

ベンハムのコマに関する動的干渉モデル

西 山 豊

要旨

白黒のパターンから色が浮かび上がるベンハムのコマの理由は未だ謎である。この論考は、著者が1979年に発表した記事の続編であり、特に主観色の現れる理由を著者の仮説をもとに、より深く考察したものである。連続する2つの刺激が、ヒトの視覚系を通すことで位相がずれて動的な干渉が起こり、特定の色が浮かび上がるのではと推論している。この仮説が、200年近くつづく主観色解明の歴史に大きく寄与するのではと期待する。

キーワード：ベンハムのコマ、主観色、視覚系、干渉、波長、位相差、運動方程式

1. はじめに

知覚心理学における主観色 (Subjective colors) の研究はプレボー (1826年) に始まり、フェヒナー (1839年)、ベンハム (1894年) と続く¹⁾。チャールズ・ベンハム (1860-1929) は白黒の図柄から色が浮かび上がるベンハムのコマ (Benham's top) を考案し、そのおもちゃがイギリスで大流行となり、科学雑誌ネィチャーでも取り上げられたが、その100年後も主観色の理由がわかっていない²⁾。

私は、1979年にベンハムのコマについて考察し、主観色が現れる仮説をたてた³⁾。その後、記事を要約し、英語論文として発表してきた⁴⁾⁵⁾⁶⁾。しかし、私の仮説の説明が不十分であり、わかりにくいものであることに気付いた。最初に考察してから40年以上たつが、再考察の結果、私の仮説が正しいものであることを確信した。連続する2つの刺激がヒトの視覚系を通すことによって動的な干渉をひき起こす。位相がずれた2つの刺激を重ね合わせることで主観色が現れるという過程を、できる限り丁寧に簡潔に説明したい。

2. 静的な干渉

私は、ベンハムのコマは、何らかの形で、物理学でいう光の干渉のようなものが起こっているのではと推測した。

光には粒子説と波動説がある。トーマス・ヤング (1773-1829) は、2つのスリットから出る光が干渉縞を生じることで光の波動性を示した。2つの波の山と山が重なる時波は強めあい、山と谷が重なる時打ち消しあう。強めあうところでは明るく、打ち消しあうところでは暗くなり、スクリーン上に明暗の縞模様ができる。

図1のように、スリットS1のaから出た光は、スリットS2のbとcにわけられ、スクリーンFのdに到達する。bとcからdまでの径路の差が、光の波長 λ の整数倍にな

るとき干渉して強めあい、その半分のときは弱めあって、スクリーンF上に明暗の縞模様ができる。

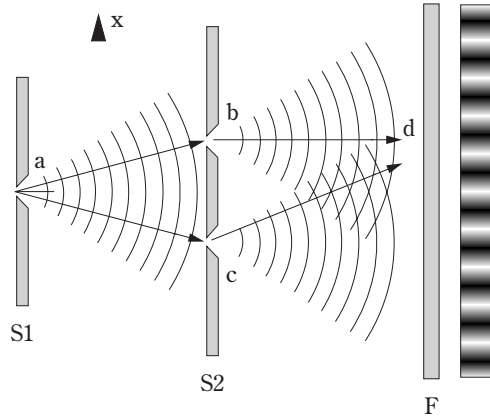


図1 ヤングの干渉実験

(出典：Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_interference_experiment#/media/File:Ebohr1_IP.svg)

シャボン玉の薄膜は、薄膜の上面で反射する光と、薄膜の下面で反射する光の干渉で、虹色が出る。図2のように薄膜に対して斜めから入射する、平行な2つの光AとBを考える。薄膜の上面Aで屈折し、薄膜の下面Cで反射し、薄膜の上面B'で屈折して出てくる光と、薄膜の上面B'で反射する光が目Eに到達する径路は、 $A \rightarrow C \rightarrow B' \rightarrow E$ と $B \rightarrow B' \rightarrow E$ であるが、径路差は $\overline{AC} + \overline{CB'} - \overline{BB'}$ となる。径路差が光の波長 λ の整数倍になるときは強めあい、その波長の色が浮かび上がる。その結果として虹色となる。

