Title	二項確立過程とランチェスター法則について
Author	藤井 輝明
Citation	季刊経済研究, 25 巻 2 号, p.43-52.
Issue Date	2002-09
ISSN	0387-1789
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	Publisher
Publisher	大阪市立大学経済研究会
Description	
DOI	

大阪市大『季刊経済研究』 ISSN 0387-1789
Vol. 25 No. 2 September 2002, pp. 43-52

二項確率過程とランチェスター法則について

藤　井　輝　明

1．はじめに

いわゆるランチェスターの法則は本来集団戦を取り扱ったものであるが，経営戦略や生物資源管理に応用され，また，微分方程式の具体的な形としても取り上げられることの多いものである．

同時にそれが直接には確率的基礎に基づいていないこともすでに知られている．このため，その基本的な関数型の特定化は，応用には制約があるのではないかとの疑問が上がることになる．そもそもの対象であった戦力の交換の議論においても，時間あたりの我の損耗が彼の兵力に比例するという前提から，なぜ損耗率でなく絶対量なのか，それが絶対量や戦力比にかかわらず時間について一定であるという仮定はどこまで頑健なのかは，明らかではない．

以下では，損耗の交換の確率計算から式を示し，ランチェスター方程式との異同を示す．決定式であるランチェスター方程式は，確率式の平均と比較される．簡単なシミュレーションの結果からその結果を要約する．

2．交差交換関係にある変数の二項確率過程

二変量が互いに相手に損耗を与える関係（単純に戦闘と呼ぼう）にあるものとする．仮にそれぞれを赤軍，青軍とし，それぞれの大きさを m，n とおく．

赤軍に対する青軍1単位による個別の攻撃成功確率を p_a，逆に，青軍に対する赤軍1単位による個別の攻撃成功確率を p_b とおく．

この時任意の赤軍1単位が任意の青軍1単位の攻撃対象になっている確率は $1/m$ である．従って赤軍1単位がある青軍によって倒される個別確率は p_a/m，生存確率は $1-p_a/m$ である．

〔キーワード〕 二項確率モデル，ランチェスター法則，オペレーションズ・リサーチ（OR），
二項確率過程

すべての青軍の攻撃を生き残るためには n 回の攻撃を生き延びなければならないから，1戦闘での生存確率は $(1-p_a/m)^n$，被弾する確率は $1-(1-p_a/m)^n$ である．

