Title	「アロウの一般不可能性定理」とその政治学的含意
Author	大谷 和
Citation	経済学雑誌, 98 巻 4 号, p.23-42.
Issue Date	1997-11
ISSN	0451-6281
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	Publisher
Publisher	大阪市立大学経済学会
Description	大川勉・星川順一両教授退任記念号(2)
DOI	

「アロウの一般不可能性定理」とその政治学的含意

大　谷　　　和

アロウの一般不可能性定理は，アロウの研究の中で，特異な位置をしめている。アロウの一般均衡論の議論や「市場の失敗」問題に比べると，経済学に関係しているものかどうか，論議が多い。Samuelson〔4〕は，数理政治学に属するものとしている。この小論では，アロウのこの定理が，どういう意味で政治学原理（特にアメリカ流の民主主義の原理）に基礎をおいているか，を検討することを主な目的としている。

Ⅰでは，アロウの一般不可能性定理の，表というわかりやすい視覚的方法による証明をおこない，Ⅱでは，アロウの一般不可能性定理の２つの公理，４つの条件の政治学原理との関連性をたずね，さらに，われわれが試みる，パレート原理条件（条件２），独立性条件（条件３）が成立しない場合の表による証明を示す。Ⅲでは，これらの公理と条件がアロウの母国アメリカの民主主義原理によって，いかに影響されているかを述べる。

Ⅰ　アロウの一般不可能性定理の表による証明

アロウの一般不可能性定理はArrow〔1〕で，まとまった形で示されているが，この小論では，この定理の，よりわかりやすいFeldman〔2〕〔3〕による表による証明を示す。

アロウの一般不可能性定理は，次の４つの条件と２つの公理と，社会的選択関数から構成されており，それぞれを以下のように定義する。

1. ４つの条件，２つの公理，社会的選択関数，の定義

４つの条件

〔キー・ワーズ〕
アロウの一般不可能性定理，アメリカ民主主義の原理

(1) 定義域の無制約性条件（これからは条件1と呼ぶことにする）

社会的選択関数を導くための基礎となる個々人の選好がこの関数の定義域を形成していくのであるが，この個々人の選好には，どんな制約を設けないということを意味する。この無制約性を緩和すると，単峰性，2つのグループに分離される選好性，対立的な選好性，タブー型選好性などという諸性質を満たす個々人の選好を考える場合には，アロウの定理が修正可能となるかどうかという問題や，アロウの定理の1変形であるセンのリベラル・パラドックスの問題が生じる。Feldman〔3〕では，この条件がおかれる理由として①許容できる個人選好と，許容できない個人選好との違いを明確に区別することの困難なこと，②この条件をかなり緩和しても，やはりアロウの定理が成立すること，を挙げている。

(2) パレート原理条件（条件2と呼ぶ）

その社会の全ての人々が，全員一致で，ある社会状態（選択対象）xは社会状態yよりもよりよいと選好するならば，社会的順序においても，xをyよりもよりよいとしなければならないということを意味する。民主主義を是認する立場からは当然成立しなければならない条件であるが，他人との微妙な差異を当然のこととする自由主義の立場からは，全員一致ほど極端でないにしても，これに近い社会状況は，少数派の意見の軽視，無視を生じさせることになりやすく，必ずしも承認できない条件であるし，自由主義社会の現実を無視する条件でもある。このような社会的な意味合いを持つこのパレート原理条件は，自由主義の条件を示して議論しようとするセンのリベラル・パラドックス問題と関連する。また，個人の選好を制約するという点では，条件1とも関連してくる条件である。条件2は全員一致を社会的に合法性を持つものとして，「多数派の専制」を招く可能性がある問題の多い条件でもある。

(3) 無関係な選択対象（＝社会状態）からの独立性条件（条件3と呼ぶ）

ある一部の選択対象の間での社会的選択が問題になっている時には，その選択は，それ以外の選択対象の存在によって影響されてはならないという条件である。より具体的には，社会状況$x, y, z\cdots$のうち，xとyのいずれがよりよいか悪いかを社会的に決定しようとしている時，それは各個人の，x, y間の選好のみにもとづいて決定されねばならないということを意味する。Feldman〔3〕は，アロウの定理を構成している4つの条件，2つの公理のうちで，この条件3は最も批判されるべき点があるものとしている。社会的選択の決定というからには，他人の意向の考慮をしながら，個々人が自らの選好を表現することが多いわけで，アロウの一般不可能性定理の数学的証明には，このⅠでわかるが強力な役割を果たす条件になっている反面，アロウの定理を現実問題に適用する時には障害となりやすい条件である。また，この条件からは，他人の意向を考慮して，自己の選好を不正直に表現することにより，社会的決定を自己に有利なようにしようとする個々人の不正操作可能性問題が関連してくる。またアロウの定理の現実的適用として多数決による社会的決定方法を考え，その投票法としてWeight Voting（第1位の選択対象にはm点，第2位の選択対象にはm−1点，……とい

う形で重みをつけて，順位を決める方法）を採用した時，この独立性条件はいとも簡単に破壊されてしまうことは容易に証明される。

(4) 非独裁性条件（条件４と呼ぶ）

社会的選択の決定は，ただ１人の個人による選好によって決定されてはならないという条件である。すなわち，その独裁者以外の個々人の選好にかかわりなく，独裁者が社会状態 x を，他の社会状態 y よりもよりよいとすれば，社会的順序も x を y よりよいとなるような独裁者の存在を排除するという条件である。国民主権を正しいとする民主主義の政治理論からは当然の条件と考えられている。Feldman〔３〕は，この条件がおかれる理由として，①各個人にとって最悪の敵が独裁者ならば，耐え難い政治体制になること，②独裁者のみの選好は，そもそも社会的選択の決定ではなく，個人的選好であること，の２点を挙げている。アロウの定理を回避するために，次にあげる，２つの公理のうちの推移性を緩和すると，Ⅱで述べるように，アロウの定理からでてくる，この独裁者の存在は，寡頭支配グループの存在，拒否権所有者の存在（ともに，一種の貴族政）に変形される一般不可能性定理に変わる。しかし，全く独裁性の要素がない社会的決定が常に現実に存在するかどうか疑問が残る。

