相対価格の許容範囲

置塩信雄
中谷　武*

1. 問　題

資本制経済の一つの特徴は，諸生産物が商品の形態をとる商品生産が支配的であることである。諸商品の価格を（$p_1, \cdots\cdots, p_n$）とすると，それらの相対価格は（$p_1/p_n, \cdots\cdots, p_{n-1}/p_n$）である。この相対価格が諸商品1単位当りの投下労働量（$t_1, \cdots\cdots, t_n$）の相対比（$t_1/t_n, \cdots\cdots, t_{n-1}/t_n$）といかなる関係にあるか。これが本稿での問題である。

この問題は，学説史上では労働価値説の中核的な問題として論じられてきた。しかし，そのとき投下労働との関係を求められるのは，諸商品の相対価格一般ではなく，すべての商品生産部門での利潤率が均等となる価格（自然価格――スミス，リカード，生産価格――マルクス）がとりあげられてきた。本稿では，より広く，すべての商品生産部門で利潤が正である相対価格と投下労働量の関係をとりあげる。[1)]

2. 簡単な場合

一般的な議論を行うまえに，理解を助けるため，次のような簡単な場合に

*神戸大学経済学部教授

1）この問題は宇野弘蔵が「労働価値説の論証」ということで行った不明瞭な議論の主題と同じである。彼はすべての部門で利潤が非負であるためには，諸商品の相対価格は投下労働量の比によってきまる範囲になくてはならぬことを論じようとし，これを「労働価値説の論証」とみなした。彼の推論は正確でないし，このことを労働価値説の論証であるとするのは，労働価値説を余りに狭く，価格説明論とすることである。これについては，置塩信雄「労働価値説の主要諸命題」（神戸大学『経済学研究』年報36　1990年）参照。

ついて考えよう。

生産財，消費財がそれぞれ唯一種類づつであり，生産財，消費財をそれぞれ1単位生産するのに，a_1，a_2 だけの生産財と，τ_1，τ_2 だけの労働の投入が必要であるとしよう。また，賃労働者の受取る貨幣賃金は労働1単位当り w，それで購入できる消費財を b としよう。

すると，生産財，消費財部門のいずれにおいても，利潤が生じるためには，生産財，消費財の価格 p_1, p_2 は，

$$p_1>a_1p_1+\tau_1w \tag{1}$$

$$p_2>a_2p_1+\tau_2w \tag{2}$$

$$w=bp_2 \tag{3}$$

でなければならない。このために，生産財と消費財の相対価格 p_1/p_2 が，

$$t_1=a_1t_1+\tau_1 \tag{4}$$

$$t_2=a_2t_1+\tau_2 \tag{5}$$

できまる生産財，消費財1単位を生産するため，直接・間接に投下しなければならない労働量の相対比 t_1/t_2 と，どのような関係をもたねばならないかが問題である。

まづ，相対価格 p_1/p_2 がそれを下回ってはならない下限を考えよう。(1)より直ちに分るように，生産財部門で利潤が生じるには，$1-a_1>0$（純生産可能条件）でなければならない。これを想定すると，(1)，(3)から分かるように，p_1/p_2 が小さくなる程，生産財部門の利潤は減少する。p_1/p_2 がそれを下回われば，生産部門の利潤が消滅するのは

$$(1-a_1)p_1/p_2=\tau_1b$$

となるときである。したがって，p_1/p_2 の下限は $\tau_1b/(1-a_1)$ である。

次に，相対価格 p_1/p_2 がそれを上回ってはならない上限をみよう。(2)，(3)から分るように，p_1/p_2 が大きくなる程，消費財部門の利潤は減少する。p_1/p_2 がそれを上回われば，消費財部門の利潤が消滅するのは

$$1-\tau_2b=a_2p_1/p_2$$

となるときである。したがって，p_1/p_2 の上限は $(1-\tau_2b)/a_2$ である。

ところで，この上限および下限は，生産財，消費財の投下労働量 t_1, t_2 とどのような関係をもつであろうか。

t_1 の定義式（4）より，p_1/p_2 の下限は bt_1 であるが，これは搾取率 e

$$e=(1-bt_2)/bt_2$$

を用いて，

$$\frac{t_1}{t_2}\cdot\frac{1}{1+e}=\frac{t_1}{t_2}\left(1-\frac{e}{1+e}\right)$$