赤軍 a 単位が被弾する確率は

$$(2.1\text{a})\qquad {}_mC_a(1-(1-p_a/m)^n)^a(1-p_a/m)^{n(m-a)}$$

青軍 b 単位が被弾する確率も同様に考えて，

$$(2.1\text{b})\qquad {}_nC_b(1-(1-p_b/n)^m)^b(1-p_b/n)^{m(n-b)}$$

となる．

一般に被弾率をそれぞれ

$$(2.2\text{a})\qquad P=1-(1-p_a/m)^n \quad \text{赤軍}$$

$$(2.2\text{b})\qquad P=1-(1-p_b/n)^m \quad \text{青軍}$$

とおき，生存率 $q=1-P$ とおいたときの二項確率分布

$$(2.3\text{a})\qquad {}_mC_aP^aq^{(m-a)}$$

$$(2.3\text{b})\qquad {}_nC_bP^bq^{(n-b)}$$

に他ならない．平均 $\mathrm{E}(a)$ および $\mathrm{E}(b)$ は

$$(2.4\text{a})\qquad \mathrm{E}(a)=mP=m(1-(1-p_a/m)^n)$$

$$(2.4\text{b})\qquad \mathrm{E}(b)=nP=n(1-(1-p_b/n)^m)$$

である．

あるいは，これを変形して，間を補完すれば連続的に，

$$(2.5\text{a})\qquad \mathrm{E}(a)=m(1-\exp(-\frac{n}{m}p_a)$$

$$(2.5\text{b})\qquad \mathrm{E}(b)=n(1-\exp(-\frac{m}{n}p_b)$$

と書ける．

これを変形すると，

$$(2.6\text{a})\qquad \frac{\mathrm{E}(a)}{m}=1-\exp(-\frac{n}{m}p_a)$$

$$(2.6\text{b})\qquad \frac{\mathrm{E}(b)}{n}=1-\exp(-\frac{m}{n}p_b)$$

となる．すなわち，平均損耗率は敵の我に対する戦力比と命中率の積により決まる．

しかしながら以上のいずれの式からも直ちにランチェスター式を導くことはできない．

ランチェスター二次法則は時間にかんする変化で表して，

(2,7a) $$\frac{dm}{dt} = -\alpha n$$

(2.7b) $$\frac{dn}{dt} = -\beta m$$

と書ける．これは我々の確率式における平均の時間変化と考えればよいから，個別確率と時間についての何らかの仮定をおけば，対比すべき式を導くことはできるかもしれない．

しかし今は確率モデルの利用可能性の検討に課題を置き，以下では次のことを確認しよう．

第一に，損耗の交換条件についてである．

ここで簡単に確認できるのは，兵力の劣性を補うには単にその比の逆数倍命中率が優れているだけでは足りず，その比の二乗の逆数が必要であることである．

$n/m = k$ なる関係があるとき，$n = mk$ と書けるので，

(2.8) $$m/n = 1/k$$

両軍の損耗率が等しくなる $p_a = lp_b$ なる l が存在すると，(2.8) 式に代入して

(2.9) $$n/mp_a = m/np_b$$

から

(2.10) $$klp_b = 1/kp_b$$

と変形して，

(2.11) $$l = 1/k^2$$

となる．

この結果は交換比にかかわるランチェスター二乗法則と対比できる．

赤軍 x，青軍 y，その初期値をそれぞれ x_0，y_0 とおくと，ランチェスター二乗則では

(2.12) $$x - Ey^2 = x_0^2 - Ey_0^2$$

が成り立つ，ここでEは交換比と呼ばれるもので，時間にかんする微分方程式の係数の比で

(2.13) $$E = \alpha/\beta$$

で定義される．α が赤軍 x にかかる損耗係数だから，青軍の赤軍に対する相対的強さと見なすことができる．

(2.14) $$E = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2$$

のとき，(2.12) に代入すると

(2.15) $$x^2 = Ey^2,$$

ここからさらに

$$(2.16)\qquad \left(\frac{x}{x_0}\right)^2=\left(\frac{y}{y_0}\right)^2$$

となり，すなわち，この時には残り兵力 x，y の初期値に対する比が等しいから，損耗率は等しくなければならない．

これが示すのは，両軍の損耗率が等しくなるような特定の条件下では，ランチェスター2次法則は我々の確率モデルの平均的な結果に等しいということである．

このとき，我々のモデルの，個別命中確率の比 p_a/p_b は，ランチェスター式の交換比Eに対応する．

それではこの対応関係から示唆される，二項確率モデルとランチェスター式との近似はどの範囲で有効なのだろうか？それを探るために，パラメータを変えながらいくつかのシミュレーションを試みた．次節ではその結果を見てみよう．

