トレンドに既知の構造変化点がある場合の WS推定量による単位根検定[1)]

中　川　　満

要　旨

線形トレンドとドリフトに1つの既知の変化点があるモデルに関する単位根検定にWS推定量（Weighted Symmetric Estimator）を用いる方法を提案する。WS推定量の帰無仮説の下での漸近分布を明らかにした。また，小標本における検出力をモンテカルロシミュレーションによって調べた。その結果，通常のPerron検定と比べて検出力の改善が見られた。また，Perron検定と異なり，tタイプ検定がやや検出力が高いという結果を得た。

1．はじめに

経済時系列データに単位根が存在するかはNelson & Plossoer（1982）の論文以降，現在に至るまで，計量経済学のみならず他の経済学分野でも，強い関心を集めてきた。さまざまな検定が提案される中で，最も単位根仮説に対して不利な方法は，トレンドの構造変化を仮定するPerron（1989）の論文で提案された方法である（以下Perron検定と呼ぶ）。これは構造変化点を既知と仮定する方法である。これを未知と仮定する方法は，Bernerjee, Lumsdaine & Stock（1992）, Perron & Vogelsang（1992）, Zivot & Andrews（1992）, Perron（1997），Vogelsang & Perron（1998）らによって各提案されているが，いずれも構造変化点を既知と見る方法を基礎にしている。Morimune（森棟）& Nakagawa（中川）（2001）の論文では，構造変化点を既知と見た場合の検定であるPerron検定とトレンド変数に対する回帰残差に基づいた検定（以下MN検定と呼ぶ）の双方について，小標本における貧弱な検出力を指摘している。構造変化がない場合について，小標本における低い検出力への対処法としてPark & Fuller（1995）の論文で提案されたのが，WS（Weighted Symmetric）推定量である。この論文はドリフト付のモデルに関してその漸近分布を与え，そのパーセント点を与えた。線形トレンド付のモデルに関しては，Fuller（1996）の著書のp. 568からp. 573に漸近分布が与えられ，表10. A. 4

〔キー・ワーズ〕

Weighted Symmetric Estimator，単位根検定，構造変化，検出力

1）Unit Root Tests with Discontinuous Trend based on the Weighted Symmetric Estimator.

にそのパーセント点が与えられている。

本論文は，このWS推定量の考え方を構造変化点が既知の場合の単位根検定に応用するものである。これにより，構造変化が存在する場合の単位根検定においてもその検出力を改善することができる。特に本論文はWS推定量の漸近分布，小標本特性を明らかにする。対象とするモデルは，構造変化点が1つでこの変化点で線形トレンドとドリフトに不連続が生ずるという，Perron (1989) の論文にいうC-Modelである。

第2節では，WS推定量の漸近分布を明らかにし，そのパーセント点を求める。第3節ではこの推定量の検出力を明らかにする。なお証明は補論にまとめた。

2. 帰無仮説の下でのWS推定量の漸近分布

モデルは $\widehat{u}_t=\phi\widehat{u}_{t-1}+\gamma D_t+e_t$ で $\widehat{u}_t$ は回帰式 $y_t=(\alpha_1+\beta_1 t)DU_{1t}+(\alpha_2+\beta_2 t)DU_{2t}+u_t$ のOLS残差である。ここで，$T_B/T=\lambda$，$DU_{1t}=\begin{cases}1 & 1\leq t\leq T_B\\ 0 & T_B+1\leq t\leq T\end{cases}$，$DU_{2t}=1-DU_{1t}$，

$D_t=\begin{cases}1 & t=T_B+1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$，構造変化点 T_B の位置は既知，λ は定数とする。また，e_t は平均0，分散 σ^2 の独立な確率変数である。WS推定量は，$\Phi(\phi,\gamma)=\sum_{t=2}^{T}w_t\{\widehat{u}_t-\phi\widehat{u}_{t-1}-\gamma_1 D_1\}^2+\sum_{t=1}^{T-1}(1-w_{t+1})\{\widehat{u}_t-\phi\widehat{u}_{t+1}-\gamma_2 D_{t+1}\}^2$ を最小化することによって得られる。

ここで，$w_t=\begin{cases}0 & t=1\\ (t-1)/T & t=2,3,\ldots,T\end{cases}$ である。

右辺第1項が前向きの推定式であり，第2項が後ろ向き推定式である。なぜ，後ろ向きの推定式には，D_t ではなく D_{t+1} が入っているかであるが，$\widehat{u}_{T_B}$，$\widehat{u}_{T_B+1}$ の積が推定の計算に入らないようにするためである。パラメータの推定に関しては以下の回帰と等価である。

$$\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_t\\ \sqrt{I-W}\widehat{U}_{t-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_{t-1} & \sqrt{W}D_t & 0\\ \sqrt{I-W}\widehat{U}_t & 0 & \sqrt{I-W}D_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\ \gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}+e$$

ここで，$W=diag[w_2,\ldots,w_T]$，$\sqrt{W}=diag[\sqrt{w_2},\ldots,\sqrt{w_T}]$，$\sqrt{I-W}=diag[\sqrt{1-w_2},\ldots,\sqrt{1-w_T}]$，$\widehat{U}_t=[\widehat{u}_2\ \ \widehat{u}_3\ldots,\widehat{u}_T]'$，$\widehat{U}_{t-1}=[\widehat{u}_1\ \ \widehat{u}_2\ldots,\widehat{u}_{T-1}]'$，$D_t=[\overbrace{0\ldots0}^{T_B-1}\ \ 1\ \ 0\ldots0]'$.

さらに $X=\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_{t-1} & \sqrt{W}D_t & 0\\ \sqrt{I-W}\widehat{U}_t & 0 & \sqrt{I-W}D_t\end{bmatrix}$，$s^2=\dfrac{\Phi(\widehat{\phi},\widehat{\gamma})}{T-7}$ とする。

単位根検定は，係数統計量 $T(\widehat{\phi}-1)$ 及び t タイプ統計量 $\tau_w=\dfrac{\widehat{\phi}-1}{s\sqrt{(X'X)^{11}}}$ によっておこなわれる。ただし A^{ij} は A^{-1} の i,j 要素である。

［定理 1］

$$T(\widehat{\phi}-1)\xrightarrow{w}\frac{\frac{\lambda}{2}\{\widetilde{B}_1(0)\}^2+\left(\lambda^2-\frac{\lambda}{2}\right)\{\widetilde{B}_1(1)\}^2+\left\{(1-\lambda)^2-\frac{1-\lambda}{2}\right\}\{\widetilde{B}_2(0)\}^2+\frac{1-\lambda}{2}\{\widetilde{B}_2(1)\}^2-\frac{1}{2}}{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du}-1$$

$$\tau_w\xrightarrow{w}\frac{\frac{\lambda}{2}\{\widetilde{B}_1(0)\}^2+\left(\lambda^2-\frac{\lambda}{2}\right)\{\widetilde{B}_1(1)\}^2+\left\{(1-\lambda)^2-\frac{1-\lambda}{2}\right\}\{\widetilde{B}_2(0)\}^2+\frac{1-\lambda}{2}\{\widetilde{B}_2(1)\}^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du}}$$

$$-\sqrt{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du}$$

ただし，$B_1(s)$, $B_2(s)$ は互いに独立な標準ブラウン運動，$\widetilde{B}_i(s)=B_i(s)-\int_0^1 B_i(u)du-12\left(s-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(u-\frac{1}{2}\right)B_i(u)du$, $\xrightarrow{w}$ は確率変数の弱収束を表すとする。

定理 1 から $T(\widehat{\phi}-1)$ 及び τ_w のパーセント点を求めることができる。表 2.1 には t タイプ統計量のパーセント点，表2.2 には係数統計量のパーセント点を示した。これは，それぞれ10000回繰り返しによるモンテカルロシミュレーションによって得たものである。