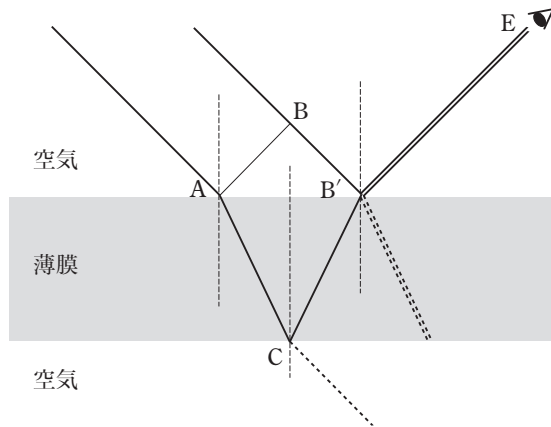


図2 薄膜による干渉（シャボン玉）

ヤングの干渉実験や、薄膜による干渉は、どちらも光の「径路差」が関係している。ところが、ベンハムのコマには径路差に対応するものがない。また、ヤングの干渉縞やシャボン玉の虹色は写真で撮影することができるが、ベンハムのコマは主観色なので撮影することができない。撮影しても、ふれた白黒の画像として映るだけだ。

ベンハムのコマは、眼球から網膜を経て大脳に至るヒトの視覚系を通すことで、ヒトだけが知覚できる主観色である。どこかで干渉が起こっているはずだが、その場所が特定できていない。干渉であることに変わりはないがベンハムのコマは違うので、ヤングの干渉実験を「静的な干渉」、ベンハムのコマを「動的な干渉」と呼ぶことにしよう。動的な干渉については詳しく考察していこう。

3. 極座標から直角座標へ

ベンハムのコマについて概観してみよう。直径が約10センチの円盤で、下の半円は黒色で塗りつぶされていて、上の半円には3本ずつの円弧が描かれている（図3）。円弧は中心角が45度で4つのブロックがある。円弧の本数は2本でも1本でもよいが、3本が見えやすい。



図3 ベンハムのコマ

コマを勢いよくまわすと最初は何も見えない。コマの回転が減速してきて、パターンがちらつきだすと、その瞬間にぱっと色が浮かび上がってくる。コマを時計回り（右方向）にまわすと外から青，緑，橙（だいだい），赤の順に色が見える（図4(1)）。この色は鮮明な色ではないが、黒色でも白色でもなく、明らかに色を感じることができる。

コマを反時計回り（左方向）にまわすと外から赤，橙，緑，青の順に色が見える（図4(2)）。コマを回す向きを逆にすると現れる色の順が逆になること、色の並ぶ順序は虹色と同じように光の波長の順になっていることが、主観色解明のキーとなる。

扇風機が逆に回って見えるのはストロボ効果によるものであり、蛍光灯の下でしか観察できないが、ベンハムのコマは太陽光の下でも色が浮かび上がる。主観色はヒトの視覚系が大きく関係していることが推測できる。

私は、円弧の4つのブロックの中で、外でも中心でもない中間にある緑と橙の色に注目した。緑と橙の色は、コマを逆にまわすと、どうして色が逆になるのか。図5(1)のように、下の半円は黒で同じだが、上の半円は、円弧の位置が逆になっていることがわかる。

