〔研究ノート〕

シグナルの好ましさと確率分布関数

林　田　　修*

1　はじめに

ある経済主体が未知のパラメータθの値に関心があるとしよう。単純化するため，経済主体にとってθの値はできる限り大きい方がいいと想定しよう。経済主体はθの値を知ることはできないが，θに関連するシグナルωを知ることはでき，ωの値からθの値を推定するとしよう。

経済主体にとってωの値は好ましいこともあれば，好ましくないこともあるだろう。どのような条件の下で，経済主体にとっていつでもωの小さい値が大きい値より好ましいだろうか，という問題を考察する。

この問題に関する先駆的論文 Milgrom（1981）は，経済主体がωについて単調な選好をもつために確率分布関数が満たすべき条件を明らかにした，本稿ではパラメータθとシグナルωの間に$\omega=\theta+\epsilon$という関係があると仮定して（ただしϵはθと統計的に独立な誤差項である），経済主体がωの小さい値よりも大きい値を好むための十分条件を考察する。

2　基本モデル

この節では本稿で考察される基本モデルを簡単に紹介する。ひとりの経済主体Aがいて，パラメータ$\theta\in[\underline{\theta},\overline{\theta}]$の実現値に関心をもっている。$\theta$は確率変数であり，連続微分可能な確率分布関数を$F_\theta(\theta)$，密度関数を$f_\theta(\theta)$とする：

$$F_\theta(\theta)=\int_{\underline{\theta}}^{\theta} f_\theta(t)dt.$$

θの期待値を$E[\theta]$とする：

$$E[\theta]=\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} tf_\theta(t)dt.$$

経済主体Aはθの実現値を観測できないが，そのかわり次のシグナル$\omega\in\mathbb{R}$の値を観測する：

* 大阪経済大学経営学部准教授。本稿，特に数式について村本顕理氏（大阪経済大学経営学部経営学科）から有益なコメントをいただいた。記して感謝する。ただし，本稿のあり得べき誤りに対する文責が筆者のみにあることはあらためて申し上げるまでもない。

$$\omega \equiv \theta + \epsilon. \qquad (1)$$

(1) の $\epsilon[\underline{\epsilon}, \overline{\epsilon}]$は観測誤差を表す確率変数であり，$\theta$ と ϵ は統計的に独立である（stochastically independent）と仮定する。ϵ の確率分布関数を $F_\epsilon(\epsilon)$，密度関数を $f_\epsilon(\epsilon)$ とする：

$$F_\epsilon(\epsilon) = \int_{\underline{\epsilon}}^{\epsilon} f_\epsilon(t)dt.$$

ϵ の期待値を $E[\epsilon]$ とする：

$$E[\epsilon] = \int_{\underline{\epsilon}}^{\overline{\epsilon}} t f_\epsilon(t)dt.$$

A は誤差項 ϵ の実現値も観察できないとする。このため，A はシグナル ω の実現値を観測した後でもパラメータ θ の実現値を正確に知ることはできない。ω が観測された後の θ の条件付き期待値を $E[\theta|\omega]$ とする。

経済主体 A のベルヌーイ型効用関数を $U(\theta)$ として，任意の $\theta_1 < \theta_2$ に対して $U(\theta_1) < U(\theta_2)$ であると仮定する。Milgrom（1981）に従って，もしすべての増加関数 U に対して，

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} U(\theta|\omega_1) f_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)d\theta < \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} U(\theta|\omega_2) f_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)d\theta$$

であるならば，経済主体 A にとってシグナル ω_2 はシグナル ω_1 より**好ましい**（favorable）ということにする。

本稿のテーマは，もし $\omega_1 < \omega_2$ ならば，経済主体 A にとっていつでもシグナル ω_2 はシグナル ω_1より好ましくなるための条件を考察することである。

3　シグナルを観測した後のパラメータの条件付き期待値

この節ではシグナル ω を観測した後のパラメータ θ の条件付き期待値 $E[\theta|\omega]$ を計算する。準備として，まず θ が特定の値をとるときの条件付き確率分布 $F_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ を計算する。(1) の下で，任意の $\omega = \omega^*$ について，次式が成立する：

$$\begin{aligned} F_{\omega|\theta}(\omega^*|\theta) &= \Pr(\theta + \epsilon \le \omega^*|\theta) \\ &= \Pr(\epsilon \le \omega^* - \theta|\theta) \\ &= F_{\epsilon|\theta}(\omega^* - \theta|\theta) \\ &= F_\epsilon(\omega^* - \theta). \end{aligned} \qquad (2)$$