表3.1　二項確率モデルとランチェスターモデル（交換比 3 の場合）

t	x	y	E(a)	E(b)	dx/y	dy/x	E^*	dx/x	dy/y	dx	dy	x^*	y^*	$(x\text{-}x^*)/x$
0	1000	1000	44.00	14.89	0.044	0.015	2.96	0.044	0.015	45.00	15.00			
1	956	985	43.32	14.24	0.044	0.015	2.95	0.045	0.014	44.33	14.33	955.0	985.0	0.1%
2	913	971	42.66	13.59	0.044	0.015	2.95	0.047	0.014	43.69	13.68	911.7	970.8	0.1%
3	870	957	42.03	12.96	0.044	0.015	2.95	0.048	0.014	43.07	13.03	869.0	957.2	0.1%
4	828	944	41.42	12.34	0.044	0.015	2.94	0.050	0.013	42.49	12.40	826.9	944.2	0.1%
5	787	932	40.84	11.72	0.044	0.015	2.94	0.052	0.013	41.94	11.78	785.5	931.9	0.1%
6	746	920	40.28	11.12	0.044	0.015	2.94	0.054	0.012	41.41	11.17	744.6	920.2	0.1%
7	705	909	39.75	10.52	0.044	0.015	2.93	0.056	0.012	40.91	10.56	704.3	909.1	0.2%
8	666	899	39.24	9.93	0.044	0.015	2.93	0.059	0.011	40.44	9.97	664.5	898.6	0.2%
9	626	889	38.74	9.35	0.044	0.015	2.92	0.062	0.011	39.99	9.38	625.3	888.7	0.2%
10	588	879	38.27	8.77	0.044	0.015	2.92	0.065	0.010	39.57	8.80	586.5	879.3	0.2%
11	549	871	37.81	8.20	0.043	0.015	2.91	0.069	0.009	39.17	8.22	548.1	870.5	0.2%
12	512	862	37.37	7.64	0.043	0.015	2.9	0.073	0.009	38.81	7.65	510.3	862.3	0.3%
13	474	855	36.95	7.08	0.043	0.015	2.89	0.078	0.008	38.46	7.09	472.8	854.7	0.3%
14	437	848	36.53	6.53	0.043	0.015	2.88	0.084	0.008	38.14	6.54	435.8	847.6	0.3%
15	401	841	36.12	5.99	0.043	0.015	2.87	0.090	0.007	37.85	5.99	399.2	841.1	0.4%
16	365	835	35.71	5.45	0.043	0.015	2.86	0.098	0.007	37.58	5.44	362.9	835.1	0.5%
17	329	830	35.30	4.92	0.043	0.015	2.84	0.107	0.006	37.34	4.91	327.1	829.7	0.6%
18	294	825	34.87	4.39	0.042	0.015	2.83	0.119	0.005	37.11	4.37	291.6	824.8	0.7%
19	259	820	34.41	3.87	0.042	0.015	2.8	0.133	0.005	36.92	3.85	256.5	820.4	0.9%
20	224	816	33.89	3.36	0.042	0.015	2.77	0.151	0.004	36.74	3.33	221.9	816.5	1.1%
21	190	813	33.29	2.85	0.041	0.015	2.73	0.175	0.004	36.59	2.81	187.6	813.2	1.5%
22	157	810	32.55	2.35	0.040	0.015	2.68	0.207	0.003	36.46	2.31	153.9	810.3	2.1%
23	125	808	31.54	1.87	0.039	0.015	2.61	0.253	0.002	36.36	1.81	120.7	808.0	3.1%
24	93.1	806	30.05	1.40	0.037	0.015	2.49	0.323	0.002	36.27	1.32	88.3	806.1	5.2%
25	63.1	805	27.55	0.95	0.034	0.015	2.28	0.437	0.001	36.21	0.85	56.8	804.7	9.9%
26	35.5	804	22.69	0.53	0.028	0.015	1.88	0.639	0.001	36.17	0.40	26.8	803.8	24.4%
27	12.8	803	12.05	0.19	0.015	0.015	1	0.941	0.000	36.15	-0.01	-0.7	803.3	
28	0.76	803	0.76	0.01	0.001	0.015	0.06	1.000	0.000	36.14	-0.35	-23.3	803.2	

$p_a=0.045$ $p_b=0.015$

3．シミュレーションによる比較

数値計算の要約に使った指標を，同等の兵力で，個別確率を $p_a=4.5\%$，$p_b=1.5\%$とおいた場合を例に説明しよう．

主な結果を表1に示しておいた．(2.4) 式に従って各期の損耗の平均を計算したのが，E(a)，E(b) で，次期はそれだけの損耗を減じて x，y を与えるという計算を繰り返した．残存量は図3.1aの様に推移する．

あとはランチェスター式との対照のため計算したものである．dx/y，dy/x は (2.7) 式の α，β に対応する．ここから，この二項確率式に基づく交換比が計算できるので，これをE^*として，各期ごとに計算してある．

ここで，表のE^*の数値が個別命中率の比率3に近い値から始まっていることがわかる．前節ではこれが交換比に一致するものではないものの，両軍の損耗率が等しいときには，一致していることを述べた．それが実際にはある程度の大きさをもった集団間で戦闘が行われるときにはおおむね近い値をとることが示されているわけである．比較のため，交換比3でのランチェスター二次法則に従い，連立差分方程式で解いた結果を，タテ罫線で区切って dx より右の列に示した．