次に，先の４条件とともに，各個人の選好順序と社会的順序の両方について連結性，推移性という２つの公理を満たさねばならないとする。

2つの公理：

連結性（＝完全性）の公理：

どんな選択対象（社会状態）についても，必ず，どちらかを，より選好する（無差別を含めて）ということを示すという性質，すなわち，全く無視して選好しないということはないという性質である。$\forall i \in N,\ \forall x,\ y \in X : xRy$ or yRx.

xRy は x を y よりも選好する（無差別も含めて）ことを示す。

推移性の公理：

どんな選択対象についても，x を y よりも望ましいとし，y を z より望ましいとする時には，必ず，x は z よりも望ましくなるという性質，$\forall i \in N,\ \forall x,\ y,\ z \in X : xRy\ \&\ yRz \rightarrow xRz$.

最後に，社会的選択関数（ルール）を定義すると

社会的選択関数（ルール）（Social Choice Function, SCF と略す）：

各個人の，いろいろな個人的選好順序を，社会的順序に変換する関数（ルール）を社会的選択関数（ルール）とする。

数式で示すと，

$R = F(R_1, R_2 \cdots\cdots R_n)$ 但し，R：社会的順序，R_i：i という個人の選好順序，F：社会的選択関数（ルール）

ここでの社会的選択関数は，Arrow〔1〕でいう社会的厚生関数（Social Welfare Function）と同義であるが，Arrow と Bergson との間には「社会的厚生関数論争」という，

内容より言葉の定義の論争があることから，われわれがこうした言葉の定義論争という不毛な論争の枠外にいるために，以後，社会的選択関数という表現のみを使う。なお，特にことわらないかぎり，この社会的選択関数は，社会的に best のみを決定するものになる。アロウの本来の社会的厚生関数では，全ての選択対象について，この関数によって，一度に完全に順序づけることを狙っているが，現実には，best の選択対象は何かということを知りたいことが多いのであるので，こうした社会的選択関数で十分であると考える。

次に，「アロウの一般不可能性定理」を述べる。

〔アロウの一般不可能性定理〕

上記の4つの条件，2つの公理を全て同時に満足するような社会的選択関数（ルール）は，一般的には存在しない（存在するどんな1例もありえないという意味で）。

2. フェルドマンの表によるアロウの一般不可能性定理の証明

Feldman〔2〕〔3〕は，アロウの一般不可能性定理を表を使うことにより，2個人，3選択対象の場合について明快に証明した。この表による証明は，アロウの一般不可能性定理自体の意味，4つの諸条件，2つの公理のそれぞれの意味合いを，具体的に表により表現することにより，明快な形にするというプラス面とともに，IIの4，5でわれわれがおこなうように，他の議論にも簡単に応用できるというプラス面を持っている。次に表による証明をおこなう。

最も簡単な場合，2個人，3選択対象（x, y, z）で考え，4つの条件，2つの公理を仮定する。ただし，この2では，無差別な選好の可能性を排除し，例えば xP_iy のように，強意の順序の場合だけで考えている。ここで，xP_iy は i という個人が x を y より選好（無差別性は除く）することを示す。この時，ある個人の選好の可能性は，次のように6通りになる。(3！＝6)。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

但し，上位のものがより選好されるとする。

また，2個人からなる社会を考えているので，この社会での全選好の可能性としては，次の表1のように，36通りが考えられる。(3！×3！＝6×6＝36)

この表1の，36通りからなる個々人の選好の組合わせを前述の6つの中のいずれかの社会的順序に変換するような，「適切な」社会的選好ルール（関数）は，この1で述べた4つの条件，2つの公理のもとでは，存在できないというのが，表による「アロウの一般不可能性定理」の意味することである。

この表から，1で述べた4つの条件を考えてみる。

条件1の定義域の無制約性条件とは，この36通りの全可能性を認めるということである。そ

表 1

選好順序＼個人	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
第 1 位	x	x	x	x	x	y	x	y	x	z	x	z
第 2 位	y	y	y	z	y	x	y	z	y	x	y	y
第 3 位	z	z	z	y	z	z	z	x	z	y	z	x
第 1 位	x	x	x	x	x	y	x	y	x	z	x	z
第 2 位	z	y	z	z	z	x	z	z	z	x	z	y
第 3 位	y	z	y	y	y	z	y	x	y	y	y	x
第 1 位	y	x	y	x	y	y	y	y	y	z	y	z
第 2 位	x	y	x	z	x	x	x	z	x	x	x	y
第 3 位	z	z	z	y	z	z	z	x	z	y	z	x
第 1 位	y	x	y	x	y	y	y	y	y	z	y	z
第 2 位	z	y	z	z	z	x	z	z	z	x	z	y
第 3 位	x	z	x	y	x	z	x	x	x	y	x	x
第 1 位	z	x	z	x	z	y	z	y	z	z	z	z
第 2 位	x	y	x	z	x	x	x	z	x	x	x	y
第 3 位	y	z	y	y	y	z	y	x	y	y	y	x
第 1 位	z	x	z	x	z	y	z	y	z	z	z	z
第 2 位	y	y	y	z	y	x	y	z	y	x	y	y
第 3 位	x	z	x	y	x	z	x	x	x	y	x	x