ただし 4 番目の等式は θ と ϵ が統計的に独立であることから成立する。(2)は任意の $\omega = \omega^*$ について成立するので，$F_{\omega|\theta}(\omega|\theta) = F_\epsilon(\omega - \theta)$ と書き直せる。$F_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ を ω について微分すると，(2)より，条件付き密度関数 $f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$を得る：

$$f_{\omega|\theta}(\omega|\theta) = f_\epsilon(\omega - \theta). \qquad (3)$$

次に，θ と ϵ の同時確率分布（joint probability density function）$f_{\theta,\omega}(\theta, \omega)$ を計算する。乗数定理（multiplication rule）と(3)より，

$$f_{\theta,\omega}(\theta, \omega) = f_{\omega|\theta}(\omega|\theta) f_\theta(\theta) = f_\epsilon(\omega - \theta) f_\theta(\theta) \qquad (4)$$

さらに，ω の確率密度関数 $f_\omega(\omega)$ を計算する。

$$f_\omega(\omega)=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f_{\theta,\omega}(\theta,\omega)d\theta=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f_\epsilon(\omega-\theta)f_\theta(\theta)d\theta \qquad (5)$$

ただし，2番目の等式は(4)より成立する。(5)より，f_ω は f_ϵ と f_θ の畳み込み（convolution）であることがわかる。

最後に，ω が特定の値をとるときの条件付き確率密度 $f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)$ を計算する。ベイズの定理より，

$$f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)=\frac{f_{\theta,\omega}(\theta,\omega)}{f_\omega(\omega)}=\frac{f_\epsilon(\omega-\theta)f_\theta(\theta)}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f_\epsilon(\omega-\theta)f_\theta(\theta)d\theta} \qquad (6)$$

(6)より，シグナル ω を観測した後のパラメータ θ の条件付き期待値 $E[\theta|\omega]$ を計算する。

$$E[\theta|\omega]=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)d\theta. \qquad (7)$$

数値例を示そう。θ の確率密度関数は平均値 μ，分散 σ_θ^2 の正規分布とする：

$$f_\theta(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta}\exp\left(-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma_\theta^2}\right).$$

また ϵ の確率密度関数は平均値ゼロ，分散 σ_ϵ^2 の正規分布であるとする。

$$f_\epsilon(\epsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon}\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right).$$

このとき，$f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$，$f_{\theta,\omega}(\theta,\omega)$，$f_\omega(\omega)$，$f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)$，$E[\theta|\omega]$ は次のようになる：

$$f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)=f_\epsilon(\omega-\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon}\exp\left(-\frac{(\omega-\theta)^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right). \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}
&f_{\theta,\omega}(\theta,\omega)\\
&=f_\epsilon(\omega-\theta)f_\theta(\theta)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon}\exp\left(-\frac{(\omega-\theta)^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta}\exp\left(-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma_\theta^2}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon\sigma_\theta}\exp\left(-\frac{(\omega-\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma_\theta^2}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon\sigma_\theta}\exp\left(-\frac{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}{2\sigma_\epsilon^2\sigma_\theta^2}\left(\theta-\frac{\sigma_\theta^2\omega+\sigma_\epsilon^2\mu}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\right)^2-\frac{(\omega-\mu)^2}{2(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{\sigma_\theta^2\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\right)}}\exp\left(-\frac{\left(\theta-\frac{\sigma_\theta^2\omega+\sigma_\epsilon^2\mu}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\right)^2}{\frac{2\sigma_\epsilon^2\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}}\exp\left(-\frac{(\omega-\mu)^2}{2(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}\right).
\end{aligned} \qquad (9)$$

$$
\begin{aligned}
&f_\omega(\omega)\\
&=\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f_\epsilon(\omega-\theta)f_\theta(\theta)d\theta\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}}\exp\Big(-\frac{(\omega-\mu)^2}{2(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}\Big)\\
&\quad\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\Big(\frac{\sigma_\theta^2\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\Big)}}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\exp\left(-\frac{\Big(\theta-\frac{\sigma_\theta^2\omega+\sigma_\epsilon^2\mu}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\Big)^2}{\frac{2\sigma_\epsilon^2\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}}\right)d\theta}_{=1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}}\exp\Big(-\frac{(\omega-\mu)^2}{2(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}\Big).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