と書くことができる。

p_1/p_2 の上限は，t_2 の定義式（5）より

$$\frac{(1-\tau_2 b)t_2}{a_2 t_1}\cdot\frac{t_1}{t_2}=\left(1+\frac{\tau_2(1-bt_2)}{a_2 t_1}\right)\frac{t_1}{t_2}$$

であるから，結局

$$\frac{t_1}{t_2}\left(1+\frac{e}{k_2(1+e)}\right)$$

と書くことができる。ここで，$k_2=\tau_2/a_2 t_1$ で，消費財部門での生産の有機的構成である。

このようにして，両部門で利潤が生じうる相対価格 p_1/p_2 の許容範囲は

$$\frac{t_1}{t_2}\left(1+\frac{e}{k_2(1+e)}\right)>p_1/p_2>\left(1-\frac{e}{1+e}\right)\frac{t_1}{t_2} \qquad (6)$$

である。相対価格は投下労働量の相対比 t_1/t_2 より乖離することができるが，その乖離限界は搾取率 e と生産の有機的構成によって規定されている。搾取率が大なるほど，（6）から分るように，許容範囲は大となる。

3. 非基礎部門

前項の簡単な場合に，いま1つの生産部門をつけ加えよう。その商品を1単位生産するのに，生産財を a_3，労働を τ_3 だけ投入しなければならないとしよう。そして，この商品は賃労働者によって全く消費されない（例えば純粋の奢侈品）とする。したがって，この商品は生産財，賃金財の生産には全く投入されない。

すべての生産部門に直接・間接（労働者の消費を迂回してのものを含む）に投入されなければならない商品の生産部門を基礎部門（basic sector）とよび，そうでない部門を非基礎部門（non-basic sector）とよぶ。すると，いま，つけ加えた生産部門は非基礎的部門である[2)]。

非基礎部門を考慮に入れたとき，前項で得た結論はどのような変化をこうむるであろうか。これが本項の問題である。生産財，消費財，奢侈部門のいづれにおいても，利潤が生じるためには，前項の（1）～（3）のほかに

$$p_3 > a_3 p_1 + \tau_3 w \qquad (7)$$

が追加される。（3）を考慮すると（7）は

$$p_3/p_2 > a_3 p_1/p_2 + \tau_3 b$$

となる。奢侈品部門の利潤は p_3/p_2 が大なる程，p_1/p_2 が小なるほど大となり，逆は逆である。

奢侈品部門は相対価格 p_3/p_2，p_1/p_2 が図1の斜線部分にあるとき，利潤

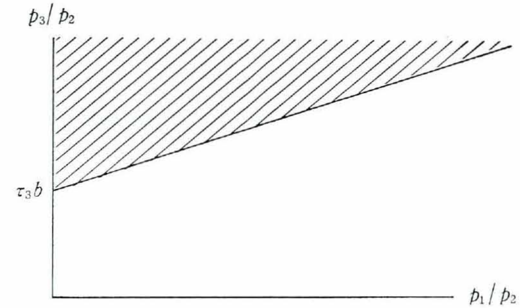


図1

2）基礎部門，非基礎部門という概念は Sraffa によっても，その著書『商品による商品の生産』でも用いられている。しかし，その内容はここで述べているものと異なる。彼はすべての部門に直接・間接に生産財として投入される商品の生産部門を基礎部門と定義し，そのような基礎部門のみで構成される体系を考えた。しかしそのような体系は再生産可能な体系ではない。というのは，その体系には生産財としての役割をしない純粋な消費財は除外されているからである。われわれの基礎部門の概念は，生産財としてだけではなく，賃金財として，すべての部門に直接・間接に投入（賃金財の場合は，そこで投入される労働者が消費する）される商品の生産部門であることである。われわれは次項以後，すべての商品生産↘

を手にすることができる。それ故，p_3/p_2 は下限はもつけれども，上限はもたない。つまり，奢侈品部門で利潤が生じるためには，奢侈品価格 p_3 は，奢侈品のコストに入る生産財や賃金財（賃金を通じて）の価格に対して相対的に，ある高さ以上に維持されねばならない。しかし，奢侈品は他の部門のコストに入らないから，その価格をいくら高くしても，他部門の利潤発生を阻げることがないから，上限をもたないのである[3]。