図3.1bに見るように，確率式の平均損耗をランチェスター式と比較すると，攻撃精度の不利を抱え，多くの損耗を出す x の側で，また特に最後の曲面で下にずれている．正しくランチェスター式と比較するには dx/y，dy/x をそれに対応する定数 α，β に比較すればよい．図3.1cに示したのがこれである．ここでは確かに dx/y が終盤に急激に減少している．これによって交換比も x の側に有利に変化していることを示したのが，図3.1eである．

不利を抱えるもう一つの要因である兵力比をかえて見ると，不利な側の最終盤で同じこと

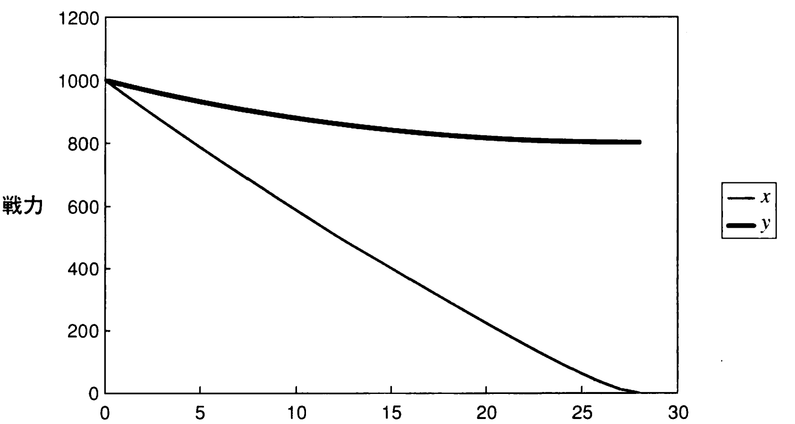

図3.1a　戦力の推移（個別確率3倍）

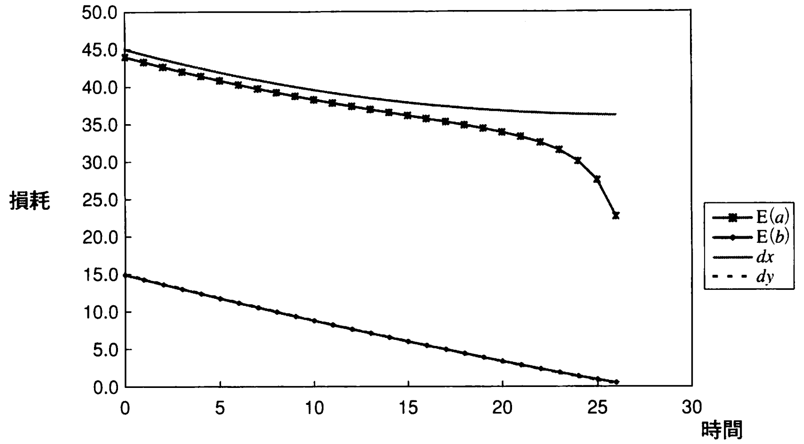

図3.1b　平均損耗の推移

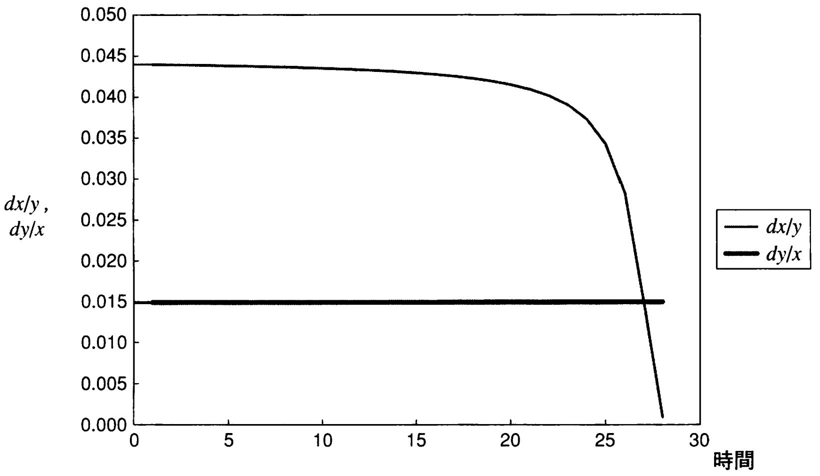

図3.1c　損耗交差係数

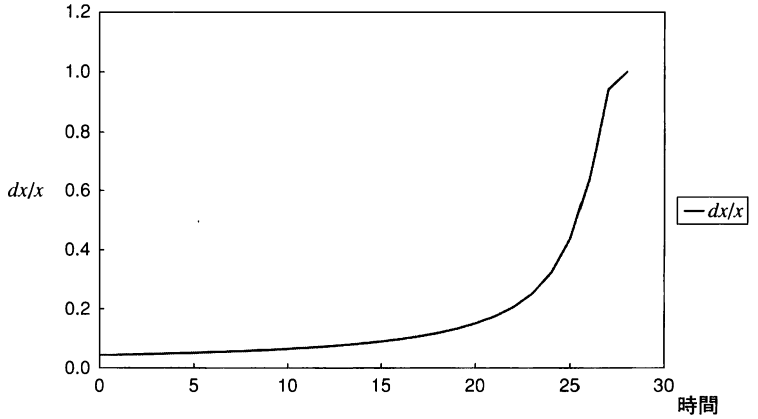

図3.1d　x の損耗率（dx/x）

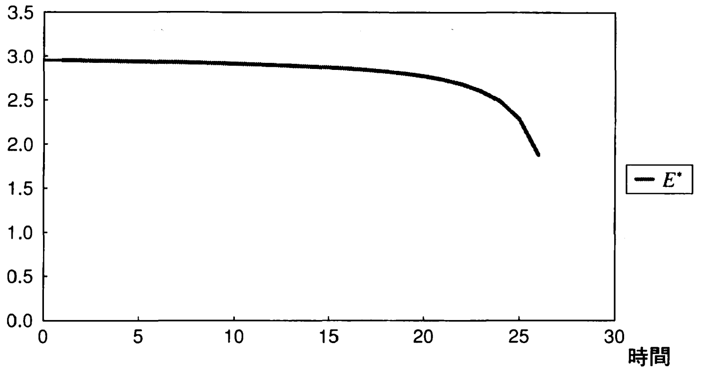

図3.1e　交換比

が起こっていることが確認できる．確率を同じ1.3％として，y の初期値を3倍の3000にした場合の結果が図3.2c，3.2eである．

兵力と個別確率の有利，不利が逆転しているケースを見ることで，これの原因を考えることができる．兵力の不利を補うには兵力比の2乗の逆数だけの命中率の優越がなければならないことを前節に述べた．そこで，兵力不利の側がそこまでの命中率での優位をもってない場合を想定した．