(10)より，ω の確率密度関数 $f_\omega(\omega)$ は平均値 $E[\omega]=\mu$，分散 $\mathrm{Var}(\omega)=\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2$ の正規分布であることがわかる。

$$
\begin{aligned}
&f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)\\
&=\frac{f_{\theta,\omega}(\theta,\omega)}{f_\omega(\omega)}\\
&=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\Big(\frac{\sigma_\theta^2\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\Big)}}\exp\left(-\dfrac{\Big(\theta-\frac{\sigma_\theta^2\omega+\sigma_\epsilon^2\mu}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\Big)^2}{\frac{2\sigma_\epsilon^2\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}}\exp\Big(-\dfrac{(\omega-\mu)^2}{2(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}\Big)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}}\exp\Big(-\dfrac{(\omega-\mu)^2}{2(\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2)}\Big)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Big(\frac{\sigma_\theta^2\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\Big)}}\exp\left(-\frac{\Big(\theta-\frac{\sigma_\theta^2\omega+\sigma_\epsilon^2\mu}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}\Big)^2}{\frac{2\sigma_\epsilon^2\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}}\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

(11)より，ω が特定の値をとるときの θ の条件付き確率密度関数 $f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)$ は平均値 $E[\theta|\omega]$ が

$$
E[\theta|\omega]=\frac{\sigma_\theta^2\omega+\sigma_\epsilon^2\mu}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2},
\tag{12}
$$

分散 $\mathrm{Var}[\theta|\omega]$ が

$$
\mathrm{Var}[\theta|\omega]=\frac{\sigma_\epsilon^2\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}
$$

の正規分布である。

4　確率密度関数の対数凹性と尤度比単調性

この節では，任意の $\omega_1<\omega_2$ に対して，経済主体Aにとってシグナル ω_2 はシグナル ω_1 より好ましくなるための条件を考察する。

そのための準備として，まず確率密度関数の対数凹性を定義する。

定義 1　確率変数 $x\in X\equiv\{x\in\mathbb{R}\,|\,f_x(x)>0\}$ の確率密度関数 f_x が連続 2 回微分可能であるとしよう。もし $f_x(x)=\exp(\varphi_x(x))$ であり，かつ φ_x が厳密な凹関数であるならば（すなわち $\varphi_x''<0$），このとき f_x は**厳密に対数凹である**（*strictly log-concave*）（すなわち $(\ln f_x)''<0$）[1]。

多くの確率分布が対数凹であることがわかっている[2]。

次に，条件付き確率密度関数の厳密な尤度比単調性を定義する。

定義 2　もし条件付き確率密度関数 $f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ が任意の $\theta_1<\theta_2$，任意の $\omega_1<\omega_2$ に対して，

$$\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_2)}{f_{\omega_1|\theta}(\omega|\theta_1)}<\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_1)}\tag{13}$$

であるならば，$f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ は**厳密な尤度比単調性をもつ**。

補題 1　仮定（1）の下で，もし $f_\epsilon(\epsilon)$ が厳密に対数凹であるならば，このとき $f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ は厳密な尤度比単調性をもつ。

証明：

$f_\epsilon(\epsilon)$ は厳密に対数凹であるとしよう。定義 1 より，$f_x(x)=\exp(\varphi_x(x))$ であり，かつ $\varphi_x''<0$ である。（3）より，$f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)=f_\epsilon(\omega-\theta)=\exp(\varphi_\epsilon(\omega-\theta))$ であるから，

$$\frac{f_{\omega|\theta}(\omega|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega|\theta_1)}=\frac{\exp(\varphi_\epsilon(\omega-\theta_2))}{\exp(\varphi_\epsilon(\omega-\theta_1))}=\exp(\varphi_\epsilon(\omega-\theta_2)-\varphi_\epsilon(\omega-\theta_1)).\tag{14}$$

となる。ここで ω について(15)を微分すると，任意の $\theta_1<\theta_2$ に対して，

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{f_{\omega|\theta}(\omega|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega|\theta_1)}\right)=\underbrace{\exp(\varphi_\epsilon(\omega-\theta_2)-\varphi_\epsilon(\omega-\theta_1))}_{>0}\underbrace{(\varphi_\epsilon'(\omega-\theta_2)-\varphi_\epsilon'(\omega-\theta_1))}_{>0}$$
$$>0$$

となる。不等式が成立するのは，$\omega-\theta_1>\omega-\theta_2$ かつ $\varphi_\epsilon''<0$ であるからである。したがって任意の $\omega_1<\omega_2$，任意の $\theta_1<\theta_2$ に対して，

$$\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_2)}{f_{\omega_1|\theta}(\omega|\theta_1)}<\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_1)}$$