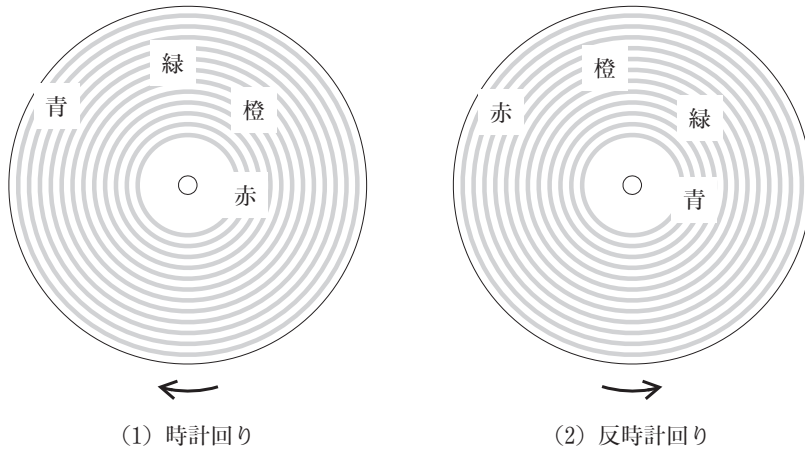


図4 回転方向と色の順

中心角は一回りで360度であり，下半円の黒の中心角は180度であり，上半円の180度を白黒白の中心角で分割すると，時計回りで，

緑：黒（180度）—白（45度）—黒（45度）—白（90度）

橙：黒（180度）—白（90度）—黒（45度）—白（45度）

となる。

黒—白—黒—白のパターンで，黒と白の配置が色の違いに関係してそうだと推測できる。私は，今後の理論展開のために，図5(2)のようにベンハムのコマで，外側と中心の円弧の位置を中心角で約20度，矢印のように下半円の黒と引っ付かないようにずらした。こうすることによって，黒っぽい色になっていた主観色が見やすくなった。そして，4つのブロックはどれも黒—白—黒—白のパターンとなった。変形による不都合はない。

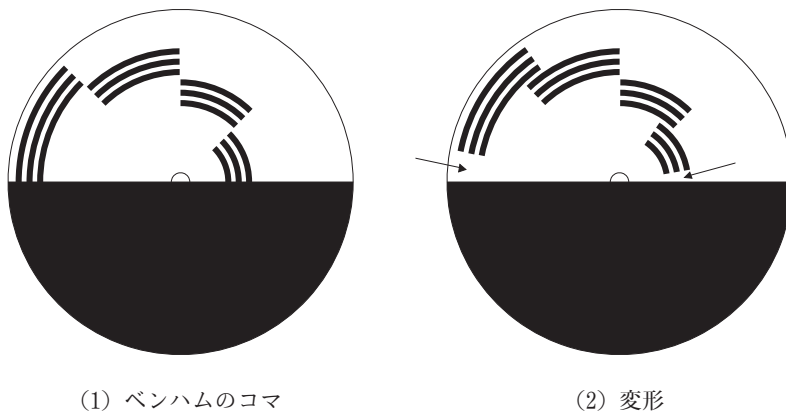


図5 考察のための変形

図5(2)のパターンで考えることにする。極座標を直角座標に置き換えると図6のようになる。コマの外周に，反時計まわりにAとB，1から4の記号をつける。円盤は右方

向に（時計回りに）まわっているとす。

視点を左端の A の場所に固定すると、コマはまず A から B までの黒の部分が通過する。円盤の下半分の黒は目を休めるためのもので、主観色には関係しない。円盤が半周すると 1 の円弧が表れ、つぎに 2 の円弧が表れ、3 の円弧、4 の円弧とつづく。円弧は 3 本ずつあるが、この本数は主観色が見えやすくする工夫であり本質的ではない。円盤の中心から 1 は赤、2 は橙、3 は緑、4 は青の主観色が見える。直交座標（右）では上から下に向かって赤、橙、緑、青となる。

1 から 4 はどれも黒—白—黒—白の順になっている。最初の黒と二番目の黒の長さは同じであるが、二番目の黒を挟む前後の白の長さが違う。最初の白を第一次刺激、二番目の白を第二次刺激とするなら、この 2 つが何らかの干渉（強調、打消しなど）を起こすのではないかと考えられる。

絵具では黒と白は同列に一色としてカウントされるが、黒は色ではない。黒はすべての色を吸収し、白はすべての色を反射するので、主観色に関係するのは黒の部分ではなく白の部分であることに注意すること。



図 6 極座標から直交座標へ

4. 動的な干渉

図 6 右の直交座標で見たように、ベンハムのコマは黒—白—黒—白のパターンが繰り返されるときの主観色が現れることがわかった¹⁾。また、黒の部分でなく白の部分が主観色に関係していることもわかった。最初の白と二番目の白が干渉を起こしているのだということは想像がつく。

ヤングの干渉実験（図 1）や、シャボン玉の薄膜（図 2）での干渉は、光が到達する径路差によって生ずるものだった。ベンハムのコマは、視覚刺激（Visual stimuli）が眼球を通り、網膜を経て、錐体、視神経網から脳に至る視覚系で色が認識されるので、この径路には、どこにも「径路差」に対応するものがない。同じ経路を通るので干渉が起こりそうにないかに見える。