表2. 1　*WS* 推定量（t タイプ）のパーセント点

λ		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
T=50	1%	−4.27	−4.58	−4.81	−4.79	−4.81	−4.79	−4.63	−4.54	−4.18
	5%	−3.58	−3.88	−4.08	−4.14	−4.16	−4.12	−4.02	−3.81	−3.52
	10%	−3.25	−3.55	−3.75	−3.81	−3.83	−3.79	−3.69	−3.49	−3.19
T=100	1%	−4.16	−4.40	−4.58	−4.65	−4.65	−4.65	−4.65	−4.42	−4.11
	5%	−3.56	−3.82	−3.95	−4.01	−4.05	−4.02	−3.97	−3.80	−3.52
	10%	−3.22	−3.49	−3.65	−3.72	−3.73	−3.73	−3.64	−3.48	−3.21
T=200	1%	−4.12	−4.36	−4.47	−4.55	−4.56	−4.57	−4.51	−4.37	−4.10
	5%	−3.49	−3.71	−3.90	−3.96	−3.99	−3.95	−3.87	−3.74	−3.51
	10%	−3.19	−3.42	−3.60	−3.68	−3.71	−3.67	−3.59	−3.44	−3.20
T=500	1%	−4.15	−4.36	−4.43	−4.50	−4.52	−4.51	−4.46	−4.35	−4.10
	5%	−3.52	−3.74	−3.88	−3.95	−3.96	−3.94	−3.87	−3.74	−3.51
	10%	−3.21	−3.44	−3.58	−3.67	−3.70	−3.66	−3.58	−3.43	−3.20
T=1000	1%	−4.14	−4.36	−4.46	−4.56	−4.52	−4.52	−4.47	−4.34	−4.14
	5%	−3.51	−3.73	−3.88	−3.95	−3.94	−3.94	−3.87	−3.72	−3.50
	10%	−3.21	−3.44	−3.59	−3.65	−3.67	−3.65	−3.56	−3.41	−3.20

3. WS 推定量による検定の検出力

次に WS 推定量の検出力をモンテカルロ・シミュレーションで調べる。y_t の DGP (Data Generating Process) は以下の様に設定する。

$$y_t=\rho y_{t-1}+\varepsilon_t$$

表2. 2 *WS* 推定量（係数統計量）のパーセント点

λ		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$T=50$	1%	−29.56	−32.78	−34.66	−34.71	−35.06	−34.57	−33.19	−31.98	−29.00
	5%	−22.74	−25.80	−27.62	−28.21	−28.41	−28.12	−27.12	−25.24	−22.23
	10%	−19.67	−22.62	−24.45	−25.12	−25.21	−24.92	−23.80	−21.90	−19.01
$T=100$	1%	−31.52	−34.52	−36.54	−37.41	−37.80	−37.66	−37.69	−35.01	−30.64
	5%	−24.09	−27.13	−28.73	−29.55	−30.15	−29.60	−28.94	−26.98	−23.47
	10%	−20.32	−23.19	−25.12	−26.15	−26.21	−26.00	−25.04	−23.26	−20.11
$T=200$	1%	−32.39	−36.02	−37.58	−38.75	−39.02	−39.08	−37.91	−35.95	−32.15
	5%	−23.98	−27.11	−29.31	−30.37	−30.71	−30.08	−28.93	−27.10	−24.31
	10%	−20.29	−23.12	−25.45	−26.38	−26.78	−26.26	−25.21	−23.30	−20.38
$T=500$	1%	−33.86	−36.65	−38.52	−40.18	−39.99	−39.91	−38.93	−36.86	−33.39
	5%	−24.81	−27.86	−29.94	−30.72	−31.11	−30.97	−29.68	−27.73	−24.80
	10%	−20.73	−23.73	−25.62	−27.00	−27.24	−26.82	−25.56	−23.74	−20.67
$T=1000$	1%	−34.24	−37.59	−39.37	−41.07	−40.87	−40.66	−39.48	−37.43	−34.12
	5%	−24.90	−28.01	−30.03	−31.29	−31.09	−31.16	−29.80	−27.91	−24.89
	10%	−20.90	−23.96	−25.94	−26.85	−27.22	−26.77	−25.56	−23.52	−20.76

$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$
$$|\rho|<1$$
$$y_0 \sim N\left(0, \frac{1}{1-\rho^2}\right)$$

ここで，ε_t は i.i.d で，y_0 は ε_t と独立である。乱数 ε_t 及び $y_0\sqrt{1-\rho^2}$ は，GAUSS 3.2.37 の rndns() によって生成した。$\rho=0.90, 0.95, 0.99$ とし，反復回数は10,000，サンプル数 n は $n=50, 100, 500, 1000$ とした。変化点位置に関する比率 λ は 0.1 から 0.9 まで 0.1 刻みで動かした。$y_0 \sim N\left(0, \frac{1}{1-\rho^2}\right)$ は，実際にこの検定を利用する状況を考えた想定である．WS 推定量はこのような場合に関する検出力の改善をねらっている．棄却率は0.05とした．サンプル数による棄却率の歪みを考慮に入れるために，まずそれぞれのサンプル数に対する 5 %の臨界値を計算し，それを検定に用いた。

モデルは第 2 節に与えられている。表3.1に t タイプ検定の検出力を与え，表3.2には係数検定の検出力を与えた。変化点位置に関する比率 λ を第 1 行目に与えた。それぞれの ρ に対して，上段は WS 推定量による当該検定の棄却率，下段は Perron 検定の対応する検定との検出力の差である。Perron 検定の検出力は，Nakagawa（中川）(2001)の論文によった。

その結果，t タイプ検定，係数検定ともに WS 推定量を使った検定が Perron 検定より優れていた。ただし，1 %以下の差はサンプリング・エラーによると考えた。特に t タイプ検定での改善は顕著である。その結果として，Perron 検定の場合係数検定の検出力が t タイプ検定に比べて勝っていたのが，両者の差がほとんどなくなり，若干 t タイプ検定の方がよくなって

表 3.1　t タイプ検定の検出力

	ρ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$T=50$	0.99	5.1 (0.2)	5.0 (−0.1)	4.9 (−0.1)	4.9 (−0.1)	4.9 (0.1)	4.9 (0.0)	4.8 (−0.3)	4.9 (0.1)	5.0 (−0.1)
	0.95	6.1 (0.5)	6.0 (0.6)	5.6 (0.1)	5.3 (0.1)	5.6 (0.5)	5.7 (0.7)	5.6 (0.2)	6.0 (0.7)	6.1 (0.7)
	0.90	9.4 (1.7)	8.5 (1.3)	7.5 (1.4)	7.1 (0.5)	7.2 (1.1)	7.2 (1.0)	7.8 (1.1)	8.5 (1.8)	9.0 (1.5)
$T=100$	0.99	5.1 (−0.4)	5.1 (0.1)	5.2 (−0.3)	5.2 (0.2)	5.1 (0.2)	5.1 (0.2)	5.0 (0.2)	5.1 (−0.0)	5.2 (0.0)
	0.95	9.1 (1.2)	8.2 (0.6)	8.2 (1.6)	7.6 (0.9)	7.2 (1.2)	7.5 (0.5)	7.3 (0.3)	8.1 (1.1)	9.0 (1.3)
	0.90	20.8 (4.4)	17.3 (3.1)	15.5 (2.7)	15.2 (3.7)	13.9 (3.1)	14.5 (2.4)	15.1 (2.3)	17.9 (2.9)	21.9 (5.0)
$T=200$	0.99	5.8 (0.6)	5.9 (0.6)	5.6 (0.7)	5.5 (0.1)	5.6 (0.6)	5.7 (0.4)	5.8 (0.4)	5.8 (0.7)	5.7 (−0.0)
	0.95	22.2 (6.8)	19.5 (6.3)	16.0 (4.7)	15.1 (3.3)	14.4 (3.0)	15.3 (3.7)	16.5 (4.6)	18.4 (3.4)	20.8 (4.2)
	0.90	68.3 (15.6)	60.9 (17.2)	51.8 (16.0)	48.6 (11.9)	47.4 (13.2)	49.3 (12.7)	53.0 (13.7)	59.2 (12.0)	67.3 (11.9)
$T=500$	0.99	8.9 (0.9)	8.4 (1.3)	7.6 (0.9)	7.6 (1.2)	6.9 (0.6)	7.3 (1.1)	7.6 (1.3)	8.1 (0.8)	9.1 (1.8)
	0.95	84.3 (9.6)	77.0 (11.9)	70.7 (11.9)	67.7 (11.9)	68.0 (12.8)	68.2 (12.8)	71.9 (13.9)	77.3 (11.5)	85.1 (11.5)
	0.90	100.0 (0.1)	100.0 (0.0)	100.0 (0.2)	99.9 (0.3)	99.9 (0.4)	99.9 (0.2)	100.0 (0.2)	100.0 (0.1)	100.0 (0.0)
$T=1000$	0.99	21.1 (4.3)	18.2 (3.8)	15.5 (1.9)	14.3 (2.2)	14.7 (3.3)	14.3 (4.6)	15.7 (4.1)	18.1 (4.7)	21.3 (5.0)
	0.95	100.0 (0.0)	100.0 (0.1)	100.0 (0.2)	99.9 (0.3)	99.9 (0.3)	99.9 (0.6)	100.0 (0.4)	100.0 (0.1)	100.0 (0.0)
	0.90	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)