が成立するので，定義 2 より，$f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ は厳密な尤度比単調性をもつ。　■

さらに，確率分布関数 $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega)$ の厳密な 1 次確率優位性を定義する。

定義 3　もし任意の θ に対して

$$F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)>F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)\tag{15}$$

であるならば，$F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ は $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)$ より**厳密に 1 次確率優位にある**（*strict first-order*

1）任意の $x\in X$ に対して $f_x>0$ であるから，$\ln f_x=\varphi_x$ より，$\varphi_x'=\dfrac{f_x'}{f_x}$，$\varphi_x''=\dfrac{f_x''f_x-(f_x')^2}{f_x^2}$ が成立する。よって条件 $\varphi_x''<0$ は条件 $f_x''f_x-(f_x')^2<0$ と同値である。

2）一様分布，正規分布，指数分布の密度関数は対数凹である。またワイブル分布，ベキ関数分布，ベータ分布，ガンマ分布はパラメータの値がある範囲にあるとき，対数凹である。詳しくは M. Bagnoli and T. Bergstrom（2005），“Log-concave probability and itsapplications,” *Economic Theory*, 26, 445-469 を参照してほしい。

stochastic dominance）。

Milgrom（1981）は次の命題を証明した[3)4)]。

補題 2　もし条件付き確率密度関数 $f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ が任意の $\theta_1<\theta_2$，任意の $\omega_1<\omega_2$ に対して，

$$\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_2)}{f_{\omega_1|\theta}(\omega|\theta_1)}<\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_1)}$$

であるならば（すなわち $f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)$ は厳密な尤度比単調性をもつならば），このとき $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ は $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)$ より厳密に 1 次確率優位にある。

証明：

$\theta_1<\theta_2$ に対して，$\dfrac{f_{\omega|\theta}(\omega|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega|\theta_1)}$ は ω について厳密な尤度比単調性をもつとしよう。このとき任意の $\omega_1<\omega_2$，任意の $\theta_1<\theta_2$ に対して

$$\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_1)}<\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_2)}{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_1)} \tag{16}$$

である。

(16)の両辺に $f_\theta(\theta_2)$ を乗じた後で，任意の $\theta^*\in[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ を選び，θ_2 について θ^* から $\overline{\theta}$ まで積分する：

$$\frac{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_2)f_\theta(\theta_2)d\theta_2}{f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_1)}<\frac{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_2)f_\theta(\theta_2)d\theta_2}{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_1)},$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_1)}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_2)f_\theta(\theta_2)d\theta_2}>\frac{f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_1)}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_2)f_\theta(\theta_2)d\theta_2}. \tag{17}$$

次に，(17)の両辺に $f_\theta(\theta_1)$ を乗じた後で，θ_1 について $\underline{\theta}$ から θ^* まで積分すると，

$$\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta^*}f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_1)f_\theta(\theta_1)d\theta_1}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\omega|\theta}(\omega_1|\theta_2)f_\theta(\theta_2)d\theta_2}>\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta^*}f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_1)f_\theta(\theta_1)d\theta_1}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\omega|\theta}(\omega_2|\theta_2)f_\theta(\theta_2)d\theta_2}, \tag{18}$$

最後に，$f_{\omega|\theta}(\omega|\theta)f_\theta(\theta)=f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)f_\omega(\omega)$ を用いて(18)を同値変形する：

$$\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta^*}f_{\theta|\omega}(\theta_1|\omega_1)f_\omega(\omega_1)d\theta_1}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\theta|\omega}(\theta_2|\omega_1)f_\omega(\omega_1)d\theta_2}>\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta^*}f_{\theta|\omega}(\theta_1|\omega_2)f_\omega(\omega_2)d\theta_1}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\theta|\omega}(\theta_2|\omega_2)f_\omega(\omega_2)d\theta_2}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta^*}f_{\theta|\omega}(\theta_1|\omega_1)d\theta_1}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\theta|\omega}(\theta_2|\omega_1)d\theta_2}>\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta^*}f_{\theta|\omega}(\theta_1|\omega_2)d\theta_1}{\int_{\theta^*}^{\overline{\theta}}f_{\theta|\omega}(\theta_2|\omega_2)d\theta_2}$$