表 2

$x\ p\ y$ $x\ p\ z$ $y\ p\ z$	$x\ p\ y$ $x\ p\ z$	$x\ p\ z$ $y\ p\ z$	$y\ p\ z$	$x\ p\ y$	
$x\ p\ y$ $x\ p\ z$	$x\ p\ y$ $x\ p\ z$ $z\ p\ y$	$x\ p\ z$		$x\ p\ y$ $z\ p\ y$	$z\ p\ y$
$x\ p\ z$ $y\ p\ z$	$x\ p\ z$	$x\ p\ z$ $y\ p\ x$ $y\ p\ z$	$y\ p\ x$ $y\ p\ z$		$y\ p\ x$
$y\ p\ z$		$y\ p\ x$ $y\ p\ z$	$y\ p\ z$ $y\ p\ x$ $z\ p\ x$	$z\ p\ x$	$y\ p\ x$ $z\ p\ x$
$x\ p\ y$	$x\ p\ y$ $z\ p\ y$		$z\ p\ x$	$x\ p\ y$ $z\ p\ x$ $z\ p\ y$	$z\ p\ x$ $z\ p\ y$
	$z\ p\ y$	$y\ p\ x$	$y\ p\ x$ $z\ p\ x$	$z\ p\ x$ $z\ p\ y$	$y\ p\ x$ $z\ p\ x$ $z\ p\ y$

して，この無制約性を，制約性に変え，アロウの定理を否定するということは，単峰性に代表される制約性を，この36通りの全可能性の中に入れこむことにより，36通りよりも少ない可能性にしぼりこむことになり，「適切な」社会的選好ルールの存在が可能になることを意味する。

条件2のパレート原理条件は，両人とも，例えば $xP_i y(i=1, 2)$ という状況ならば，x は社会的にも，y より選好されなければならないというもので，表1にこの条件を適用すれば，次の表2のようなものが得られる。この表2から，わかるように，表1の対角線上の選好は，全員一致状態を意味しており，全員一致制は，1つの社会的選択ルールとなりえることがわかる。この全員一致制（＝満場一致制）は，国民に対して強力な情報操作や圧迫を加えることにより，独裁制を維持する政治体制が民主主義を装う制度として有効で，過去，現在を問わず利用されているものである。

条件3の無関係な選択対象からの独立性条件は，たとえば表1中の（xP_1y, yP_2x）の組合わせでは，他の同じ組合わせの個所でも，同じ x, y についての社会的順序に，必ずならなければならないことを意味する強力な条件である。こうして，この条件3は，個々人の，ある選好表については，同じ社会的順序を生み出す様に社会的選択ルールに強制を迫る条件といえる。理論的には，必要性の高い条件だが，現実を考えると厳しすぎる条件であることは確かである。この条件3を表1に適用すれば，次の表3（3A，3B，3C）になる。条件4については証明の中で説明する。

独立性条件を入れると表1は，次のように3つの表に分類される。

表3A

	×			×	×
○		○	○		
	×			×	×
	×			×	×
○		○	○		
○		○	○		

×…（yP_1z, zP_2y）の組合わせのケース
○…（zP_1y, yP_2z）の組合わせのケース

表３Ｂ

			△	△	△
			△	△	△
			△	△	△
□	□	□			
□	□	□			
□	□	□			

△… (xP_1z, zP_2x)の組合わせのケース
□… (zP_1x, xP_2z)の組合わせのケース

表３Ｃ

		※	※		※
		※	※		※
⏢	⏢			⏢	
⏢	⏢			⏢	
		※	※		※
⏢	⏢			⏢	

※… (xP_1y, yP_2x)の組合わせのケース
⏢… (yP_1x, xP_2y)の組合わせのケース

〔アロウの定理の証明〕

表１の第１行，第２列の選好個所 $\begin{pmatrix} x & x \\ y & z \\ z & y \end{pmatrix}$ から考えてみよう。条件２のパレート原理条件より，xPy, xPz となる。この xPy, xPz を満足するのは，次の３つのケースに限定される。（但し，連結性，推移性の２つの公理は仮定されている）

① xPy, xPz, yPz…………ケースⅠと呼ぶ

② xPy, xPz, zPy…………ケースⅡと呼ぶ

③ xPy, xPz, yIz…………ケースⅢと呼ぶ

無差別性（Ｉ）を考えないとしているのに，ケースⅢを考えるのは矛盾しているが，以下で証明するように，ケースⅢでは矛盾が生じ，もともと考えられないケースであることが判明する。

まず，ケースⅠについて検討する。

(a)　ケースⅠ→ yPz

表4 A

	yPz			yPz	yPz
	yPz			yPz	yPz
	yPz			yPz	yPz

表4 B

			xPz	xPz	xPz
			xPz	xPz	xPz
			xPz	xPz	xPz

上記の表2の空白のところを，表3で表わした条件3の無関係な選択対象からの独立性条件を，何回も適用して，うめていくという方法をとる。

表3Aでの×印のところを，yPzとしてうめていくと次の表4Aになる。

次に，表4Aの1行5列目のところを注目すると，パレート原理条件からxPy（表2）となっている。このxPyとyPzとから，推移性によりxPzとなる。表3Bの△印に，この1行5列目の個所はあたることにより，表3Bの△印のところは，全てxPzとなるはずである。こうして，次の表4Bのように，うめられる。