ここでは「径路差」ではなく「位相差」で干渉が起こることを示していこう。また、ヒトの視覚系を通すことで干渉が起こるので、「動的な干渉」と呼ぶことにする。

ベンハムのコマの黒—白—黒—白のパターンで、白は白色光を反射させて目に入る（視覚系に刺激する）箇所である。最初の白を第1次刺激、黒をはさんで次の白を第2次刺激と呼ぶことにする。ベンハムのコマは1秒間に2～5回転していて、このパターンが繰り返されるので、不規則な矩形のデジタル波とみなすことができる。

第1次刺激の白は、眼球から網膜を経て錐体で吸収され大脳で白と認識される。第2次刺激の白も、眼球から網膜を経て錐体で吸収され大脳で白と認識される。白と白の認識が重なると白になり、色が浮かび上がる余地がないかに見える。

神経系による生体内の情報処理システムの基本要素はニューロン（神経細胞）である。ニューロン間の情報伝達はイオン伝導である。イオン伝導は刺激がある値より大きくなければパルスを発生しないこと（閾性：いきせい）や、伝達が遅れたりすること（遅延）がある。私は、この特性が主観色に関係しているのではないかと思う。

私は、1979年に、第1次刺激が何らかの理由で遅れて第2次刺激に重なるとき、色が浮かび上がるのではないかと考えた（図7）³⁾。そして第1次刺激の遅れの大きさが浮かび上がる色の波長に関係するのではないかと、遅れの大きさは第1次刺激の量に逆比例するのではないかと推測したが、理論までには至らなかった。

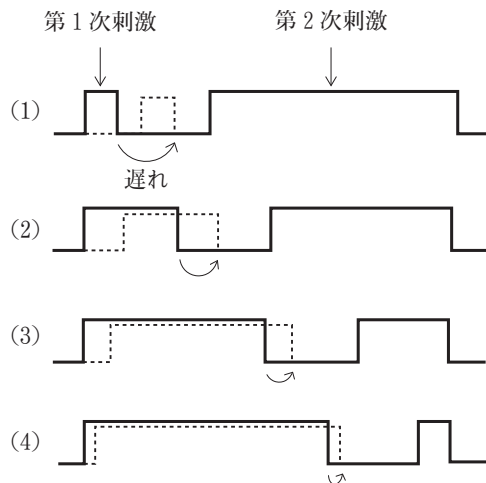


図7 第1次刺激と第2次刺激の干渉

さて、白色光に含まれるある色の波に注目して、2つの波の位相がずれることによって、波が強めあったり、打ち消しあったりすることを示そう。

波長と振幅が同じ2つの正弦波を考え、位相差を α とする。

$$y_1 = \sin(\theta + \alpha)$$

$$y_2 = \sin \theta$$

図8で、重ね合わせの概観を示そう。第1次刺激と第2次刺激の正弦波は、振幅と波長が同じで周期が5である（上段）。位相差がないとき（ $\alpha=0$ ）、2つの波が重ね合わされる

と、振幅が2倍で波長が同じの正弦波となる。第1次刺激の位相が90度 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) ずれて第2次刺激に重なったとき、波の最大振幅は1.4倍になり、180度 ($\alpha = \pi$) ずれたときは、波は打ち消しあい振幅は0になり、360度 ($\alpha = 2\pi$) ずれたときは、振幅は2倍になる。

2つの正弦波の重ね合わせは、三角関数の和積の公式より

$$y_1 + y_2 = \sin(\theta + \alpha) + \sin \theta = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)$$