いる。

4. 結　論

線形トレンドとドリフトに既知の変化点が1つある場合に単位根検定を WS 推定量用いて行う場合の係数検定統計量と t タイプ検定統計量の漸近分布を与え，その小標本における検出力を与えた。この結果，不連続なトレンドの場合でも，WS 推定量による検定によって検出力を改善できることがわかった。また，t タイプ検定と係数検定とでは，前者の検出力が若干高い。したがって，既知の構造変化点を持つ場合の単位根検定の方法として WS 推定量は有力

表 3. 2 係数検定の検出力

	ρ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
T=50	0.99	5.3 (0.0)	5.1 (0.1)	5.0 (0.1)	5.0 (0.1)	5.1 (0.2)	5.0 (0.0)	4.9 (−0.1)	4.8 (−0.0)	5.0 (−0.0)
	0.95	6.5 (0.1)	5.8 (−0.0)	5.6 (0.2)	5.5 (0.2)	5.8 (0.5)	5.6 (0.2)	5.5 (−0.1)	5.6 (0.1)	6.0 (0.0)
	0.90	9.5 (0.5)	8.3 (0.5)	7.4 (0.7)	7.1 (0.5)	7.5 (0.8)	7.3 (0.1)	7.6 (−0.1)	8.1 (0.1)	9.0 (0.2)
T=100	0.99	5.0 (−0.3)	5.1 (−0.1)	5.2 (−0.2)	5.3 (0.1)	5.1 (−0.1)	5.2 (0.1)	5.1 (−0.1)	5.3 (0.1)	5.3 (0.0)
	0.95	9.1 (0.8)	8.2 (−0.1)	8.1 (0.6)	7.5 (0.6)	6.9 (−0.3)	7.4 (0.3)	7.3 (−0.1)	8.3 (0.1)	9.3 (0.0)
	0.90	20.2 (1.5)	17.3 (0.5)	15.7 (0.7)	15.0 (0.7)	13.5 (−0.6)	14.7 (1.0)	14.9 (−0.6)	17.2 (−0.3)	21.6 (0.8)
T=200	0.99	5.7 (0.3)	5.6 (−0.2)	5.8 (0.4)	5.5 (0.1)	5.4 (0.1)	5.6 (0.5)	5.8 (0.7)	5.6 (0.2)	5.5 (0.3)
	0.95	22.2 (3.4)	18.5 (1.7)	15.7 (2.1)	14.7 (0.4)	13.9 (0.6)	14.9 (2.1)	16.4 (2.9)	18.1 (2.2)	20.0 (1.6)
	0.90	68.1 (6.8)	58.9 (5.1)	51.2 (6.4)	47.6 (3.7)	46.5 (3.6)	48.9 (5.8)	53.0 (7.3)	59.1 (4.7)	66.2 (4.9)
T=500	0.99	8.8 (0.4)	8.5 (0.4)	7.3 (−0.0)	7.7 (0.6)	6.8 (0.0)	7.0 (0.1)	7.5 (0.5)	8.1 (0.1)	8.7 (0.2)
	0.95	84.3 (3.8)	76.7 (2.7)	70.1 (2.3)	68.2 (3.7)	67.5 (3.4)	66.9 (3.0)	71.9 (4.6)	77.4 (4.2)	84.3 (3.5)
	0.90	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	99.9 (0.0)	99.9 (0.0)	99.9 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)
T=1000	0.99	20.5 (1.2)	17.8 (1.4)	15.7 (0.8)	14.1 (−0.4)	14.7 (1.7)	13.8 (1.6)	15.7 (2.1)	17.4 (2.3)	20.3 (2.1)
	0.95	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.1)	100.0 (0.1)	100.0 (0.1)	100.0 (0.1)	100.0 (0.1)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)
	0.90	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (−0.0)	100.0 (−0.0)	100.0 (−0.0)	100.0 (−0.0)	100.0 (−0.0)	100.0 (0.0)	100.0 (0.0)

な方法といえる。

しかし，問題点もある。本論文の WS 推定量は一旦 mean function $m(t)$ を OLS で推定し，その残差に関して単位根検定を行う。しかし，撹乱項が正の自己相関を持っている場合，第1段の回帰で誤ったトレンドを検出してしまい，その結果単位根検定により誤った結果が与えられやすいことが予想される。この場合 Dickey-Fuller 検定の様に1ステップで単位根検定を行う方法が必要である。しかし，前向きの推定式と後ろ向き推定式に関してそれぞれ Dickey-Fuller 変換を行うと，係数値が異なることがわかる。これは，線形トレンドの存在と Dickey-Fuller 変換によって非定常ケースと定常ケースを同時に扱うこととから発生する。

従って，単純な $\Phi(\phi,\gamma,m)=\sum_{t=2}^{T}w_t\{\widehat{u}_t-\phi\widehat{u}_{t-1}-\gamma_1D_t-m(t)\}^2+\sum_{t=1}^{T-1}(1-w_{t+1})\{\widehat{u}_t-\phi\widehat{u}_{t+1}-\gamma_2D_{t+1}-m(t)\}^2$ ではWS推定量を構築できないのである。これに対する対処法は今後の課題である。

補　論

［定理1の証明］

$$\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_t\\ \sqrt{I-W}\widehat{U}_{t-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_{t-1} & \sqrt{W}D_t & O\\ \sqrt{I-W}\widehat{U}_t & O & \sqrt{I-W}D_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\ \gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}+e$$

の右辺第1項最終2列の影響を考えると，FWL定理（Davidson & MacKinnon 1993, p.19-24参照）によって，それぞれ左辺の $\sqrt{W}\widehat{U}_t$ の $\sqrt{w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B+1}$，$\sqrt{I-W}\widehat{U}_{t-1}$ の $\sqrt{1-w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B}$，右辺第1列の $\sqrt{W}\widehat{U}_{t-1}$ の，$\sqrt{w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B}$，$\sqrt{I-W}\widehat{U}_t$ の $\sqrt{1-w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B+1}$ という値をとる列に0を代入し，左辺と右辺第1列を回帰させたことになる。すなわち，

$$M=diag\Big[\overbrace{1\ldots1}^{T_B-1}\ 0\ 1\ldots1\Big]$$

$$X_*=\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_{t-1}-\sqrt{w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B}D_t\\ \sqrt{I-W}\widehat{U}_t-\sqrt{1-w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B+1}D_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{W} & O\\ O & \sqrt{I-W}\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}\widehat{U}_{t-1}\\ \widehat{U}_t\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_t-\sqrt{w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B+1}D_t\\ \sqrt{I-W}\widehat{U}_{t-1}-\sqrt{1-w_{T_B+1}}\,\widehat{u}_{T_B}D_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{W} & O\\ O & \sqrt{I-W}\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}\widehat{U}_t\\ \widehat{U}_{t-1}\end{bmatrix}$$