この表4Bの2行6列目のところに注目すると，パレート原理条件からzPy（表2）となっている。このzPyとxPzとから，推移性により，xPyが成立する。表3Cの※印に，この個所があたることにより，表3Cの他の※印の個所もxPyが成立するはずである。こうして，次の表4Cのように，表3Cの※印がうめられる。

表4 C

		xPy	xPy		xPy
		xPy	xPy		xPy
		xPy	xPy		xPy

表4 D

zPy		zPy	zPy		
zPy		zPy	zPy		
zPy		zPy	zPy		

表4Cの5行4列目のxPyに注目し，さらに，表2では，この個所ではzPxが成立しており，zPxとxPyに対して推移性を適用するとzPyとなる。表3Aでは，この5行4列目は○

表 4 E

zPx	zPx	zPx			
zPx	zPx	zPx			
zPx	zPx	zPx			

表 4 F

yPx	yPx			yPx	
yPx	yPx			yPx	
yPx	yPx			yPx	

印にあたるところであるため，条件 3 により，表 3 A の○印は全て **zPy** になる。こうして，次の表 4 D ができあがる。

表 4 D の 6 行 3 列目の **zPy** に注目し，また表 2 では，この個所は，**yPx** が成立している。**zPy** と **yPx** に対して推移性を適用すると **zPx** となる。表 3 B では，この 6 行 3 列目は□印にあたり，こうして，条件 3 より，表 3 B の□印は全て **zPx** になる。こうして，表 4 E ができあがる。

表 4 E の 4 行 1 列目の **zPx** に注目し，また表 2 では，この個所で **yPz** が成立している。**yPz**

表 5

xPy	x	xPy	x	xPz	x	yPz	x	xPy	x	yPz	x
xPz	y	xPz	y	yPz	y	xPz	y	yPz	y	xPz	y
yPz	z	yPz	z	xPy	z	xPy	z	xPz	z	xPy	z
xPy	x	xPy	x	xPz	x	xPz	x	xPy	x	zPy	x
xPz	z	xPz	z	xPy	z	xPy	z	zPy	z	xPz	z
zPy	y	zPy	y	zPy	y	zPy	y	xPz	y	xPy	y
xPz	y	xPz	y	xPz	y	yPx	y	yPz	y	yPz	y
yPz	x	yPz	x	yPx	x	yPz	x	xPz	x	xPz	x
yPx	z	yPx	z	yPz	z	xPz	z	yPx	z	yPx	z
yPz	y	yPz	y	yPx	y	yPz	y	zPx	y	yPx	y
zPx	z	zPx	z	yPz	z	yPx	z	yPz	z	yPz	z
yPx	x	yPx	x	zPx	x	zPx	x	yPx	x	zPx	x
xPy	z	xPy	z	xPy	z	zPx	z	xPy	z	zPx	z
zPy	x	zPy	x	zPy	x	xPy	x	zPx	x	zPy	x
zPx	y	zPx	y	zPx	y	zPy	y	zPy	y	zPy	y
zPy	z	zPy	z	yPx	z	yPx	z	zPx	z	yPx	z
zPx	y	zPx	y	zPy	y	zPx	y	zPy	y	zPx	y
yPx	x	yPx	x	zPx	x	zPy	x	yPx	x	zPy	x

と zPx に対して推移性を適用すると yPx となる。表3Cでは4行1列目は口印にあたり，こうして条件3より，表3Cの口印は全て yPx になり，次の表4Fになる。

4Aから4Fまでの6つの表を，表2に書き込んでいけば，次の表5のようになる。

この表5と表1とを比較すれば，個人1の選好が，全て，そのまま，社会的選好順序になっていることがわかる。このことから，個人1が独裁者になっていることがわかる。表5の状態は，個人1が独裁者であることを示すが，表5のようにならないことが条件4である。

(b) ケースⅡ→ zPy

ケースⅠのように，表3Aの1行2列目の個所を zPy とおいて，同じ様にやっていくと，表5の転置した表ができあがる。この場合は，個人2の選好が全て，そのまま社会的選好順序になっている。こうして，ケースⅡでは，個人2が独裁者になっている。

(c) ケースⅢ→ yIz

ケースⅠ，Ⅱのように，表3Aの1行2列目の個所を yIz とおいて3Aの×印のところに入れてみる。そうすると，次の表6になる。

表6

	yIz			yIz	yIz
	yIz			yIz	yIz
	yIz			yIz	yIz

表2と表6の3行2列目では，それぞれ xPz, yIz であり，こうして推移性により xPy となるのに対して，同じく4行5列目ではそれぞれ，zPx, yIz であることから推移性により yPx となり，全く逆の社会的選好順序になるという矛盾が生じている。このため，このケースⅢは考えられないケースであることがわかる。

結論として，ケースⅠ，Ⅱより，個人1が独裁者になるか，個人2が独裁者になるか以外には考えられず，条件4の非独裁性条件と，他の3つの条件，2つの公理と両立しないことがわかる。

(アロウの一般不可能性定理の表による証明終了)

Ⅱ アロウの一般不可能性定理の公理と条件の政治学的含意

1. 2つの公理について

この連結性と推移性が成立しているという状況は，合理的な判断が常にできるということと，豊かな社会的経験をしているということが必要であり，成熟している人間を前提している。人々がかなり高い教育水準（独学によってであれ，学校教育によってであれ）にあることが前提とされている。

2. 定義域の無制約性条件（条件１）について

この条件は，人々が自己の選択を考える時，はじめから外的な，どんな制約を受けないということである。たとえば，日本の戦前の天皇制下の国体批判を厳禁すること，またソ連崩壊前のソ連共産党の理論的基盤であったマルクス・レーニン主義批判を許さないこと，さらに毛沢東批判を許さなかった文革時代の中国の状況，はないということ，すなわち，「タブー」の存在を許さないなどがこの条件１にあたる。