となる。

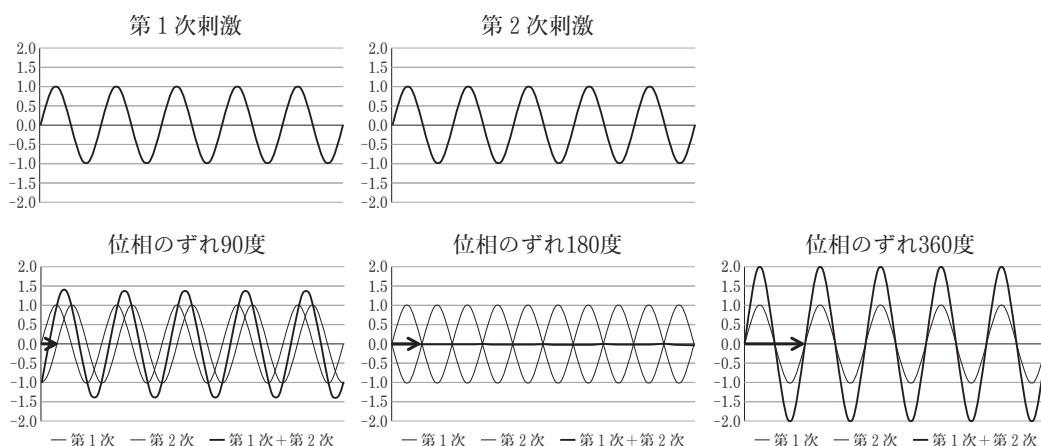


図8 波の重ね合わせ

第1次刺激と第2次刺激の波に位相差がないときは ($\alpha = 0$)、干渉が起こらず、白に白を重ねると白になり、色は浮かんでこない。2つの波に位相差があるとき ($\alpha \neq 0$)、干渉が起こり、特定の色が浮かび上がる仕組みを考えてみよう。

白色はあらゆる色を含んでいる。説明を簡単にするため赤、緑、青の3色とする。

図9は、やや複雑であるが、3行4列の合計12個のグラフ群で構成される。

左端の1列目は縦方向に、周期が4の赤、周期が5の緑、周期が6の青を配置している。この3つの波が重ね合わされると白になる。

それぞれの行には横方向に、位相が赤の波長で360度ずれたとき、緑の波長で360度ずれたとき、青の波長で360度ずれたとき、第1次刺激と第2次刺激の波が重なるときの状態を示している。

1行目の4つのグラフ群について説明しよう。

赤(周期が4)は、赤の波長で360度ずれたとき振幅は2倍になり、緑の波長で360度ずれたとき振幅は1.6倍になり、青の波長で360度ずれたとき振幅は1倍になる。赤(周期が4)は赤の波長で360度ずれたときだけ振幅が2倍となり、赤が大きく浮かび上がる。そのグラフを枠で囲んで強調した。

同様に、2行目の4つのグラフ群について説明しよう。

緑（周期が5）は、赤の波長で360度ずれたとき振幅は1.4倍になり、緑の波長で360度ずれたとき振幅は2倍になり、青の波長で360度ずれたとき振幅は1.7倍になる。緑（周期が5）は緑の波長で360度ずれたときだけ振幅が2倍となり、緑が大きく浮かび上がる。そのグラフを枠で囲んで強調した。

同様に、3行目の4つのグラフ群について説明しよう。

青（周期が6）は、赤の波長で360度ずれたとき振幅は0になり、緑の波長で360度ずれたとき振幅は1.6倍になり、青の波長で360度ずれたとき振幅は2倍になる。青（周期が6）は青の波長で360度ずれたときだけ振幅が2倍となり、青が大きく浮かび上がる。そのグラフを枠で囲んで強調した。