基礎部門だけを考える場合には，各部門は互に投入関係を直接にか間接にかもっているから，他の部門を損失に追い込むことなしに，どの部門の商品もその相対価格を無制限には高めえないのである。

4. 一般的な場合

ここで，部門の数が n（$\geqq 3$）個である場合についての考察に移ろう。以下では，この n 個の部門はすべて前項で定義した意味で基礎部門であるとし，非基礎部門は捨象する。

すべての部門で利潤が生じるには

$$p_i > \sum^n a_{ij}p_j + \tau_i w \quad i=1,\ \cdots\cdots,\ n \tag{8}$$

$$w = \sum^n b_j p_j \tag{9}$$

でなければならない。ここで，p_i：第 i 商品の価格。a_{ij}，τ_i はそれぞれ第 i 商品1単位の生産のために投入しなければならない第 i 商品（生産財として），および労働量。b_j は貨幣賃金率 w で労働者が購入する諸商品（賃金財）のバスケット（b_1，……，b_n）を構成する要素。

周知のように，(8)，(9)を充す $p_i>0$，$w>0$ が存在するためには，搾取率

$$e = \left(1-\sum^n b_j t_j\right) \Big/ \sum^n b_j t_j \tag{10}$$

が正でなければならない[4]。ここで t_i は

↘部門は基礎部門であると想定するが，この作業は再生産可能である。置塩信雄『資本制経済の基礎理論』（創文社　1965年）参照。

3) もっとも，実際に価格がいくらでも高くなるかどうかは，その商品の需要の弾力性などの諸要因に依存する。

$$t_i=\sum^{n}a_{ij}t_j+\tau_i \quad i=1,\cdots\cdots,n \tag{11}$$

できまる第 i 商品を1単位生産するのに直接・間接に投入される労働量である。

さて，(8)，(9)を充す相対価格（p_1/p_n，……，p_{n-1}/p_n）が，そこに閉じ込められねばならぬ許容範囲は何か[5]。これが本項の問題である。

(8)，(9)は

$$x_i=p_i/p_n,\ y=w/p_n \tag{12}$$

とおけば，

$$x_i-\sum^{n}a_{ij}x_j-\tau_i y=u_i \quad i=1,\ \cdots\cdots,\ n \tag{13}$$

$$-\sum^{n}b_jx_j+y=0 \tag{14}$$

と書ける。但し，$u_i>0$で，u_iは第i商品1単位当り利潤を π_i とすれば，$u_i=\pi_i/p_n$ である。また，定義より，$x_n=1$。

(13)，(14)より

$$x_s=\sum^{n}\frac{\Delta_{is}}{\Delta}u_i \qquad s=1,\ \cdots\cdots,\ n-1 \tag{15}$$

$$1=\sum^{n}\frac{\Delta_{in}}{\Delta u_i}u_i \tag{16}$$

をえる。ここで

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-a_{11}\cdots\cdots-a_{1n} & -\tau_1 \\ \vdots & \vdots \\ -a_{n1}\cdots\cdots 1-a_{nn} & -\tau_n \\ -b_1\cdots\cdots\cdots-b_n & 1 \end{vmatrix} \tag{17}$$

で，Δ_{ij}はΔの第i行・第j列の要素に関する余因数である。

ここで，後段の便宜のため，行列式Δについての性質を摘記しておこう。

すべての部門が基礎部門であり，(13)，(14) が $u_i>0$ に対して，$x_i>0$，$y>0$ なる解をもつとき，Δは indecomposable（分解不能）で，且つ Hawkin=Simons の条件を充すから

4) 置塩信雄「価値と価格」（神戸大学『経済学研究』年報1955年）

5) 相対価格を測る商品をここでは第n商品としたが，これはどの商品であってもかまわない。以下の議論はそれにかかわりない。

$$\varDelta > 0,\ \varDelta_{ij} > 0 \tag{18}$$

$$\varDelta_{ii} > 0,\ \varDelta_{iijj} > 0,\ \varDelta_{iijjkk} > 0 \tag{19}$$

$$\varDelta_{iist} \geqq 0 \quad s \neq t \neq i \tag{20}$$

である[6)]。

さて，(15)，(16)は

$$x_s = \sum^{n} \frac{\varDelta_{is}}{\varDelta_{in}} \lambda_i \tag{21}$$

$$1 = \sum^{n} \lambda_i, \quad \lambda_i = \frac{\varDelta_{in}}{\varDelta} u_i$$