とすると，$Y=X_*\phi+e$. ここから，

$$\widehat{\phi}=\frac{\sum_{t=2}^{T_B}w_t\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=T_B+2}^{T}w_t\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=2}^{T_B}(1-w_t)\widehat{u}_{t-1}\widehat{u}_t+\sum_{t=T_B+2}^{T}(1-w_t)\widehat{u}_{t-1}\widehat{u}_t}{\sum_{t=2}^{T_B}w_t\widehat{u}_{t-1}^2+\sum_{t=T_B+2}^{T}w_t\widehat{u}_{t-1}^2+\sum_{t=2}^{T_B}(1-w_t)\widehat{u}_t^2+\sum_{t=T_B+2}^{T}(1-w_t)\widehat{u}_t^2}$$

$$=\frac{\sum_{t=2}^{T_B}\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=T_B+2}^{T}\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}}{w_2\widehat{u}_1^2+\sum_{t=3}^{T_B}(1+w_t-w_{t-1})\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_{T_B})\widehat{u}_{T_B}^2+w_{T_B+2}\widehat{u}_{T_B+1}^2+\sum_{t=T_B+3}^{T}(1+w_t-w_{t-1})\widehat{u}_T^2+(1-w_T)\widehat{u}_T^2}$$

$$=\frac{\sum_{t=2}^{T_B}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=T_B+2}^{T}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=2}^{T_B}\widehat{u}_{t-1}^2+\sum_{t=T_B+2}^{T}\widehat{u}_{t-1}^2}{w_2\widehat{u}_1^2+\sum_{t=3}^{T_B}(1+w_t-w_{t-1})\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_{T_B})\widehat{u}_{T_B}^2+w_{T_B+2}\widehat{u}_{T_B}^2+\sum_{t=T_B+3}^{T}(1+w_t-w_{t-1})\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_T)\widehat{u}_T^2}$$

を得る。したがって，$\widehat{\phi}-1=\dfrac{A}{B}$，ただし，

$$A=\sum_{t=2}^{T_B}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=T_B+2}^{T}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}$$

$$+(1-w_2)\hat{u}_1^2-\sum_{t=3}^{T_B}(w_t-w_{t-1})\hat{u}_{t-1}^2-(1-w_{T_B})\hat{u}_{T_B}^2+(1-w_{T_B+1})\hat{u}_{T_B+1}^2-\sum_{t=T_B+3}^{T}(w_t-w_{t-1})\hat{u}_{t-1}^2-(1-w_T)\hat{u}_T^2$$

$$B=w_2\hat{u}_1^2+\sum_{t=3}^{T_B}(1+w_t-w_{t-1})\hat{u}_{t-1}^2+(1-w_{T_B})\hat{u}_{T_B}^2+w_{T_B+2}\hat{u}_{T_B+1}^2+\sum_{t=T_B+3}^{T}(1+w_t-w_{t-1})\hat{u}_{t-1}^2+(1-w_T)\hat{u}_T^2$$

である。

帰無仮説の下での DGP は，$y_t=\eta_t+(\alpha_1+\beta_1 t)DU_{1t}+(\alpha_2+\beta_2 t)DU_{2t}$ である。ここで，$\eta_t=\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i$ かつ ε_i は平均 0，分散 σ^2 の独立な確率変数である。残差に関して $y_t=(\alpha_1+\beta_1 t)DU_{1t}+(\alpha_2+\beta_2 t)DU_{2t}+u_t$ と等価な直交回帰は，$y_t=(\alpha_1+\beta_1(t-\tau_1))DU_{1t}+(\alpha_2+\beta_2(t-\tau_2))DU_{2t}+u_t$ で，ここで $\tau_1=\frac{1}{T_B}\sum_{t=1}^{T_B}t=\frac{T_B+1}{2}$ かつ $\tau_2=\frac{1}{T-T_B}\sum_{t=T_B+1}^{T}t=\frac{T+T_B+1}{2}$ である。

残差は，$\sum_{t=1}^{T_B}(t-\tau_1)^2=\frac{1}{12}T_B(T_B^2-1)$ と $\sum_{t=T_B+1}^{T}(t-\tau_2)^2=\frac{1}{12}(T-T_B)\{(T-T_B)^2-1\}$ から，

$$\hat{u}_t=\eta_t-\frac{\sum_{s=1}^{T_B}\eta_s}{T_B}DU_{1t}-(t-\tau_1)\frac{12\sum_{s=1}^{T_B}\eta_s(s-\tau_1)}{T_B(T_B^2-1)}DU_{1t} \tag{A.1}$$

$$-\frac{\sum_{s=T_B+1}^{T}\eta_s}{T-T_B}DU_{2t}-(t-\tau_2)\frac{12\sum_{s=T_B+1}^{T}\eta_s(s-\tau_2)}{(T-T_B)\{(T-T_B)^2-1\}}DU_{2t}$$

ここで，$\xi_{[m,n]}=\sum_{i=m}^{n}\varepsilon_i$ とおく。この式により以下の表現をえる。

$$\eta_t=\eta_t DU_{1t}+\eta_t DU_{2t}=\xi_{[1,t]}DU_{1t}+(\eta_{T_B}+\xi_{[T_B+1,t]})DU_{2t} \tag{A.2}$$

$$\frac{\sum_{s=T_B+1}^{T}\eta_s}{T-T_B}=\eta_{T_B}+\frac{\sum_{s=1}^{T-T_B}\xi_{[T_B+1,T_B+s]}}{(1-\lambda)T} \tag{A.3}$$

$$\sum_{s=T_B+1}^{T}\eta_s(s-\tau_2)=\sum_{s=1}^{T-T_B}\eta_{T_B+s}\left(T_B+s-T_B-\frac{T-T_B+1}{2}\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{T-T_B}(\eta_{T_B}+\xi_{[T_B+1,T_B+s]})\left(s-\frac{(T-T_B)+1}{2}\right) \tag{A.4}$$

$$=\sum_{s=1}^{T-T_B}\xi_{[T_B+1,T_B+s]}\left(s-\frac{(T-T_B)+1}{2}\right)$$

さらに，

$$t-\tau_2=(t-T_B)-\tau_2+T_B=(t-T_B)-\frac{(T_B-T)+1}{2} \tag{A.5}$$

である，(A.1) に (A.2)，(A.3)，(A.4) 及び (A.5) を代入すると，

$$\widehat{u}_t=\left\{\xi_{[1,t]}-\frac{\sum_{s=1}^{\lambda T}\xi_{[1,s]}}{\lambda T}-(t-\mathcal{T}_1)\frac{12\sum_{s=1}^{\lambda T}\xi_{[1,s]}(s-\mathcal{T}_1)}{\lambda T(\lambda^2T^2-1)}\right\}DU_{1t}$$
$$+\left\{\xi_{[T_B+1,t]}-\frac{\sum_{s=1}^{(1-\lambda)T}\xi_{[T_B+1,T_B+s]}}{(1-\lambda)T}-\left[(t-T_B)-\frac{(T_B-T)+1}{2}\right]\right.$$
$$\left.\times\frac{12\sum_{s=1}^{(1-\lambda)T}\xi_{[T_B+1,T_B+s]}\left(s-\frac{(T-T_B)+1}{2}\right)}{(1-\lambda)T((1-\lambda)^2T^2-1)}\right\}DU_{2t.}$$