具体的には兵力を同じく $x=1000$，$y=3000$ であたえ，敵に与える命中率においては4倍になるよう，$p_a=1.5\%$，$p_b=6\%$ とした．図3.3bのように，当初は兵力に勝る y の損害の方が多いが，途中で逆転し，x は最終的に29期に全滅する（図3.3a）．

図3.3cの係数の変化を見ると，ランチェスター式と大きく異なるのは，全滅が近づいた時期である．x の側は最初から被弾率において勝っていたが，最後でさらに改善される．この結果交換比も改善される（図3.3e）．

これの意味は次のようなことだと考えられる．二項確率モデルの平均的損耗を損耗率にして指数で書き直した（2.6）式からわかるように，損耗率は彼我の戦力比と個別被弾率によって決まる．期間の大部分はゼロに近いため，損耗を敵の兵力に比例させるランチェスター式と大きくは異ならないが，破断界では，彼我の兵力比が大きくなることで，二項確率モデルの自軍の損耗率は急激に高くなり，他方，損耗の限界である我の兵力の縮小により，損耗は限界を画せられ，敵兵力あたりの損耗率は減少するのである．これをあらわすのは，平均損耗をあらわす2.5式における最初の乗数（赤軍のm，青軍のn）である．それでも彼我の兵力比は悪化するからさらに損耗率を高め，自軍の兵力あたりの損耗率は破断界では急激に上昇する．最初の例ではこれを示したのは図3.1dである．同様の傾向はほかのケースでも現れるが，個々では特に最終的には全滅により損耗率の上限が画される屈曲点がみられる．