と書けるが，$\varDelta_{ij}, \varDelta, u_i$ はすべて正であるから，$\lambda_i > 0$。したがって，相対価格（$x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}$）は $n-1$ 次空間における n 個の点

$$\left(\frac{\varDelta_{i1}}{\varDelta_{in}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\varDelta_{in-1}}{\varDelta_{in}}\right) \qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ n \tag{22}$$

を結んでつくられる単体（simplex）の内点（interior）になければならないことが分る。例えば，$n=3$ のとき，図2の斜線部分がそれである。

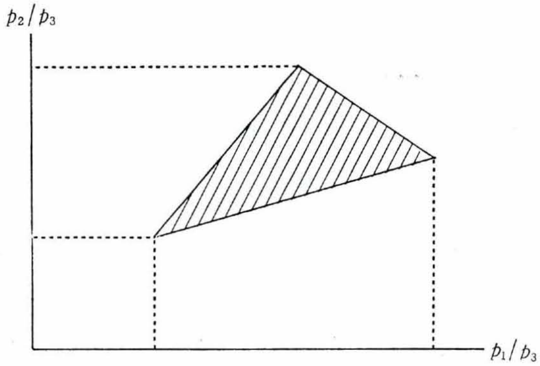


図2

また，(21）は第 s 商品の相対価格 x_s が $\left(\frac{\varDelta_{is}}{\varDelta_{in}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\varDelta_{ns}}{\varDelta_{nn}}\right)$ の $\lambda_i > 0$ を加重値とする加重平均であることを示しているから，

6) 非負行列のこれらの数学的性質については，二階堂副包『経済学のための線型数学』（培風館）参照。

$$max\left(\frac{\Delta_{is}}{\Delta_{in}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}}\right)>x_s>min\left(\frac{\Delta_{is}}{\Delta_{in}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}}\right) \tag{23}$$

である。

5.　許容範囲と搾取率

すべての部門で利潤が発生するには，相対価格の組合せ $(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})$ は前項で示されたような単体の内部になくてはならないことが分った。本項では，この単体の内点は存在するのか。存在する場合，その内部の広さは何に依存するのかを検討しよう。

n 個の点（22）でつくられる単体の体積（2次元の場合，面積）V は

$$V=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_{1n}} & \cdots\cdots & \dfrac{\Delta_{n1}}{\Delta_{nn}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\Delta_{1n-1}}{\Delta_{1n}} & & \dfrac{\Delta_{nn-1}}{\Delta_{nn}} \\ 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}$$

で与えられる[7]。しかるに，この右辺の行列式は

$\Delta^{n-1}/\Delta_{1n}\cdots\cdots\Delta_{nn}$

に等しい。$\Delta>0$, Δ_{1n}, ……, $\Delta_{nn}>0$ であるから，$V>0$ となり，確かに内点は存在する。

次に，V が搾取率の増加関数であることを示めそう。その準備として，Δ/Δ_{kn} の経済的な意味を考える。(21)において，$\lambda_k=1$, $\lambda_i=0$ $(i\neq k)$ の場合を考えてみよう。すると，それは $u_i=0$ $(i\neq k)$ で $u_k=\Delta/\Delta_{kn}$ の場合であることが分る。すなわち，Δ/Δ_{kn} は第 k 商品部門が利潤をすべて独占したときの u_k（商品単位当り利潤）に等しい。これを $\bar{u}_k$ と書こう。すると，

$$n!\,V=\bar{u}_1\cdots\cdots\bar{u}_n/\Delta \tag{24}$$

となる。

まづ，$\bar{u}_k$ が搾取率の増加関数であることを示そう。搾取率 e の定義(10)から知れるように，生産技術一定のとき t_1, ……, t_n は不変だから，e は b_1,