今度は図9を列の方向（縦の方向）で見よう。左から1列目は赤、緑、青を重ねると白になる。白はすべての色を含んでいる。

2列目は、赤の波長で360度ずらして重ねると、赤の振幅は2倍に、緑の振幅は1.4倍に、青の振幅は0になり、赤が大きく浮かび上がる。

3列目は、緑の波長で360度ずらして重ねると、赤の振幅は1.6倍に、緑の振幅は2倍に、青の振幅は1.6倍になり、緑が大きく浮かび上がる。

4列目は、青の波長で360度ずらして重ねると、赤の振幅は1倍に、緑の振幅は1.7倍に、青の振幅は2倍になり、青が大きく浮かび上がる。

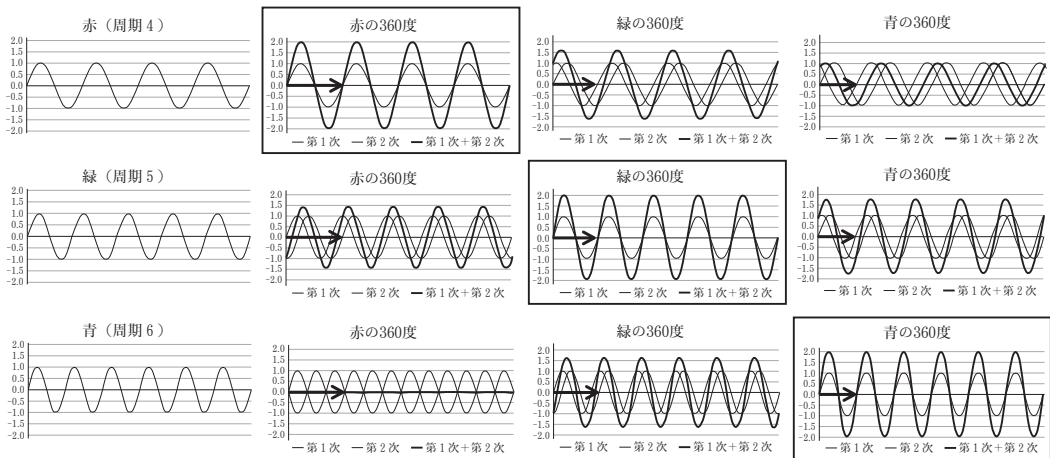


図9 特定の色が浮かび上がる理由

5. 遅延の運動方程式

図9で特定の色が浮かび上がる仕組みを示したが、ベンハムのコマとの対応を考えてみよう。図6で回転する円盤を直交座標に変換した。3本の円弧は3本の直線となったが、3本になっているのは主観色が現れやすくするための工夫であって、1本でも同じであり、

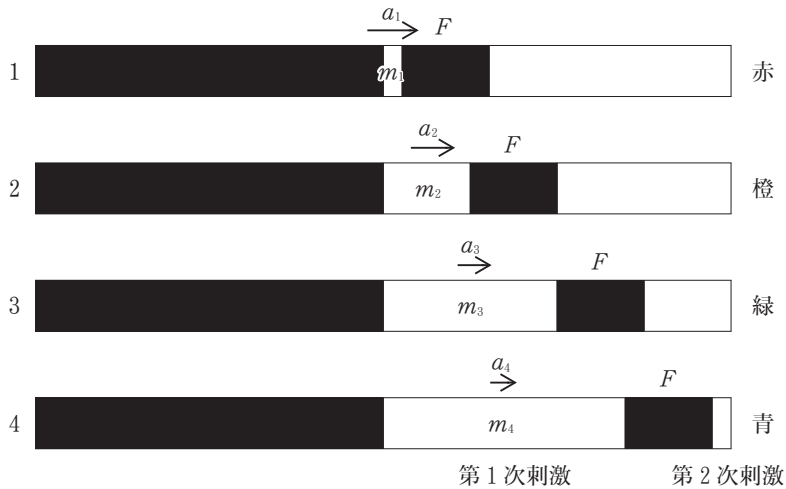


図10 遅延の運動方程式 ($F=ma$)

それを簡略化すると図10のようになる。

コマが回転すると、直角座標では左から右に進み、これが繰り返される。上から1は赤、2は橙、3は緑、4は青に対応する。波長は長いほうから短いほうに並んでいる。どのケースも黒—白—黒—白の順になっていて、最初の黒は目を休めるところで主観色に関係せず、つづく白—黒—白が主観色に関係する。

最初の白を第1次刺激、黒を挟んで二番目の白を第2次刺激と呼ぶことにする。第1次刺激がずれて、第2次刺激に重なるとき、動的な干渉が起こる。第1次刺激がずれる大きさを、1の赤がいちばん大きく、4の青がいちばん小さくすると、図9で示した特定の色が浮かび上がる理由と符合する。

そんな都合のよい仮説が成り立つのだろうか。

白—黒—白の真ん中の黒は第1次刺激の伝達を遅らせる、抑制する働きをするのではないだろうか。第1次刺激の白の区間が短いときは大きく遅れ、長いときは小さく遅れるとするなら、主観色の説明に都合がいい。そこで私は大胆な仮説を立てた。