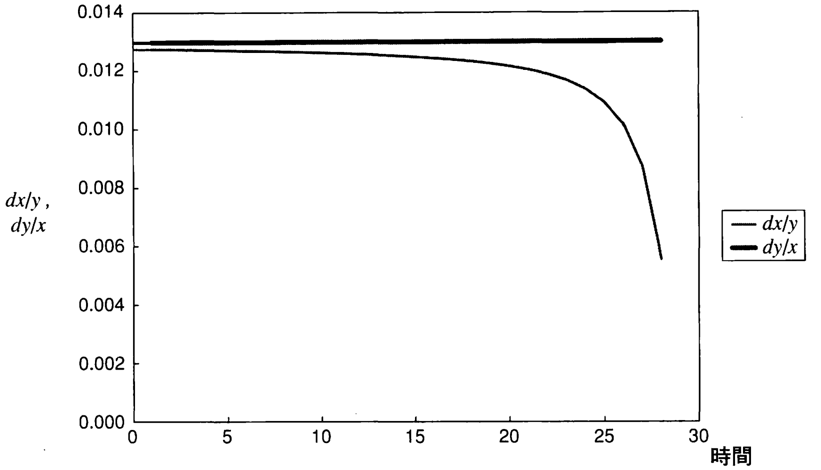

図3.2c 損耗交差係数（兵力３倍，個別確率同等）

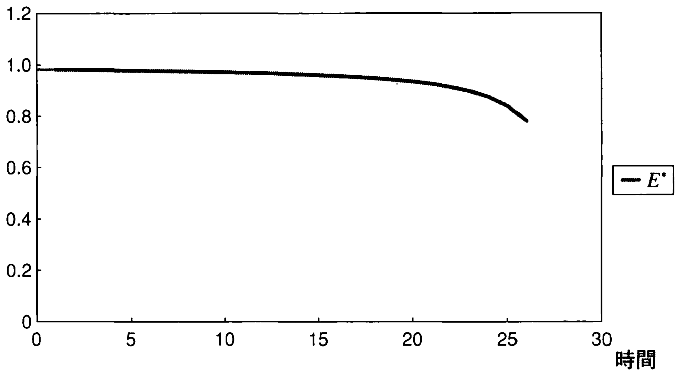

図3.2e 交換比

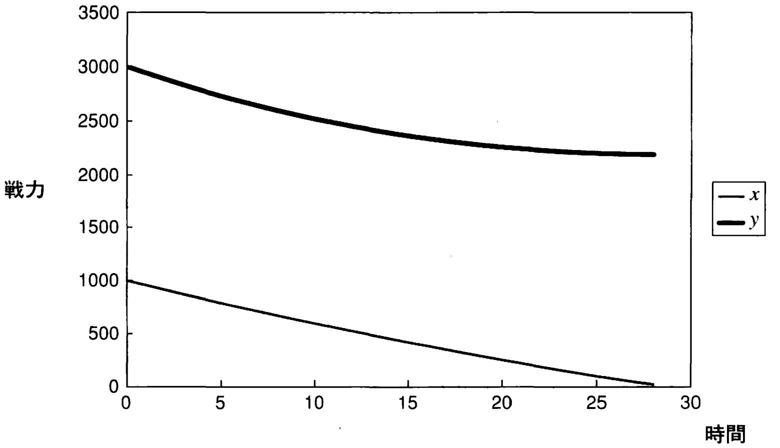

図3.3a 戦力の推移（兵力３倍，個別確率1/4）

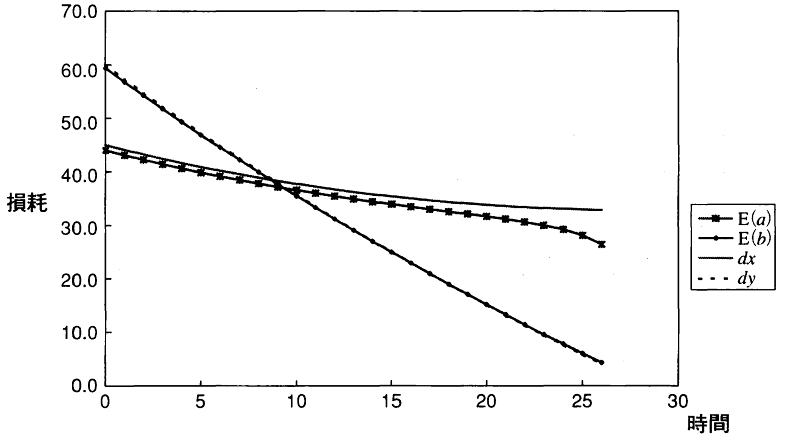

図3.3b　平均損耗の推移

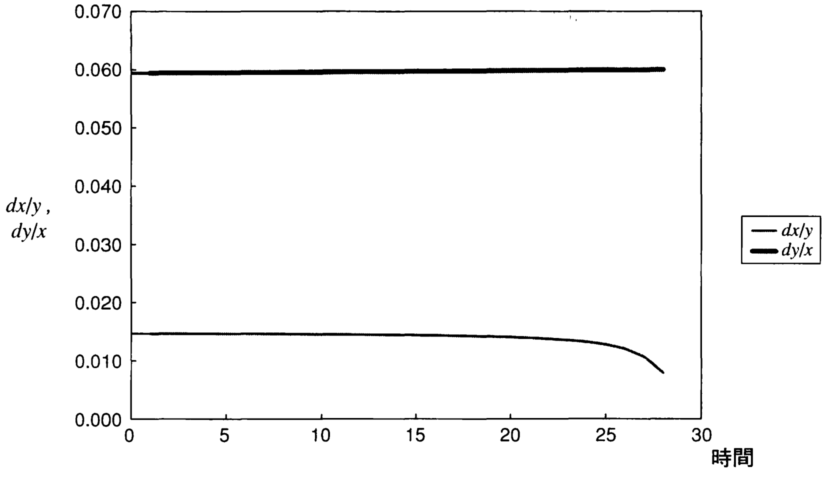

図3.3c　損耗交差係数

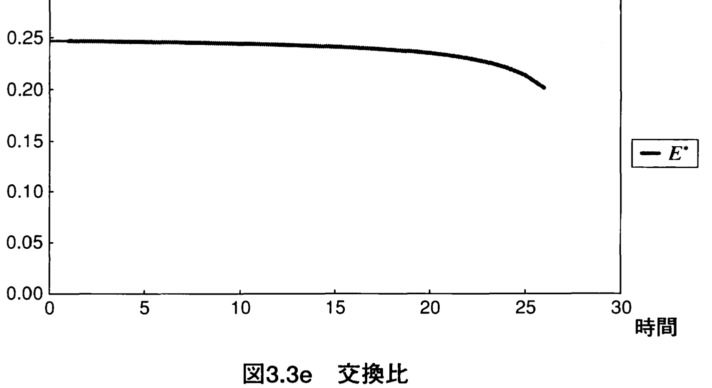

図3.3e　交換比

4．小括

本稿ではランチェスター法則と対照可能な二項確率過程を考えて，その平均値としてランチェスター式は近似を与えることが限定的ながら示された．

逆に兵力比と個別命中率の積に圧倒的な差があるような場合には，これによる条件の変化に対応できないことも示唆された．

二項確率式は一様な連続した過程を近似する場合と異なり，多段階の個別の過程を経て結果が分かれていくようなケースではより有用であると考えられるが，それは残された課題である．また，確率式を用いる真に有効な手法は平均的な結果以外の可能性を示すことにあるが，それも今後の課題である．

文献

Morse, Philip M and George E. Kimball (1951), *Methods of Operations Research*, New York.

佐藤總夫（1987）「自然の数理と社会の数理Ⅰ Ⅱ」日本評論社.

藤井輝明（2002）「オペレーションズリサーチの方法」における集団形成問題再考，「季刊経済研究」24 (4), pp.29-42.

（2002．9．30　受理）