7）体積と行列式の関係については，佐武一郎『線型代数学』（裳華房1990年）参照。

……，b_n の減少関数である。それ故，$d\bar{u}_k/db_s<0$ なることを示せばよい。

(13)，(14)において，$u_k=\bar{u}_k\ u_i=0\ (i\neq k)$ の場合を考えると，

$$x_i^k-\sum^n a_{ij}x_j^k-\tau_j y^k=\bar{u}_k\delta_{ik} \qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ n \tag{25}$$

$$-\sum^n b_j x_j^k+y^k=0 \tag{26}$$

となる。ここで δ_{ik} は $\delta_{kk}=1,\ \delta_{ik}=0\ (i\neq k)$。$x_i^k$, y^k は第 k 部門が利潤を独占した場合の x_i, y を示めす。b_s が変化したときの $x^k,\ y^k,\ \bar{u}_k$ の変化分を求めると，(25)，(26)より，$x_n^k=1$ なることを考慮して，

$$dx_i^k-\sum^{n-1} a_{ij}dx_j^k-\delta_{ik}d\bar{u}_k-\tau_i dy^k=0 \tag{27}$$

$$-\sum^{n-1} b_j dx_i^k \qquad\qquad +dy^k=x_s^k db_s \tag{28}$$

となる。これより

$$d\bar{u}_k=\frac{x_s^k\Delta_{n+1n}}{-\Delta_{kn}}db_s$$

をえる。既にみたように，$\Delta_{kn}>0,\ \Delta_{n+1,n}>0,\ x_s^k>0$ であるから，$d\bar{u}_k/db_s<0$ である。

V を示めす(24)は

$$n!V=\bar{u}_1\cdots\cdots\bar{u}_{s-1}\bar{u}_{s+1}\cdots\cdots\bar{u}_n/\Delta_{sn}$$

とも書ける。$\bar{u}_k$ が b_s の減少関数であることを示したから，さらに Δ_{sn} が b_s の非減少関数であることを示せば，V が b_s の減少関数，したがって搾取率の増加関数であることがいえる。実際，

$$\frac{d\Delta_{sn}}{db_s}=-\Delta_{sn,\,n+1s}=\Delta_{ss,\,n+1n}$$

であるから，Δ の性質(20)より，$d\Delta_{sn}/db_s\geqq 0$ である。かくして V は搾取率の増加関数であることが論証された。

6. 相対価格の上・下限

第4項の(23)に注目しよう。これは，すべての部門で利潤が発生するには，第 s 商品の相対価格 $x_s=p_s/p_n$ がそこになくてはならない許容範囲を示している。この許容範囲を画する上・下限の経済的意味は何か。また，これら上

・下限は何に依存するのかを検討するのが本項の仕事である。

まず，Δ_{ks}/Δ_{kn} が何を意味するかを考えることから始めよう。(21)において，$\lambda_k=1$, $\lambda_i=0$ $(i\neq k)$ とおくと

$$x_s^k=\Delta_{ks}/\Delta_{kn} \tag{29}$$

となる。すなわち，Δ_{ks}/Δ_{kn} は第 k 部門だけが利潤を独占し，その他の部門の利潤はすべて 0 とするときの，第 s 商品の相対価格である。

次に

$$max\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_{1n},}\cdots,\ \frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}}\right)=\frac{\Delta_{ss}}{\Delta_{ns}}=x_s^s \tag{30}$$

$$min\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_{1n},}\cdots,\ \frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}}\right)=\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}}=x_s^n \tag{31}$$

であることを示そう。

$$\frac{\Delta_{ss}}{\Delta_{sn}}-\frac{\Delta_{is}}{\Delta_{in}}=\frac{\Delta\Delta_{ssin}}{\Delta_{sn}\Delta_{in}} \qquad s\neq i$$

であるが[8]，Δ の性質(18)，(20)より，$\Delta_{ss,in}\geqq 0$ であるから

$$\frac{\Delta_{ss}}{\Delta_{sn}}\geqq\frac{\Delta_{is}}{\Delta_{in}} \tag{32}$$

であり，(30)が成立する[14]。また，

$$\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}}-\frac{\Delta_{is}}{\Delta_{in}}=\frac{-\Delta\Delta_{nn,is}}{\Delta_{nn}\Delta_{in}} \qquad n\neq i$$

であるが，Δ の性質(18)，(20)より

$$\frac{\Delta_{is}}{\Delta_{in}}\geqq\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}}$$