を得る。したがって，Donskerの不変原理から，$B_1(s),B_2(s)$ を互いに独立な標準ブラウン運動とし，$\widetilde{B}_i(v)=B_i(v)-\int_0^1B_i(u)du-12(v-1/2)\int_0^1(u-1/2)B_i(u)du$ とすると，以下が成立する。

$$\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T_B}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}$$
$$=\sigma^2\sum_{t=2}^{T_B}\left\{\left(\sqrt{\lambda}\frac{\varepsilon_t}{\sigma\sqrt{\lambda T}}+o_p(1)\right)\times\right.$$
$$\left.\left(\sqrt{\lambda}\frac{\xi_{[1,t-1]}}{\sigma\sqrt{\lambda T}}-\sqrt{\lambda}\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{T_B}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sigma\sqrt{\lambda T}}-12\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{\lambda T}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sigma\sqrt{\lambda T}}\frac{s-\mathcal{T}_1}{\lambda T}\right)\frac{(t-1-\mathcal{T}_1)}{\lambda T}+o_p(1)\right)\right\}$$
$$\xrightarrow{w}\sigma^2\lambda\int_0^1\widetilde{B}_1(v)dB_1(v)$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t=T_B+2}^{T}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}\xrightarrow{w}\sigma^2(1-\lambda)\int_0^1\widetilde{B}_2(v)dB_2(v)$$

$$\frac{1}{T^2}\sum_{t=2}^{T_B}\widehat{u}_{t-1}^2$$
$$=\sigma^2\lambda\frac{1}{\lambda T}\sum_{t=2}^{T_B}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\xi_{[1,t-1]}}{\sigma\sqrt{\lambda T}}-\sqrt{\lambda}\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{T_B}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sigma\sqrt{\lambda T}}-12\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{\lambda T}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sigma\sqrt{\lambda T}}\frac{s-\mathcal{T}_1}{\lambda T}\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{(t-1-\mathcal{T}_1)}{\lambda T}+o_p(1)\right)^2\xrightarrow{w}\sigma^2\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(v)dv$$

$$\frac{1}{T^2}\sum_{t=T_B+2}^{T}\widehat{u}_{t-1}^2\xrightarrow{w}\sigma^2(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(v)^2dv$$

$$\frac{1}{T}(1-w_2)\widehat{u}_1^2=\frac{1}{T}\left(1-\frac{1}{T}\right)\widehat{u}_1^2$$
$$=\lambda\frac{1}{\lambda T}\left\{\xi_{[1,1]}-\frac{\sum_{s=1}^{\lambda T}\xi_{[1,s]}}{\lambda T}-(1-\mathcal{T}_1)\frac{12\sum_{s=1}^{\lambda T}\xi_{[1,s]}(s-\mathcal{T}_1)}{\lambda T(\lambda^2T^2-1)}\right\}^2+o_p(1)$$
$$=\lambda\left\{\frac{\xi_{[1,1]}}{\sqrt{\lambda T}}-\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{\lambda T}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sqrt{\lambda T}}-12\left(\frac{1-\mathcal{T}_1}{\lambda T}\right)\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{\lambda T}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sqrt{\lambda T}}\frac{s-\mathcal{T}_1}{\lambda T}\right\}^2+o_p(1)$$

$$\xrightarrow{w} \lambda\sigma^2\{\widetilde{B}_1(0)\}^2$$

$$-\frac{1}{T}\sum_{t=3}^{T_B}(w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2=-\frac{1}{T}\sum_{t=3}^{T_B}\frac{1}{T}\widehat{u}_{t-1}^2 \xrightarrow{w} -\sigma^2\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(v)^2dv$$

$$-\frac{1}{T}(1-w_{T_B})\,\widehat{u}_{T_B}^2=-\frac{1}{T}\Bigl(1-\frac{T_B-1}{T}\Bigr)\widehat{u}_{T_B}^2+o_p(1)$$

$$=-(1-\lambda)\lambda\left\{\frac{\xi_{[1,\lambda T]}}{\sqrt{\lambda T}}-\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{\lambda T}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sqrt{\lambda T}}-12\frac{(\lambda T-\overline{T}_1)}{\lambda T}\frac{1}{\lambda T}\sum_{s=1}^{\lambda T}\frac{\xi_{[1,s]}}{\sqrt{\lambda T}}\frac{s-\overline{T}_1}{\lambda T}\right\}^2+o_p(1)$$

$$\xrightarrow{w} -\sigma^2(1-\lambda)\lambda\{\widetilde{B}_1(1)\}^2$$

$$\frac{1}{T}(1-w_{T_B+1})\,\widehat{u}_{T_B+1}^2$$

$$=\frac{1}{T}\Bigl(1-\frac{T_B}{T}\Bigr)\widehat{u}_{T_B+1}^2$$

$$=(1-\lambda)^2\left\{\frac{\xi_{[T_B+1,T_B+1]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}}-\frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{(1-\lambda)T}\frac{\xi_{[T_B+1,T_B+s]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}}}{(1-\lambda)T}-\Bigl[-\frac{1}{2}\Bigr]\times\right.$$

$$\left.\frac{\displaystyle 12\sum_{s=1}^{(1-\lambda)T}\frac{\xi_{[T_B+1,T_B+s]}}{\sqrt{(1-\lambda)T}}\Bigl(\frac{s}{(1-\lambda)T}-\frac{1}{2}\Bigr)}{(1-\lambda)T}\right\}^2+o_p(1)$$

$$\xrightarrow{w}(1-\lambda)^2\sigma^2\{\widetilde{B}_2(0)\}^2$$

$$-\frac{1}{T}\sum_{t=T_B+3}^{T}(w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2\xrightarrow{w}-(1-\lambda)^2\sigma^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)du$$

$$-\frac{1}{T}(1-w_T)\,\widehat{u}_T^2=-\frac{1}{T}\frac{1}{T}\widehat{u}_T^2\xrightarrow{p}0$$

$$\frac{1}{T^2}\Bigl\{w_2\widehat{u}_1^2+\sum_{t=3}^{T_B}(1+w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_{T_B})\,\widehat{u}_{T_B}^2+w_{T_B+2}\,\widehat{u}_{T_B+1}^2+$$

$$\sum_{t=T_B+3}^{T}(1+w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_T)\,\widehat{u}_T^2\Bigr\}$$

$$=\frac{1}{T^2}\Bigl\{\frac{\widehat{u}_1^2}{T}+\sum_{t=3}^{T_B}\Bigl(1+\frac{1}{T}\Bigr)\widehat{u}_{t-1}^2+(1-\lambda)\,\widehat{u}_{T_B}^2+\lambda\,\widehat{u}_{T_B+1}^2+\sum_{t=T_B+3}^{T}\Bigl(1+\frac{1}{T}\Bigr)\widehat{u}_{t-1}^2+\frac{1}{T}\widehat{u}_T^2\Bigr\}$$

$$+o_p(1)$$

$$=\frac{1}{T^2}\sum_{t=3}^{T_B}\widehat{u}_{t-1}^2+\frac{1}{T^2}\sum_{t=T_B+3}^{T}\widehat{u}_{t-1}^2$$

$$\xrightarrow{w}\sigma^2\{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du\}$$

これらから,

$$T(\widehat{\phi}-1)$$

$$\xrightarrow{w} \frac{\lambda\int_0^1 \widetilde{B}_1(u)dB_1(u)+(1-\lambda)\int_0^1 \widetilde{B}_2(u)dB_2(u)+\lambda\{\widetilde{B}_1(0)\}^2-(1-\lambda)\lambda\{\widetilde{B}_1(1)\}^2+(1-\lambda)^2\{\widetilde{B}_2(0)\}^2}{\lambda^2\int_0^1 \widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1 \widetilde{B}_2(u)^2du}-1$$

を得る。確率積分に関する伊藤の補題により,

$$\int_0^1 \widetilde{B}_i(u)dB_i(u)=\frac{\{\widetilde{B}_i(1)\}^2-\{\widetilde{B}_i(0)\}^2-1}{2}$$