こうした極端な場合はともかく，Ⅰの１で述べたように，個々人が単峰性をもつ選好を示す場合には，アロウの定理は成立しなくなる。(大谷〔10〕第３章を参照のこと)

3. 非独裁性条件（条件４）について

アメリカではヒトラーのような独裁者が生れないといわれているように，アメリカ人は独裁者の登場に，つよい嫌悪感を持っていると考えられる。このアメリカ人の考え方は，アメリカの「独立宣言」にみられるように，イギリスの国王のアメリカ植民地に対する独裁者的行動への強い告発でもうかがえる。独立達成後も，「ザ・ファデラリスト」とジェファソンとの指導者間論争にみられるように，立法府の権力集中への危惧から３権分立制の主張，また，連邦政府の権限拡大への危惧から州権を強めようとする動きからもわかる。この非独裁性条件は，推移性公理を，すこしかえることにより，非拒否権者存在制，非寡頭グループ支配制へと形がかわっていく。(鈴村〔９〕第３章，大谷〔10〕第２章を参照のこと)

4. パレート原理条件（条件２）について

Ⅰの１で述べたパレート原理条件は，厚生経済学でのパレート効率（最適）性を，政治学用語で表現しなおしたもので，「全員一致＝社会的決定」原理ともいえるものである。この決定原理は，よく使われている多数決による社会的決定原理を極端な形にしたものであり，民主主義の原理の一つである。各人は，知的，身体的，環境的にちがいがあるのが現実であるにもかかわらずこの原理は，全員に，すべての決定過程について平等であることを前提とする。このため，その社会の構成員が，同一の情報を与えられていること，全員の高いレベルの知性，同

じ公平観，社会観をもつという非現実的なことを前提としないかぎり無理があり，全員一致の決定は必ず社会的決定にするという考え方は，現実には異なる考えの自由をその社会に許容しないことになり，平等主義から生じる暴政（トクヴィルのいう多数者の専制）になる危険性が大きい。ファシズム国家，崩壊したソ連，東ヨーロッパの社会主義諸国の選挙が，ほぼ全員一致に近い投票結果になっていたことからも，このパレート原理条件を課すことは「アロウの一般不可能性定理」のモデルが必ずしも健全な社会のモデルであるとはいえないことを示唆している。こうして，この4で論議されるように，パレート原理をはずした場合の「アロウの定理」を考えてみることに意義がある。

以下でみられるように，パレート原理をはずした場合の結果については，反独裁者という自由主義者が登場するという予想外の結論が出てき，今後もさらに検討される余地があると我々は考える。

このパレート原理条件をはずした場合のアロウの定理は次のようになる。

〔パレート原理をはずした場合のアロウの定理〕

上記の条件1，3，2つの公理を満足するような社会的選択関数は，次の3つのいずれか，1つのケースにならざるを得ない。

a．すべての選択対象について無差別状態におちいる。

（→いいかえれば，社会的選択関数は存在しえないということ）

b．ある個人が独裁者にならざるを得ない。

c．ある個人が反独裁者にならざるを得ない。

このcの，反独裁者である個人の定義とは次のようなものである。

反独裁者の定義：

社会的選好順序と常にすべて相反する個人的選好を持つ個人のことを反独裁者という。

この定理を表によってわれわれは以下のように分析・証明する。

個人1，2と3選択対象 x, y, z からなる最も単純化された社会を考える。「パレート原理をはずした場合のアロウの定理」の1つである，すべての選択対象が無差別である時，すなわち xI_iyI_iz $(i=1, 2)$ の時には，条件2の有無にかかわらず当然社会的選択関数は存在しないということになり必ず成立するため，ここではこの場合を除く。こうして，強意の選好順序 P_i で考えることにする。Ⅰで示したように，各個人の選好順序は次のとおりである。$(3\,!=6)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

条件1（定義域の無制約性）より，この社会では，6×6＝36通りの，2個人からなる選好順序の組合わせが考えられる。これを表にしたのが前掲のⅠでの表1である。

表 7

$zPyPx$	yPx zPx	zPx zPy	zPy	yPx	
yPx zPx	$yPzPx$	zPx		yPx yPz	yPz
zPx zPy	zPx	$zPxPy$	xPy zPy		xPy
zPy		xPy zPy	$xPzPy$	xPz	xPy xPz
yPx	yPx yPz		xPz	$yPxPz$	xPz yPz
	yPz	xPy	xPy xPz	xPz yPz	$xPyPz$

表 8

$zPyPx$	zPx yPx yPz	zPx zPy xPy	zPy xPz	yPx yPz xPz	yPz xPz xPy
yPx zPx zPy	$yPzPx$	zPx xPy zPy	xPz xPy yPz	yPx yPz xPz	yPz xPz xPy
zPx zPy yPx	zPx yPz yPx	$zPxPy$	xPy zPy xPz	yPz xPz yPx	xPy yPz xPz
zPy zPx yPx	yPz zPx yPx	xPy zPy zPx	$xPzPy$	xPz yPz yPx	xPy yPz xPz
yPx zPy zPx	yPx yPz zPx	xPy zPy zPx	xPz xPy zPy	$yPxPz$	xPz yPz xPy
zPy zPx yPx	yPz zPx yPx	xPy zPy zPx	xPy zPy xPz	xPz yPz yPx	$xPyPz$