であり，(31)が成立する。すなわち，第 s 商品の相対価格の上限は，第 s 部門が利潤を独占するときの第 s 商品の相対価格 x であり，その下限は相対価格がそれで測られている商品（ここでは第 n 商品）の部門が利潤を独占するときの相対価格 x_s^n である。

ところで，もし，$x_s^s=x_s^n$ ならば，不等式(23)で示される許容域は存在しなくなるが，実は

8) ここで行列式に関する Jacobi の定理が用いられる。定理については佐武前掲書。

$$x_s^s > x_s^n$$

である。実際

$$\frac{\Delta_{ss}}{\Delta_{sn}} - \frac{\Delta_{ns}}{\Delta_{nn}} = \frac{\Delta \cdot \Delta_{ssnn}}{\Delta_{sn}\Delta_{nn}}$$

であるが[8]，Δ の性質(19)より $\Delta_{ssnn} > 0$ であるからである。かくして，不等式(23)は

$$x_s^s > x_s > x_s^n$$

とかける。

最後に，上限 x_s^s，下限 x_s^n が実は，搾取率に依存しており，搾取率が大となると，上限 x_s^s は増大し，下限 x_s^n は低下する結果，相対価格 x_s の許容範囲は拡大することを示めそう。この際，前項で V と搾取率の関係をみたときと同様に，$dx_k^k/db_s < 0$, $dx_k^n/db_s > 0$ なることを示せば十分である。

前項の(27)，(28)を dx_k^k について解くと

$$dx_k^k = \frac{x_k^s \Delta_{kk,\,nn,\,n+1,\,n+1} \cdot t'_n}{-\Delta_{kn}} db_s$$

となる[9]。また，(27)において $\delta_{ik} d\bar{u}_k$ を $\delta_{in} d\bar{u}_n$ におきかえて，dx_k^n につい

9) (27)，(28)より dx_k^k について解くと，クラーメルの定理により，

$$dx_k^k = \frac{x_s^k A}{-\Delta_{kn}} db_s$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & & & & \\ & & \vee & & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{1\,n-1} & 0 & -\tau_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ -a_{k1} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{k\,n-1} & -1 & -\tau_k \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{n\,n-1} & 0 & -\tau_n \\ \vdots & & & & & & \\ -b_1 & \cdots & 1 & \cdots & -b_{n-1} & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \wedge & & & & \\ & & k & & & & \end{array} \end{array}$$

いま，t'_i を

$$t'_i = \sum_{j \neq n,k} a_{ij} t'_j + \tau_i \qquad i = 1, \cdots\cdots, n$$

で定義し，A の第 i 列 ($i=1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n-1$) に t'_i を乗じて，第 $n+1$ 列に加えると，

$$A = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{1\,n-1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ -a_{k1} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{k\,n-1} & -1 & -t'_k \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ -a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{n\,n-1} & 0 & -t'_n \\ -b_1 & \cdots & 1 & \cdots & -b_{n-1} & 0 & 1 - \sum_{j \neq n,k} b_i t'_i \end{vmatrix}$$

↗

て解くと，

$$dx_k^n=\frac{x_s^n\Delta_{kk,\,nn,\,n+1,\,n+1}t_k'}{\Delta_{nn}}db_s$$

となる10)。ここで，t_n', t_k' は

$$t_i'=\sum_{j\neq k,n}a_{ij}t_i'+\tau_i \qquad i=1,\cdots\cdots,n$$

で定義される。Δ が Hawkins=Simon の条件を充し，indecomposableであれば，x_s^k, x_s^n, Δ_{ij}, $\Delta_{ii,jj,kk}$, t_i' はいづれも正であるから11)，結局，$dx_k^k/db_s<0$, $dx_k^n/db_s>0$ である。

7.　相対価格と投下労働量

ある商品の相対価格 p_s/p_n の上限は，その商品生産部門が利潤を独占したときの相対価格 x_s^s であり，その下限は相対価格がそれで測られている商品（第 n 商品）の生産部門が利潤を独占したときの相対価格 x_s^n であること。この両者で画される許容範囲は搾取率が高まると拡大されることが分った。