であるから,

$$T(\widehat{\phi}-1)\xrightarrow{w}$$

$$\frac{\frac{\lambda}{2}\{\widetilde{B}_1(0)\}^2+\left(\lambda^2-\frac{\lambda}{2}\right)\{\widetilde{B}_1(1)\}^2+\left\{(1-\lambda)^2-\frac{1-\lambda}{2}\right\}\{\widetilde{B}_2(0)\}^2+\frac{1-\lambda}{2}\{\widetilde{B}_2(1)\}^2-\frac{1}{2}}{\lambda^2\int_0^1 \widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1 \widetilde{B}_2(u)^2du}-1$$

となる。

次に $s^2\xrightarrow{p}\sigma^2$ を証明する。$\widehat{e}=Y-X_*\widehat{\phi}$, $\Delta\widehat{U}_t=[\Delta\widehat{u}_2\ \Delta\widehat{u}_3\ldots\Delta\widehat{u}_T]'$ とすると,

$$\begin{aligned}
\widehat{e}'\widehat{e}&=Y'Y-Y'X_*(X_*'X_*)^{-1}X'_*Y\\
&=\{X+(Y-X_*)\}'M_{X*}\{X_*+(Y-X_*)\}\\
&=(Y-X_*)'M_{X*}(Y-X_*)+X_*'M_{X*}X_*+2X_*'M_{X*}(Y-X_*)\\
&=(Y-X_*)'M_{X*}(Y-X_*)\\
&=[\Delta\widehat{U}_t'\ -\Delta\widehat{U}_t']M\begin{bmatrix}W & O\\ O & I-W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\widehat{U}_t\\ -\Delta\widehat{U}_t\end{bmatrix}-\frac{\left\{[\Delta\widehat{U}_t'\ -\Delta\widehat{U}_t']\begin{bmatrix}W & O\\ O & I-W\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}\widehat{U}_{t-1}\\ \widehat{U}_t\end{bmatrix}\right\}^2}{[\widehat{U}_{t-1}'\ \widehat{U}_t']M\begin{bmatrix}W & O\\ O & I-W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{U}_{t-1}\\ \widehat{U}_t\end{bmatrix}}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, $\widehat{U}_t'W\widehat{U}_t=\widehat{U}_{t-1}'W\widehat{U}_{t-1}+w_T\widehat{u}_{T-1}^2-w_2\widehat{u}_1^2$ 及び $\widehat{U}_t'\widehat{U}_t=\widehat{U}_{t-1}'\widehat{U}_t+\widehat{u}_{T-1}^2-\widehat{u}_1^2$ から,

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{U}_{t-1}'W\widehat{U}_{t-1}+\widehat{U}_t'(I-W)\widehat{U}_t}{T^2}&=\frac{\widehat{U}_{t-1}'\widehat{U}_{t-1}+\widehat{u}_{T-1}^2-\widehat{u}_1^2-w_T\widehat{u}_{T-1}^2+w_2\widehat{u}_1^2}{T^2}\\
&=\frac{\widehat{U}_{t-1}'\widehat{U}_{t-1}}{T^2}+\frac{1}{T^3}\widehat{u}_{t-1}^2-\frac{1}{T^2}\left(1-\frac{1}{T}\right)\widehat{u}_1^2\\
&=\frac{\widehat{U}_{t-1}'\widehat{U}_{t-1}}{T^2}+o_p(1)
\end{aligned}$$

となること，そして，$0<w_t<1$ より，$\dfrac{\Delta\widehat{U}_t'W\widehat{U}_{t-1}}{T}<\dfrac{\Delta\widehat{U}_t'\widehat{U}_{t-1}}{T}=O_p(1)$，$\dfrac{\Delta\widehat{U}_t'(I-W)\widehat{U}_t}{T}<\dfrac{\Delta\widehat{U}_t'\widehat{U}_t}{T}=O_p(1)$ がいえること，M がデータを1つ落とすだけの操作であるから，漸近的には無視できることの3つから，

$$s^2=\frac{\widehat{e}'\widehat{e}}{T-7}\approx\frac{\Delta\widehat{U}_t'M\Delta\widehat{U}_t}{T}-\frac{\left(\dfrac{\Delta\widehat{U}_t'W\widehat{U}_{t-1}}{T}-\dfrac{\Delta\widehat{U}_t'(I-W)\widehat{U}_t}{T}\right)^2}{T\dfrac{\widehat{U}_{t-1}'\widehat{U}_{t-1}}{T^2}}=\frac{\Delta\widehat{U}_t'\Delta\widehat{U}_t}{T}+o_p(1)$$

従って，

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\Delta\widehat{U}_t'M\Delta\widehat{U}_t'&=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1}(\Delta\widehat{u}_t)^2-\frac{1}{T}\Delta\widehat{u}^2_{T_B+1}\\&=\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{T}}-\frac{12\sum_{s=1}^{\lambda T}\xi_{[1,s]}(s-\overline{T}_1)}{\lambda T\sqrt{T}(\lambda^2T^2-1)}DU_{1t}-\frac{12\sum_{s=1}^{(1-\lambda)T}\xi_{[T_B+1,T_B+s]}(s-\overline{T}_2)}{(1-\lambda)T\sqrt{T}((1-\lambda)^2T^2-1)}DU_{2t}\right)^2\\&=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2+o_p(1)\end{aligned}$$

ここから，$s^2\xrightarrow{p}\sigma^2$ である．よって，

$$\begin{aligned}\tau_w&=\frac{\widehat{\phi}-1}{s\sqrt{(X'X)^{11}}}\\&\xrightarrow{w}\frac{\dfrac{\lambda}{2}\{\widetilde{B}_1(0)\}^2+\left(\lambda^2-\dfrac{\lambda}{2}\right)\{\widetilde{B}_1(1)\}^2+\left\{(1-\lambda)^2-\dfrac{1-\lambda}{2}\right\}\{\widetilde{B}_2(0)\}^2+\dfrac{1-\lambda}{2}\{\widetilde{B}_2(1)\}^2-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du}}\\&\quad-\sqrt{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du}\end{aligned}$$

を得る。

［最終段階の回帰式について］

2段階目の回帰式

$$\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_t\\\sqrt{I-W}\widehat{U}_{t-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_{t-1}&\sqrt{W}D_t&O\\\sqrt{I-W}\widehat{U}_t&O&\sqrt{I-W}D_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\\gamma_1\\\gamma_2\end{bmatrix}+e$$

の代わりに

$$\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_t\\\sqrt{I-W}\widehat{U}_{t-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{W}\widehat{U}_{t-1}&\sqrt{W}D_t\\\sqrt{I-W}\widehat{U}_t&\sqrt{I-W}D_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\\gamma_1\end{bmatrix}+e$$

としても上記の回帰と漸近的には同じ分布を与える。この場合 ϕ については，以下の回帰と同等になる。

$$[\sqrt{w_2}\,\widehat{u}_2,\ \ldots,\ \sqrt{w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B},\ \sqrt{w_{T_B+1}}\,(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B}+\widehat{u}_{T_B+1}),\ \sqrt{w_{T_B+2}}\,\widehat{u}_{T_B+2},\ \ldots,$$

$$\sqrt{w_T}\,\widehat{u}_T,\ \sqrt{1-w_2}\,\widehat{u}_1,\ \ldots,\ \sqrt{1-w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B-1},\ \sqrt{1-w_{T_B+1}}\,w_{T_B+1}(\widehat{u}_{T_B}+\widehat{u}_{T_B+1}),$$

$$\sqrt{1-w_{T_B+2}}\,\widehat{u}_{T_B+1},\ \ldots,\ \sqrt{1-w_T}\,\widehat{u}_{T-1}]'$$

$$=[\sqrt{w_2}\,\widehat{u}_1,\ \ldots,\ \sqrt{w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B-1},\ \sqrt{w_{T_B+1}}\,(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B}+\widehat{u}_{T_B+1}),$$

$$\sqrt{w_{T_B+2}}\,\widehat{u}_{T_B+1},\ \ldots,\ \sqrt{w_T}\,\widehat{u}_{T-1},$$

$$\sqrt{1-w_2}\,\widehat{u}_2,\ \ldots,\ \sqrt{1-w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B},\ \sqrt{1-w_{T_B+1}}\,w_{T_B+1}(\widehat{u}_{T_B}+\widehat{u}_{T_B+1}),$$

$$\sqrt{1-w_{T_B+2}}\,\widehat{u}_{T_B+2},\ \ldots,\ \sqrt{w_T}\,\widehat{u}_T]'\phi+e$$

