^n)) \cap C_1^2(L^2(R^n))$$

に属することが直接に証明される。

参 考 文 献

- [1] R. Courant, K. O. Friedrichs and H. Lewy, Math. Ann. Vol 100 (1928~1929) P. 32~74. (この論文の英語訳が, IBM Journal, (1967) P. 215~234 に掲載されている.)
- [2] R. Courant-D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol 2, Interscience Pub. (1962).
- [3] K. O. Friedrichs, Comm. Pure Appl. Math. Vol 7 (1954) P. 345~392.
- [4] L. Gårding, Coll. Int. CNRS, Nancy (1956) P 71~90.
- [5] F. John, Lectures on advanced Numerical Analysis, Gordon and Beach (1967).
- [6] 熊ノ郷準, 擬微分作用素, 岩波書店 (1974).
- [7] P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. Vol 8 (1955) P. 615~633.
- [8] J. Leray, Hyperbolic Differential Equations, Inst. Advanced Study, Princeton (1952).
- [9] 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店 (1965).
- [10] 南雲道夫, 近代的偏微分方程式論, 共立出版 (1957).
- [11] I. G. Petrovskii, Mat. Sbornik, 44 (1937) P. 815~868.
- [12] I. G. Petrovskii, Bull. Univ. Moscou, Sér. Int., Sect. A, Vol 1 (1938).
- [13] M. E. Taylor, Pseudodifferential Operators, Princeton Univ. Press (1981).