次に，この表1より，条件2（パレート原理条件）は，成立しないということを導き出すと，表7のようになる。この表7は，たとえば表1の第1行第2列目では x と y との選好について，個人1，2とも x を y よりも選好している（これらを xP_1y, xP_2y と，それぞれ記号化する）ので，条件2が成立しないためには社会的選好は yPx とならざるをえない。このため，表7の第1行第2列目は yPx と記すことになる。他の x と z, y と z との選好についても同じである。また，表1の対角個所の，たとえば，第1行第1列目では，xP_1yP_1z, xP_2yP_2z であるが，この個所で条件2が成立しないためには，社会的選好は，$zPyPx$ とならざるをえない。他の対角個所も，同じようにして求められる。

最後に，表1より，条件3（無関係な選択対象からの独立性条件）を示すための準備作業として前掲のIでの表3A，表3B，表3Cを導き出す。

この表3A，3B，3Cを使って，社会的選択関数を表によって導く。表1の第1行第2列目の

$$\begin{pmatrix} x & x \\ y & z \\ z & y \end{pmatrix}$$

の個所に，まず注目する。この個所は表7では，yPx, zPx となっている。この時，（アロウの定理）の証明でのように y と z とについては，yPz か（ケースⅠと呼ぶ），zPy か（ケースⅡと呼ぶ）のいずれかが成立するはずである。

（ケースⅠ）yPz の場合

この場合は，表3Aより，×印のところは，すべてyPzとなる。そうすると，第3行第6列目の個所では，×印よりのyPzと，表7からのxPyと，推移性とが成立することから，xPzという社会的選好が得られる。

この時，表3Bより△印はすべてxPzとならざるをえない。第1行第4列目も当然xPzとなり，表7からのzPyと，推移性の成立とから，xPyとなる。この個所は表3Cによれば※印にあたることから，※印の個所はすべてxPyとなる。さらに，第2行第3列目に注目して，※よりxPy，表7よりzPx，推移性の成立からzPyとなり，○印はすべてzPyとなる。第5行第1列目は，○印よりzPy，表7よりyPx，推移性の成立よりzPxとなり□印は，すべてzPxとなる。最後に，第6行第2列目は，表7よりyPz，□印よりzPx，これらと推移性の成立とから，yPxとなり，⏢印はyPxとなることがわかる。

こうして，表3A，3B，3Cのすべての印の社会的選好がわかったので，これらを表7に，すべて書き込むと，次の表8のようになる。この表を整理したものが表9である。この表9が（ケースⅠ）の場合の「パレート原理をはずした場合のアロウの一般不可能性定理」の社会的選択関数の表である。表9を検討すると，第1列目は第6行目，第2列目は第4行目，第3列目は第5行目，第4列目は第2行目，第5列目は第3行目，第6列目は第1行目，だけが，それぞれ個人1の選好順序が社会的順序になっている。すなわち，この6つの個所では，個人1は独裁者となっているわけである。他の30の個所の場合は個人1，個人2の選好順序のいずれとも同一の社会的順序ではない。これを「パレート原理を含むアロウの一般不可能性定理」の（ケースⅠ）から導かれる，個人1がすべての個所で独裁者となる表5と比べると，そのちがいは明白である。

この独裁者があらわれる6個所の場合を除く30個所では，例えば，表9の第1列目の第1行目から第5行目までは，$zPyPx$となっているが，この社会的選好は，表1での個人2の選好での，xとy, yとz, zとxそれぞれについてxPy，yPz，xPzとなるものと全く逆の選好を示している。こうして，表9での，個人1が独裁者となる6個所以外の，30個所すべては，個人2が反独裁者となる個所であるといえる。同じことは次の（ケースⅡ）の表10についてもいえ，個人2が独裁者となる6個所以外の，30個所すべてについて個人1が反独裁者となっている。

（ケースⅡ） zPyの場合

この場合は，（ケースⅠ）の場合と同じようにして，表7に，すべての印について，社会的選好順序を導いてうめていくと，表10のような社会的選択関数の表になる。この表10では各行に1個所づつ，個人2が独裁者となる個所があることがわかる。「パレート原理を含むアロウの一般不可能性定理」の（ケースⅡ）から導かれる個人2がすべての個所で独裁者となる表と比べると，そのちがいが（ケースⅠ）の場合と同様に明白である。また，表10の他の30の個所は，すべて個人1が反独裁者になっている。

以上で「パレート原理をはずした場合のアロウの一般不可能性定理」の表による証明は終了

表 9

第 1 位	z	y	z	x	y	x
第 2 位	y	z	x	z	x	y
第 3 位	x	x	y	y	z	z
第 1 位	z	y	z	x	y	x
第 2 位	y	z	x	z	x	y
第 3 位	x	x	y	y	z	z
第 1 位	z	y	z	x	y	x
第 2 位	y	z	x	z	x	y
第 3 位	x	x	y	y	z	z
第 1 位	z	y	z	x	y	x
第 2 位	y	z	x	z	x	y
第 3 位	x	x	y	y	z	z
第 1 位	z	y	z	x	y	x
第 2 位	y	z	x	z	x	y
第 3 位	x	x	y	y	z	z
第 1 位	z	y	z	x	y	x
第 2 位	y	z	x	z	x	y
第 3 位	x	x	y	y	z	z

表10

z	z	z	z	z	z
y	y	y	y	y	y
x	x	x	x	x	x
y	y	y	y	y	y
z	z	z	z	z	z
x	x	x	x	x	x
z	z	z	z	z	z
x	x	x	x	x	x
y	y	y	y	y	y
x	x	x	x	x	x
z	z	z	z	z	z
y	y	y	y	y	y
y	y	y	y	y	y
x	x	x	x	x	x
z	z	z	z	z	z
x	x	x	x	x	x
y	y	y	y	y	y
z	z	z	z	z	z