これから，

$$\widehat{\phi}=$$

$$\frac{\sum_{t=2}^{T_B}w_t\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=T_B+2}^{T}w_t\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=2}^{T_B}(1-w_t)\,\widehat{u}_{t-1}\widehat{u}_t+\sum_{t=T_B+2}^{T}(1-w_t)\,\widehat{u}_{t-1}\widehat{u}_t+w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}+\widehat{u}_{T_B})^2}{\sum_{t=2}^{T_B}w_t\widehat{u}_{t-1}^2+\sum_{t=T_B+2}^{T}w_t\widehat{u}_{t-1}^2+\sum_{t=2}^{T_B}(1-w_t)\,\widehat{u}_t^2+w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}+\widehat{u}_{T_B})^2}$$

となる。したがって，$\widehat{\phi}-1=\frac{A}{B}$，ただし，

$$A=\sum_{t=2}^{T_B}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}+\sum_{t=T_B+2}^{T}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}$$

$$+(1-w_2)\,\widehat{u}_t^2-\sum_{t=3}^{T_B}(w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2-(1-w_{T_B})\,\widehat{u}_{T_B}^2$$

$$+(1-w_{T_B+1})\,\widehat{u}_{T_B+1}^2+\sum_{t=T_B+3}^{T}(w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2-(1-w_T)\,\widehat{u}_T^2$$

$$B=w_2\widehat{u}_1^2+\sum_{t=3}^{T_B}(1+w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_{T_B})\,\widehat{u}_{T_B}$$

$$+w_{T_B+2}\widehat{u}_{T_B+1}^2+\sum_{t=T_B+3}^{T}(1+w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_T)\,\widehat{u}_T^2$$

$$+w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}+\widehat{u}_{T_B})^2$$

である。これは，前の推定量と分母が $w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}+\widehat{u}_{T_B})^2$ だけことなる。この漸近挙動は，Donsker の不変原理などから，

$$\frac{w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}+\widehat{u}_{T_B})^2}{T^2}=\frac{T_B}{T}\,\frac{T-T_B}{T}\left(\frac{\widehat{u}_{T_B+1}+\widehat{u}_{T_B}}{\sqrt{T}}\right)^2\frac{1}{T}\xrightarrow{p}0$$

であるから，$T(\widehat{\phi}-1)$ に関して定理 1 と同一の漸近分布を与える。$\widehat{\phi}\xrightarrow{p}1$ より，回帰式の最終列の 2 つの D_t が 1 になる行に対する各残差に対して，それぞれ上の D_t に対する残差を $\widehat{e}_{T_B+1,1}^2$，下の D_t に対する残差を $\widehat{e}_{T_B+1,2}^2$ とすると，それぞれの確率極限がともに 0 である

ことがわかり，これらが $s^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ に影響を与えないことがわかる。したがって，τ_w も定理1と同一の漸近分布を持つ。前者と後者の優劣であるが，漸近分布の有限分布の近似としての意味を考えると，0に確率収束する項に依存する項の数が1つ多い後者の方が，推定するパラメータ数が少ないにも関わらず，劣ると考えるべきであろう。

また，2段階目の回帰式が，

$$\begin{bmatrix} \sqrt{W}\widehat{U}_t \\ \sqrt{I-W}\,\widehat{U}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{W}\widehat{U}_{t-1} & \sqrt{W}D_t \\ \sqrt{I-W}\,\widehat{U}_t & \sqrt{I-W}D_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + e$$

のときは，ϕ について同等な回帰は，

$$\Big[\sqrt{w_2}\,\widehat{u}_2, \ldots, \sqrt{w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B}, \sqrt{w_{T_B+1}}(1-w_{T_B+1})\Delta\widehat{u}_{T_B+1}, \sqrt{w_{T_B+2}}\,\widehat{u}_{T_B+2}, \ldots, \sqrt{w_T}\,\widehat{u}_T,$$

$$\sqrt{1-w_2}\,\widehat{u}_1, \ldots, \sqrt{1-w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B-1}, -\sqrt{1-w_{T_B+1}}\,w_{T_B+1}\Delta\widehat{u}_{T_B+1}, \sqrt{1-w_{T_B+2}}$$

$$\widehat{u}_{T_B+1}, \ldots, \sqrt{1-w_T}\,\widehat{u}_{T-1}\Big]'$$

$$=[\sqrt{w_2}\,\widehat{u}_1, \ldots, \sqrt{w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B-1}, -\sqrt{w_{T_B+1}}(1-w_{T_B+1})\Delta\widehat{u}_{T_B+1}, \sqrt{w_{T_B+2}}\,\widehat{u}_{T_B+1}, \ldots,$$

$$\sqrt{w_T}\,\widehat{u}_{T-1},$$

$$\sqrt{1-w_2}\,\widehat{u}_2, \ldots, \sqrt{1-w_{T_B}}\,\widehat{u}_{T_B}, \sqrt{1-w_{T_B+1}}\,w_{T_B+1}\Delta\widehat{u}_{T_B+1}, \sqrt{1-w_{T_B+2}}\,\widehat{u}_{T_B+2}, \ldots,$$

$$\sqrt{w_T}\,\widehat{u}_T]'\phi+e$$

となり，

$$\widehat{\phi}=$$

$$\frac{\sum_{t=2}^{T_B} w_t\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1} + \sum_{t=T_B+2}^{T} w_t\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1} + \sum_{t=2}^{T_B}(1-w_t)\widehat{u}_{t-1}\widehat{u}_t + \sum_{t=T_B+2}^{T}(1-w_t)\widehat{u}_{t-1}\widehat{u}_t - w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})\Delta\widehat{u}^2_{T_B+1}}{\sum_{t=2}^{T_B} w_t\widehat{u}^2_{t-1} + \sum_{t=T_B+2}^{T} w_t\widehat{u}^2_{t-1} + \sum_{t=2}^{T_B}(1-w_t)\widehat{u}^2_t + \sum_{t=T_B+2}^{T}(1-w_t)\widehat{u}^2_t + w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})\Delta\widehat{u}^2_{T_B+1}}$$

したがって，$\widehat{\phi}-1=\frac{A}{B}$，ただし，

$$A=\sum_{t=2}^{T_B}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1} + \sum_{t=T_B+2}^{T}\Delta\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1}$$

$$+(1-w_2)\,\widehat{u}^2_1 - \sum_{t=3}^{T_B}(w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}^2_{t-1} - (1-w_{T_B})\,\widehat{u}^2_{T_B}$$

$$+(1-w_{T_B+1})\,\widehat{u}^2_{T_Bt+1} + \sum_{t=T_B+3}^{T}(w_t-w_{t-1})\,\widehat{u}^2_{t-1} - (1-w_T)\,\widehat{u}^2_T$$

$$-2w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})\Delta\widehat{u}^2_{T_B+1}$$

$$
\begin{aligned}
B=&w_2\widehat{u}_1^2+\sum_{t=3}^{T_B}(1+w_t-w_{t-1})\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_{T_B})\widehat{u}_{T_B}^2\\
&+w_{T_B+2}\widehat{u}_{T_B+1}^2+\sum_{t=T_B+3}^{T}(1+w_t-w_{t-1})\widehat{u}_{t-1}^2+(1-w_T)\widehat{u}_T^2\\
&+w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})\Delta\widehat{u}_{T_B+1}^2
\end{aligned}
$$