第1次刺激の白を、光の量、伝達する物質、運動する物体と考え、質量 $m(m_1, m_2, m_3, m_4)$ 、加速度 $a(a_1, a_2, a_3, a_4)$ を対応させる。

白の面積を白色光が視覚系に伝える物理量ととらえるなら、その大きさを質量に例えることもできるだろう。白の面積が大きければ光量が大きく質量は大きく、面積が小さければ光量が小さく質量は小さい。

黒の部分は白色光を一切含まず、視覚系には何も伝えない。むしろ先行する白が視覚系に伝えた物理量の進行を停止または遅らせる働きをするのではないかと考えられる。

黒は白の伝達を遅らせる働きをする力である。黒の長さはどれも同じなので力 F (一定) とすると、これらには

$$F=ma=m_i a_i$$

の運動方程式が成り立つと考えられる。

図10より、第1刺激の長さは、1の赤が最も短く4の青が最も長いので、質量 m は、

$$m_1 < m_2 < m_3 < m_4$$

の関係がある。

運動方程式 $F=ma$ より、加速度 a は、 F (一定) なので、

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

となる。

「軽いものほど動かしやすく、重いものほど動かしにくい」というニュートンの運動方程式がベンハムのコマにおいても成り立つ。第1次刺激の区間が小さいほど大きくずらされ、区間が大きいほど小さくずらされて第2次刺激と重なり、動的な干渉が起こっている。

1の赤はつぎのように説明できる。

第1次刺激の質量 m_1 はいちばん小さいので、加速度 a_1 はいちばん大きくなり、そのため第1次刺激はいちばん大きくずれて第2次刺激と重なり干渉する。図9の1行目で示したように、いちばん長い波長の赤が大きく浮かび上がる。

同様に、4の青はつぎのように説明できる。

第1次刺激の質量 m_4 はいちばん大きいので、加速度 a_4 はいちばん小さくなり、そのため第1次刺激はいちばん小さくずれて第2次刺激と重なり干渉する。図9の3行目で示したように、いちばん短い波長の青が大きく浮かび上がる。

6. おわりに

以上、ベンハムのコマについて色が浮かび上がる理由を推論してきた。プレボーが1826年に主観色を見つけてから200年近くになる。主観色が現れる白黒のパターンがいくつも考案されてきたが、その理由がわかっていない。連続する2つの刺激、第1次刺激と第2次刺激が、眼球から網膜を経て脳に伝達するヒトの視覚系で、刺激の位相がずれることで動的な干渉が起こり、結果として主観色が現れる。

私は思う。究極のところ、図11に示す主観色の発現モデルに帰結するのではないだろうか。黒—白—黒—白の区間の長さを a, b, c, d とし、このパターンが毎秒 n 回繰り返されるとき、この5つの変数の値を変化させることで、さまざまな色が生成されるのではないだろうか。それにはベンハムのコマのように円盤を回す必要もなく、画面上に黒—白—黒—白が映し出される実験装置があればよい。私の仮説が実証されれば、プレボー、フェ

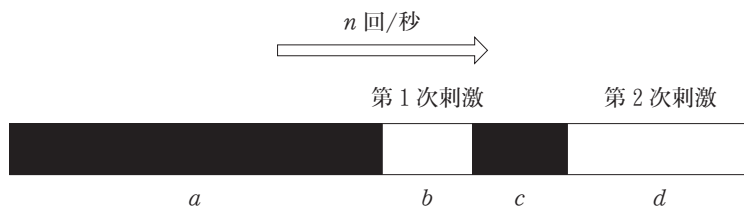


図11 主観色の発現モデル

フィナー、ベンハムと続く主観色の研究が大きく前進するに違いない¹⁾²⁾。

【付記】

私がベンハムのコマに関心を持ったのは1979年で、文献¹⁾をもとに、私の考察を加えて、IBM 広報誌『無限大』に記事をまとめた³⁾。今回の論考は、この記事の続編であるので、日本語文³⁾または英語文⁵⁾を熟読し、ベンハムのコマと主観色についての概要を理解しておいてほしい。

私は、2005年、英国ケンブリッジ大学留学の際、大学図書館でベンハムのコマが未解決問題であることを知った²⁾。そして、大学を退職して2023年に再考察することで、仮説を理論化できることになった。