本項での問題は，これらの上・下限が諸商品の投下労働量とどのような関係にあるかを検討することである。

第2項で $n=2$ の簡単な場合について，相対価格の許容範囲(6)をえたが，一般的な場合について，同様のことがいえるのであろうか。

まづ，上限 x_s^s についてみよう。（以下では説明のため $s=1$ としよう。）

↗ となる。第 k 列で展開し，次に第 n 列で展開し，さらに第 $n+1$ 列で展開すると，符号に注意して，

$$\begin{array}{cc} & \overset{k}{\vee} \\ A=k> & \begin{vmatrix} 1-a_{11} & \cdots\cdots & -a_{1n-1} \\ \vdots & & \\ -a_{n-1} & \cdots\cdots & 1-a_{n-1n-1} \end{vmatrix} <k\cdot t_n' \\ & \underset{k}{\wedge} \end{array}$$

となる。ところが，右辺の行列式は $\Delta_{kk,nn,n+1n+1}$ であるから，結局

$$dx_k^k=\frac{x_s^k t_n'\Delta_{kk,\,nn,\,n+1,\,n+1}}{-\Delta_{kn}}db_s$$

10) 註（9）と同様に計算すればよい。

11) Δ が Hawkins=Simon の条件を充せば $\Delta_{kk,nn,n+1,n+1}$ も同条件を充す。故に

$$t_i'=\sum_{j\neq k,n}a_{ij}t_j'+\tau_i \qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ n$$

によってきまる t_j' はいづれも正である。

(29)より $x_1^1=\Delta_{11}/\Delta_{1n}$ であるから，（6）と同様のことがいえるとすれば

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1n}}=\frac{t_1}{t_n}(1+\varepsilon) \tag{33}$$

とおけば，

$$\varepsilon=\frac{e}{1+e}\phi_1$$

となることを示せばよい。(33)より

$$\varepsilon=\frac{t_n\Delta_{11}-t_1\Delta_{1n}}{t_1\Delta_{1n}}$$

ところが，

$$t_n\Delta_{11}-t_1\Delta_{1n}=(1-\sum b_jt_j)\Delta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1}t_n''$$

であるから[12)]，結局，上限は搾取率の定義(10)を考慮して

12) 余因数の定義により，

$$\Delta_{1n}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -a_{21} & \cdots-a_{2n-1} & -\tau_2 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{nn1} & \cdots-a_{nn-1} & -\tau_n \\ -b_1 & \cdots-b_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

右辺の行列式の第1列を第 $n-1$ 列に移すと，

$$t_1\Delta_{1n}=-\begin{vmatrix} 1-a_{22} & \cdots-a_{2n-1} & -a_{21}t_1 & -\tau_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n2} & \cdots-a_{nn-1} & -a_{n1}t_1 & -\tau_n \\ -b_2 & \cdots-b_{n-1} & -b_1t_1 & 1 \end{vmatrix}$$

したがって，

$$t_n\Delta_{nn}-t_1\Delta_{1n}=\begin{vmatrix} 1-a_{22} & \cdots-a_{2n-1} & -a_{21}t_1-a_{2n}t_n & -\tau_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n2} & \cdots-a_{nn-1} & -a_{n1}t_1+(1-a_{nn})t_n & -\tau_n \\ -b_2 & \cdots-b_{n-1} & -b_1t_1\ -b_nt_n & 1 \end{vmatrix}$$

右辺の行列式の第 i 行 $(i=1,\cdots\cdots,n-2)$ に t_{i+1} を乗じて，第 n 列に加え，さらに第 $n-1$ 列を第 n 列に加え合せると，t_i の定義

$$t_i=\sum^{m}a_{ij}t_j+\tau_i \qquad i=1,\cdots\cdots,n$$

より，

$$t_n\Delta_{nn}-t_1\Delta_{1n}=(1-\sum b_jt_j)\begin{vmatrix} 1-a_{22} & \cdots-a_{2n-1} & -a_{21}t_1-a_{2n}t_n \\ \vdots & & \\ -a_{n2} & \cdots-a_{nn-1} & -a_{n1}t_1+(1-a_{nn})t_n \end{vmatrix}$$

となる。右辺の行列式は

$$-\begin{vmatrix} 1-a_{22} & \cdots-a_{2n-1} & -\tau_2 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n2} & \cdots-a_{nn-1} & -\tau_n \end{vmatrix}$$