である。ここで，

$$
\begin{aligned}
\frac{w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}-\widehat{u}_{T_B})^2}{T}&=\frac{T_B}{T}\frac{T-T_B}{T}\left(\sqrt{1-\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B+1}}{\sqrt{(1-\lambda)T}}-\sqrt{\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B}}{\sqrt{\lambda T}}\right)^2\\
&\xrightarrow{w}\lambda(1-\lambda)\sigma^2(\sqrt{1-\lambda}\widetilde{B}_2(0)-\sqrt{\lambda}\widetilde{B}_1(1))^2
\end{aligned}
$$

と

$$
\frac{w_{T_B+1}(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}-\widehat{u}_{T_B})^2}{T^2}=\frac{T_B}{T}\frac{T-T_B}{T}\left(\sqrt{1-\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B+1}}{\sqrt{(1-\lambda)T}}-\sqrt{\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B}}{\sqrt{\lambda T}}\right)^2\frac{1}{T}\xrightarrow{p}0
$$

とを考慮に入れると，

$$
\begin{aligned}
&T(\widehat{\phi}-1)\\
&\xrightarrow{w}\\
&\frac{\frac{\lambda}{2}\{\widetilde{B}_1(0)\}^2+\lambda(4\lambda^2-2\lambda-1)\frac{\{\widetilde{B}_1(1)\}^2}{2}+(1-\lambda)(4\lambda^2-6\lambda+1)\frac{\{\widetilde{B}_2(0)\}^2}{2}+\frac{1-\lambda}{2}\{\widetilde{B}_2(1)\}^2-\frac{1}{2}}{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}(u)^2du+4\lambda(1-\lambda)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\widetilde{B}_2(0)\widetilde{B}_1(1)}-1
\end{aligned}
$$

$\widehat{\phi}\xrightarrow{p}1$ より，回帰式の最終列のふたつの D_t が 1 になる行に対する残差の s^2 に対する貢献，$\frac{\widehat{e}^2{}_{T_B+1,1}}{T}$ と $\frac{\widehat{e}^2{}_{T_B+1,2}}{T}$ とはともに退化しない極限分布を持ち，

$$
\begin{aligned}
\frac{\widehat{e}^2{}_{T_B+1,1}}{T}&=\frac{4w(1-w_{T_B+1})^2(\widehat{u}_{T_B+1}-\widehat{u}_{T_B})^2}{T}=4\lambda(1-\lambda)^2\left(\sqrt{1-\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B+1}}{\sqrt{(1-\lambda)T}}-\sqrt{\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B}}{\sqrt{T}}\right)^2\\
&\xrightarrow{w}4\lambda(1-\lambda)^2\sigma^2(\sqrt{1-\lambda}\widetilde{B}_2(0)-\sqrt{\lambda}\widetilde{B}_1(1))^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\widehat{e}^2{}_{T_B+1,2}}{T}&=\frac{4w_{T_B+1}^2(1-w_{T_B+1})(\widehat{u}_{T_B+1}-\widehat{u}_{T_B})^2}{T}=4\lambda^2(1-\lambda)\times\\
&\left(\sqrt{1-\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B+1}}{\sqrt{(1-\lambda)T}}-\sqrt{\lambda}\frac{\widehat{u}_{T_B}}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\\
&\xrightarrow{w}4\lambda^2\sigma^2(1-\lambda)(\sqrt{1-\lambda}\widetilde{B}_2(0)-\sqrt{\lambda}\widetilde{B}_1(1))^2
\end{aligned}
$$

である。したがって，$s^2\xrightarrow{w}\sigma^2(1+4\lambda(1-\lambda)(\sqrt{1-\lambda})\widetilde{B}_2(0)-\sqrt{\lambda}\widetilde{B}_1(1))^2)$

となり，s^2 は一致性を持たない。

$$\tau_w \xrightarrow{w}$$

$$\frac{\frac{\lambda}{2}\{\widetilde{B}_1(0)\}^2+\lambda(4\lambda^2-2\lambda-1)\frac{\{\widetilde{B}_1(1)\}^2}{2}+(1-\lambda)(4\lambda^2-6\lambda+1)\frac{\{\widetilde{B}_2(0)\}^2}{2}+\frac{1-\lambda}{2}\{\widetilde{B}_2(1)\}^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+4\lambda(1-\lambda)(\sqrt{1-\lambda}\,\widetilde{B}_2(0)-\sqrt{\lambda}\,\widetilde{B}_1(1))^2}\sqrt{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du}}$$

$$\frac{+4\lambda(1-\lambda)\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\,\widetilde{B}_2(0)\,\widetilde{B}_1(1)}{}-\frac{\sqrt{\lambda^2\int_0^1\widetilde{B}_1(u)^2du+(1-\lambda^2)^2\int_0^1\widetilde{B}_2(u)^2du}}{\sqrt{1+4\lambda(1-\lambda)(\sqrt{1-\lambda}\,\widetilde{B}_2(0)-\sqrt{\lambda}\,\widetilde{B}_1(1))^2}}$$

となる。その統計量の漸近分布の複雑さ，s^2 の一致性の欠如とから，これが1，2番目の統計量より劣っているのはいうまでもない。また，以上の議論に

$$\Phi(\phi,\gamma,m)=\sum_{t=2}^{T}w_t\{\widehat{u}_t-\phi\,\widehat{u}_{t-1}-\gamma_1D_t-m(t)\}^2+\sum_{t=1}^{T-1}(1-w_{t+1})\{\widehat{u}_t-\phi\,\widehat{u}_{t+1}-\gamma_2D_{t+1}-m(t)\}^2$$

ではWS推定量を構築できないという理由の本質が表れている．

参 考 文 献

Benerjee, A., Lumsdaine, L. and J. H. Stock (1992) "Recursive and Sequential Tests of the Unit-Root and Trend-Break Hypothesis; Theory and International Evidence," *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 271-287.

Davidson, R. and J. G. MacKinnon (1993) '*Estimation and Inference in Econometrics*,' Oxford University Press.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1979) "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-31.

Fuller, W. A. (1996) '*Introduction to Statistical Time Series* (*2nd Edition*)," John Wiley & Sons.

Morimune, K. (森棟公夫) and M. Nakagawa (中川 満) (2001) "Power Comparisons of the Discontinuous Trend Unit Root Tests," in 'Nonlinear Statistical Modeling : Procedings of the Thirteenth International Symposium in Economic Theory and Econometrics : Essays in Honor of Takeshi Amemiya,' Edited by C. Hsiao, K. Morimune and J. L. Powell, Combridge Uqiversity Press.

Nakagawa, M. (中川 満) (2001) "Finite Sample Properties of the Coefficient Tests for Unit Root Tests with Discontinuous Trend," Osaka City Univesity Economic Review (forthcoming).

Nelson, C. R.and C. I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series," *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.

Park, H. J. and W. A. Fuller (1995) "Alternative Estimators and Unit Root Tests for the Autoregressive Process," *Jouinal of Time Series Analysis*, 16, 415-429.

Perron, P. (1989) "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis," *Ecoonmetrica*, 57, 1361-1401.

Perron, P. (1997) "Further Evidence on Breaking Trend Functions in Macroeconomic Variables," *Journal of Econometrics*, 80, 355-385.

Perron, P. and Vogelsang, J. (1992) "Nonstationarity and Level Shifts with an Application to Purchasing Power Parity," *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 301-320.

Perron, P. and Vogelsang, J. (1993) "Erratum for The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis", *Econometrica*, 61, 248-249.

Vogelsang, T. J. and P. Perron (1998) "Additional Tests for a Unit Root Allowing for a Break in the Trend Function at an Unknown Time," *International Economic Review*, 39, 1073-1100.