また、図9で特定の色が浮かび上がる理由を説明したが、この結果を使って主観色の色を推計することができる。色の三原色をRGBとすると、重ね合わせによる振幅の大きさは、図9の列の方向（縦の方向）で、

$$(R, G, B) = (2, 1.4, 0)$$

$$(R, G, B) = (1.6, 2, 1.6)$$

$$(R, G, B) = (1, 1.7, 2)$$

であった。これらを0から255の色度に計算しなおすと、

$$(R, G, B) = (255, 179, 0)$$

$$(R, G, B) = (204, 255, 204)$$

$$(R, G, B) = (128, 217, 255)$$

になる。この数値をもとに作図したのが図12である。

最上段は、 $(R, G, B) = (255, 255, 255)$ で、三原色の加色混合により白（White）となる。2段目は赤の波長だけ位相をずらした主観色、3段目は緑の波長だけ位相をずらした主観色、4段目は青の波長だけ位相をずらした主観色である。主観色は、赤、緑、青の鮮明な色ではなく、パステルカラーのような中間色となっている。

図4で主観色を青、緑、橙、赤などと説明したが、実際は色には変わりはないが不鮮明な色である。

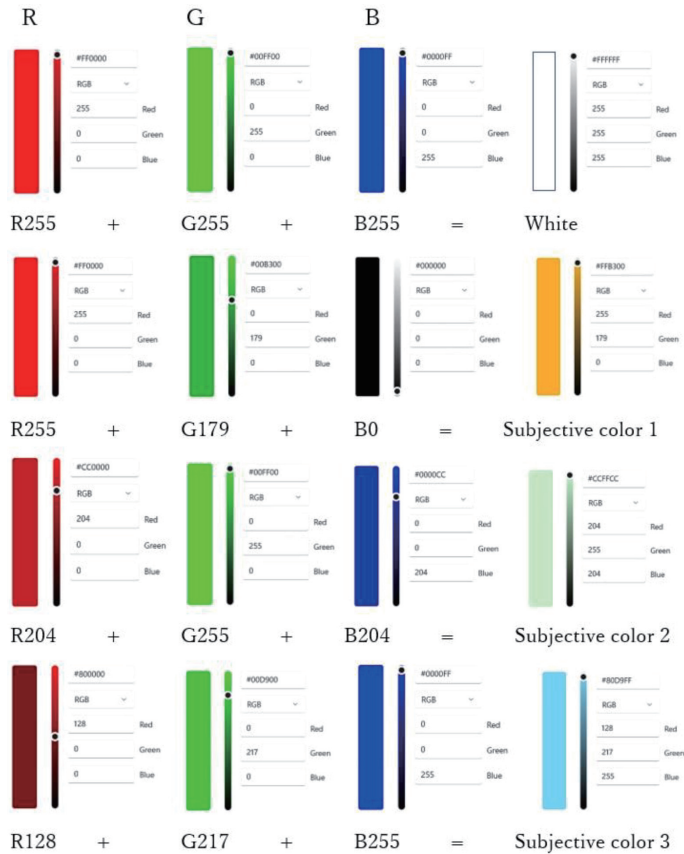


図12 動的干渉モデルによる主観色の推計

参考文献

- 1) Jozef Cohen, Donald A. Gordon, The Prevost-Fechner-Benham subjective colors, *Psychological Bulletin*, 46(2), 97-136, 1949.
- 2) Christoph von Campenhausen, Juergen Schramme, 100 Years of Benham's Top in Colour Science, *Perception*, 24(6). 695-717, 1995.
- 3) 西山豊「ベンハムのコマ」『無限大』日本 IBM 広報誌, No. 46, 45-50, 1979.
(西山豊『サイエンスの香り』日本評論社, 1991年に所収)
- 4) 西山豊「数学を楽しむ：ベンハムのコマ」『理系への数学』Vol. 41, No. 5, 4-7, May 2008.
- 5) Yutaka Nishiyama, The Benham's Top, *Osaka Keidai Ronshu*, Vol. 62, No. 6, 87-94, 2012.
- 6) Yutaka Nishiyama, The Mathematics of Benham's Top, *Int. J. Pure and Appl. Math.*, Vol. 93, No. 3, 399-408, 2014.