した。

5. 無関係な選択対象からの独立条件（条件 3 ）について

この条件の政治的含意は，２つの選択対象だけから，どの選択対象を選ぶかを決定するというもので，第 3 の選択対象は全く考慮されないという政治状況を考えているということになる。かなり，厳しい条件であり，アロウの定理の弱点は，この条件 3 にありとする主張が多い。この小論では，前の 4 につづいて，われわれは，この条件 3 をはずした定理を表によって分析・証明する。そのために「アロウの一般不可能性定理」の別の表現である，次の「アロウの独裁制定理」を使う。

〔アロウの独裁制定理〕

上記の条件 1，２，３，２つの公理をすべて同時に満足する社会的選択関数は独裁的なものになる。

われわれが分析・証明しようとする〔独立性条件をはずした場合のアロウの定理〕は次のようなものである。

〔独立性条件をはずした場合のアロウの定理〕

２個人，３選択対象の場合で，条件 1 より考えられる36の場合のうち，３選択対象のいずれか 1 つの組合せについて，１つの場合で独立性条件が成立しない時には，２個人が全く同じ選

好を示す6つの場合を除く30の場合のうち，その一つの場合でアロウの独裁制定理が成立しなくなる。(すなわちアロウの一般不可能性定理が成立しなくなる)

この定理により，2個人，3選択対象の，最も簡単なアロウの定理でも，考えられる36の場合のうち，30の場合のなかの1つの場合で，独立性条件がくずれると，アロウの定理がいえなくなってしまうことがわかる。

この独立性条件がアロウの定理でとり入れられているのは，あまりに厳しい条件で，問題であるという批判は，①現実的でない条件という批判と②アロウの定理をより根底的に批判しようとする，2つの方向からおこなわれている。

① 独立性条件は，社会的選択をする場合，4つの条件の中で最も現実的でないとする批判

この批判は，われわれが個人的選択をする場合，x と y との選好順序を決めるときでも，普通の状況では，第3の選択対象 z をも考えに入れて選択しているのだから，こういう独立性条件は，あまりにも厳しすぎ，現実的でないとする批判である。この①の批判に対しては，z を一応考慮しても最終的には，z をはずして，x と y との比較により決定しているという反批判と，アロウの定理の表による分析と証明ではっきりするが，理論的簡潔さを求めるため，この条件は必要不可欠だという反批判がある。

② アロウの定理の構成は，そもそも，この独立性条件に，その弱点が現れているという根底的な批判

アロウの定理は序数的順序を前提に議論されているが，②の批判はこの独立性条件を掲げることにより，z という一種の基準となる効用水準に頼らず，x と y との序数的順序にのみ頼っていることからも，アロウの定理の序数的効用依存性がはっきりしているという解釈をとる。ところがアロウの定理の具体的応用例が多数決制であることから，現実の例としてアロウの定理は基数的順序をとっている。こうして，抽象的段階での序数的順序の採用と具体的段階での基数的順序の採用（多数決制など）とは矛盾があるという批判である。独立性条件を序数的順序の前提を完全に意味するものと解釈する方法は検討に値する解釈で，もしこの解釈が成立するなら，アロウの定理の構成についての根底的な批判になる。この点については大谷〔10〕の第8章第3節と補論3を参照されたい。

以下，〔独立性条件をはずした場合のアロウの定理〕の表による証明をおこなう。Ⅰの「アロウの定理」の証明の（ケースⅠ）でおこなったように，個人1が独裁者になるという表5を導くところまではⅠと同じであり，（ケースⅡ）の場合は，個人2が独裁者になる。ここでは，（ケースⅠ）の場合で，独立性条件をはずす場合を考える。

独立性条件が表4A，4B，4Cの1行6列目の個所で，はずれている場合を考える。(無差別性の形ではずす場合は社会的選択不可能のため除外)

この個所で，まず，独立性条件を1つだけはずす。

yとzとについて，はずすと，この1行6列目は

$$\begin{pmatrix} zPy \\ xPz \\ xPy \end{pmatrix}$$

となり，社会的順序としては$xPzPy$となり，アロウの定理の証明結果である表5での$xPyPz$とは一致しない（ここでは考えない best のみ選択する場合は一致するが)。xとzとについてはずすと，この1行6列目は

$$\begin{pmatrix} yPz \\ zPx \\ xPy \end{pmatrix}$$

となり，社会的順序としては循環しており，社会的決定ができない。

xとyとについてはずすと，この1行6列目は

$$\begin{pmatrix} yPz \\ xPz \\ yPx \end{pmatrix}$$

となり，社会的順序としては$yPxPz$となり，表5での$xPyPz$とも異なる。

次に，2つはずす場合は，

yとz，xとzとについてはずすと，この1行6列目は

$$\begin{pmatrix} zPy \\ zPx \\ xPy \end{pmatrix}$$

となり，社会的順序は$zPxPy$となり，表5と異なる。

yとz，xとyとについてはずすと，この1行6列目は

$$\begin{pmatrix} zPy \\ xPz \\ yPx \end{pmatrix}$$

となり，社会的順序は，循環のため社会的決定ができない。

xとz，xとyについてはずすと，この1行6列目は

$$\begin{pmatrix} yPz \\ zPx \\ yPx \end{pmatrix}$$

となり，社会的順序は，$yPzPx$となり，この2つはずす3つのケースは，すべて表5に一致しない。

最後に，y と z，x と z，x と y のすべてについて，はずすと，この1行6列目は

$$\begin{pmatrix} zPy \\ zPx \\ yPx \end{pmatrix}$$

となり，社会的順序は$zPyPx$となり，表5に一致しない。

こうして1行6列目について独立性条件を y と z，x と z，x と y，いずれの選択の場合にはずしても，またいくつはずしても，表5には一致しない。このことは他の非対角個所のいずれについてもいえる。