3）詳しくは Milgrom（1981），p. 383 の命題 1 を参照してほしい。

4）尤度比単調性が最適契約に果たす役割については伊藤秀史（2003）の pp. 167–170 を参照してほしい。

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{F_{\theta|\omega}(\theta^*|\omega_1)}{1-F_{\theta|\omega}(\theta^*|\omega_1)} > \frac{F_{\theta|\omega}(\theta^*|\omega_2)}{1-F_{\theta|\omega}(\theta^*|\omega_2)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad F_{\theta|\omega}(\theta^*|\omega_1) > F_{\theta|\omega}(\theta^*|\omega_2). \tag{19}$$

任意の θ^* に対して(19)が成立するので，定義3より，任意の θ，任意の $\omega_1<\omega_2$ に対して $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ は $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)$ より厳密に1次確率優位にある。 ■

補題3　もし $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ が $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)$ より厳密に1次確率優位にあるならば，このとき経済主体Aにとってシグナル ω_2 はシグナル ω_1 より好ましくなる。また $\omega_1<\omega_2$ に対して，$E[\theta|\omega_1]<E[\theta|\omega_2]$ である（$E[\theta|\omega]$ は ω の厳密な増加関数）。

証明：

一般に，任意の θ，任意の $\omega_1<\omega_2$ に対して $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ が $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)$ より厳密に1次確率優位にあるという条件（補題2より $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)>F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ という条件）は，すべての増加関数 U に対して，

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} U(\theta|\omega_1) f_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)d\theta < \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} U(\theta|\omega_2)_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)d\theta$$

であるという条件と同値であることがすでに知られている（証明略）[5]。このとき，もし $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ が $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)$ より厳密に1次確率優位にあるならば，経済主体Aにとってシグナル ω_2 を観測したときの事後の期待効用水準はシグナル ω_1 を観測したときの事後の期待効用水準より高いことになるので，経済主体Aにとってシグナル ω_2 はシグナル ω_1 より好ましくなる。言い換えれば，Aにとって ω_2 は ω_1 よりグッド・ニュースである。

次に，任意の $\omega_1<\omega_2$ に対して $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_2)$ は $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega_1)$ より厳密に1次確率優位にあるとき(19)が成立するので，任意の θ について $F_{\theta|\omega}(\theta|\omega)$ は ω の減少関数である：

$$\frac{\partial F_{\theta|\omega}(\theta|\omega)}{\partial \omega} < 0. \tag{20}$$

$E[\theta|\omega]$ を次のように変形する：

$$\begin{aligned} E[\theta|\omega] &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \theta f_{\theta|\omega}(\theta|\omega)d\theta \\ &= [\theta F_{\theta|\omega}(\theta/\omega)]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} F_{\theta|\omega}(\theta|\omega)d\theta \\ &= \overline{\theta}\underbrace{F_{\theta|\omega}(\overline{\theta}|\omega)}_{=1} - \underline{\theta}\underbrace{F_{\theta|\omega}(\underline{\theta}|\omega)}_{=0} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} F_{\theta|\omega}(\theta|\omega)d\theta \\ &= \overline{\theta} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} F_{\theta|\omega}(\theta|\omega)d\theta \end{aligned} \tag{21}$$

2番目の等式は部分積分の公式より成立する。

ω について(21)を微分すると，

5）伊藤秀史（2003），p.397を参照してほしい。

$$\frac{\partial E[\theta|\omega]}{\partial \omega}=-\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\underbrace{\frac{\partial F_{\theta|\omega}(\theta|\omega)}{\partial \omega}}_{<0}d\theta>0 \tag{22}$$

不等式は(20)より成立する。したがって条件付き期待値 $E[\theta|\omega]$ は ω の厳密な増加関数である。■

前述の数値例で示したように，もし θ と ω の確率密度関数が正規分布であるならば，(12)より，$E[\theta|\omega]$ は ω の増加関数である：

$$\frac{\partial E[\theta|\omega]}{\partial \omega}=\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\epsilon^2}>0.$$

以上の補題1，補題2，補題3を要約すると，次の命題が成立する。

命題1　仮定(1)の下で，もし $f_\epsilon(\epsilon)$ が厳密に対数凹であるならば，このとき経済主体Aにとってシグナル ω_2 はシグナル ω_1 より好ましくなる。また $E[\theta|\omega]$ は ω の厳密な増加関数である。

参考文献

M. Bagnoli and T. Bergstrom (2005), "Log-concave probability and itsapplications," *Economic Theory*, 26: 445-469.

Paul R. MilgromMilgrom, Paul (1981), "Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications," *The Bell Journal of Economics*, Autumn, 1981, vol. 12, No. 2: 380-391.

伊藤秀史（2003）『契約の経済理論』有斐閣。

酒井泰弘（1982）『不確実性の経済学』有斐閣。