となるから，

$$x_1^1=\frac{t_1}{t^n}\left(1+\frac{e}{1+e}\cdot\frac{\varDelta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1,}\,t_n''}{t_1\varDelta_{1n}}\right)$$

と書ける。ここで，t_i'' は

$$t_i''=\sum_{j\neq 1,n}a_{ij}t_j''+\tau_i \qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ n$$

で定義される。

次に，下限 x_1^n についてみよう。(29)より $x_1^n=\varDelta_{n1}/\varDelta_{nn}$ であるから，

$$\frac{\varDelta_{n1}}{\varDelta_{nn}}=\frac{t_1}{t_n}(1-\eta) \tag{34}$$

とおけば，$\eta=\dfrac{e}{1+e}\phi_2$ となることを示せばよい。(34)より

$$\eta=\frac{t_1\varDelta_{nn}-t_n\varDelta_{n1}}{t_1\varDelta_{nn}}$$

ところが

$$t_1\varDelta_{nn}-t_n\varDelta_{n1}=(1-\sum b_jt_j)\varDelta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1}t_1''$$

であるから[13)]，結局，下限は

↗ $t_i''=\sum_{j\neq 1,n}a_{ij}t_j''+\tau_j \qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ n$

で定義された t_{i+1}'' を第 i 列（$i=1,\cdots\cdots,n-2$）に乗じて，第 $n-1$ 列に加えると

$$-\begin{vmatrix}1-a_{22}\cdots-a_{2n-1} & 0\\ \vdots & \vdots\\ -a_{n2}\cdots-a_{nn-1} & -t_n''\end{vmatrix}=t_n''\varDelta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1}$$

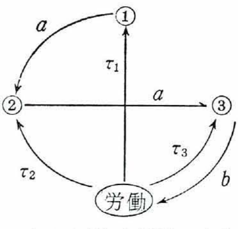
となるから，結局

$$t_n\varDelta_{nn}-t_1\varDelta_{1n}=(1-\sum b_jt_j)t_n''\varDelta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1}$$

13）註（12）と同様の計算を行えばよい。

14）自己の部門が利潤を独占したときの相対価格 x_s^s が，他部門が利潤を独占したときの相対価格 x_s^i よりも小となることはないが，同じでありうる（$x_s^s=x_s^i\ i\neq s,n$）ことを(32)は示している。これは一見，奇妙にみえる。具体的な1例を示そう。

3部門あり，各部門の投入関係は図のようであるとしよう。この場合 $\varDelta$ は



$$\varDelta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -\tau_1\\ -a & 1 & 0 & -\tau_2\\ 0 & -a & 1 & -\tau_3\\ 0 & 0 & -b & 1\end{vmatrix}$$

第1商品部門が利潤を独占したときの q_2，q_3 は

↘

$$x_i^n=\frac{t_1}{t_n}\left(1-\frac{e}{1+e}\cdot\frac{\Delta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1}t_1''}{t_1\Delta_{nn}}\right)$$

となる。

以上の結果，一般的な場合にも相対価格 p_s/p_n の許容範囲は

$$\frac{t_s}{t_n}\left(1+\frac{e}{1+e}\phi_1\right)>\frac{p_s}{p_n}>\frac{t_s}{t_n}\left(1-\frac{e}{1+e}\phi_2\right)$$

$$\phi_1=\Delta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1}t_n''/t_1\Delta_{1n}$$

$$\phi_2=\Delta_{11,\,nn,\,n+1,\,n+1}t_1''/t_1\Delta_{nn}$$

で示されることが分った。すなわち，相対価格は投下労働量の比より乖離することはできるけれども，その乖離の限界は，搾取率によって規定されているのである。

↘ $q_3=aq_2+\tau_3, \qquad bq_3=1$ （＊）

で与えられる。ここで

$$q_2=p_2/w, \qquad q_3=p_3/w$$

である。次に，第２商品部門が利潤を独占したときの q_2, q_3 はやはり（＊）で与えられる。

したがって，第３商品で相対価格を測ることにすれば，第２商品の相対価格 $x_2=p_2/p_3=q_2/q_3$ は第２商品部門が利潤を独占する場合と，第１商品部門が利潤を独占する場合とでは変らない。

このようなことが生じるのは，第２部門をはずしたあとの部門間の関係が indecomposable でなくなるからである。