こうして，最も単純な「独立性条件をはずした場合のアロウの定理」が，独立性条件を30個所で，はずして成立することが表によって証明された。

なお，表11は表2に，表4A～4Fが成立しない場合（＝独立性条件をはずす場合）を加えたものである。表11の非対角個所の○印部分が独立性条件をはずれた場合で，各個所で，1つでもこの○印のような選好順序になる時，表5が成立しなくなりアロウの定理は成立しなくなる。ただし，表11の○印すべてが同時に成立する場合は，個人2が独裁者になる上記Ⅰでの（ケースⅡ）になり，アロウの一般不可能性定理が成立する状況にもどる。

表11

xPy yPz xPz	xPy xPz ○ zPy	xPz yPz ○ yPx	yPz ○ zPx ○ yPx	xPy ○ zPy ○ zPx	○ zPy ○ zPx ○ yPx
xPz xPy ○ yPz	xPz xPy zPy	xPz ○ yPx ○ yPz	○ zPx ○ yPx ○ yPz	xPy zPy ○ zPx	zPy zPx ○ yPx
yPz xPz ○ xPy	xPz ○ zPy ○ xPy	yPx yPz xPz	yPz yPx ○ zPx	○ zPy ○ zPx ○ xPy	yPx ○ zPy ○ zPx
yPz ○ xPz ○ xPy	○ zPy ○ xPz ○ xPy	yPz yPx ○ xPz	yPz yPx zPx	zPx ○ zPy ○ xPy	zPx yPx ○ zPy
xPy ○ yPz ○ xPz	zPy xPy ○ xPz	○ yPz ○ xPz ○ yPx	zPx ○ yPz ○ yPx	zPx zPy xPy	zPx zPy ○ yPx
○ yPz ○ xPz ○ xPy	zPy ○ xPz ○ xPy	yPx ○ yPz ○ xPz	zPx yPx ○ yPz	zPy zPx ○ xPy	zPy yPx zPx

Ⅲ　アメリカ民主主義の原理との関連性

アロウの定理を構成している2つの公理と4つの条件には，素朴な形で，アメリカ民主主義

の原理が含まれている。

2つの公理，条件1，条件3，条件4は，民主主義が成立するためには，国を構成する人々がかなりの知的水準に達していることが必要であることを示している。イギリスからの独立達成後，アメリカの指導者達が教育（特に国民が常に公共的な面を考えるという点についての）の重要性を強調していることは，これらを満たすためであるといえる。

条件1，条件2，条件4は，アメリカの民主主義が確立されるための前提といえるもので，ヨーロッパ諸国のような封建制を経ることなく，近代社会に入っていったアメリカの社会独自の政治的条件といえる。条件1は，どんな選択対象でも批判され，比較されるものであること，条件4は，3権分立制を，たとえ行政府の長である大統領でさえ守ろうとする伝統がアメリカにはあること，条件2は，民主主義では当然の前提であるが，反面アメリカ建国後の民主主義確立の過程で，多数派による専制の現象が生じてくることの危惧と反省を示しているもの，と解釈できよう。

Ⅳ 結　論

アロウの一般不可能性定理は，社会科学のどの分野に属するのか，という議論は，アロウの定理の意義を問うものであろうが，この議論に決着をつけることなく，専門雑誌 Social Choice and Welfare を代表として，多数の論文が続々と発表されている。この小論では，このアロウの定理の①わかりやすい証明，②それぞれの公理，条件の内容について，政治学的含意をさぐること，③条件2，3をはずした場合について，われわれの表による証明，④これら公理，条件のアメリカ民主主義原理との深い関連性の指摘，を試み，アロウの一般不可能性定理が政治学にかなり近い位置にあることを示した。

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J, *Social Choice and Individual Values*, 2 nd (John Wiley, 1963) 邦訳あり。

〔2〕 Feldman, A. M, “A Very Unsubtle Version of Arrow's Impossibility Theorem”, *Economic Inquiry*, Vol. 12, no. 4, Dec, 1974, pp. 534～546.

〔3〕 ＿＿＿＿, *Welfare Economics and Social Choice Theory* (Martinus Nijhoff, 1980年)邦訳あり。

〔4〕 Samuelson, P, A, “Arrow's Mathematical Politics”, (Ed, Hook. S, Human Values and Economic Policy, New York. U. P., 1967) 邦訳あり。

〔5〕 ジョン・ロック「市民政府論」鵜飼訳（岩波文庫，1968年）

〔6〕「フランクリン，ジェファソン，ハミルトン，ジェイ，マディソン，トクヴィル」松本他訳（中央公論社，世界の名著33，1970年）

〔7〕 明石紀雄「トマス・ジェファソンと『自由の帝国』の理念」（ミネルヴァ書房，1993年）

〔8〕 川中藤治「ジョン・ロック市民政治の思想」（法律文化社，1986年）

〔9〕 鈴村興太郎「経済計画理論」（筑摩書房，1982年）

〔10〕 大谷　和「『アロウの一般不可能性定理』の分析と批判」（時潮社，1996年3月）

〔11〕 ＿＿＿＿，「『パレート原理をはずした場合のアロウの一般不可能性定理』の表による分析と証明」

奈良県立商大「研究季報」Vol. 7, no. 1, 1996年7月, pp. 11～19.

〔12〕 ________,「『独立性条件をはずした場合のアロウの一般不可能性定理』の表による分析と証明」奈良県立商大「研究季報」Vol. 7, no. 2, 1996年10月, pp. 17～26.