ジッヘルマン・ダイスの百ます計算への拡張

宮永 望
西山 豊

要旨

この論考は足し算を演算子とする百ます計算 $C_{i,j}=A_i+B_j$,（$1\leq i,\ j\leq 10$）について，100個のます目 $C_{i,j}$ が，0から99までの連続する100個の数で構成されるという特殊なケースを扱っている。そのような条件を満たすために $\{A_i,\ B_j,\ (1\leq i,\ j\leq 10)\}$ はどのような数列でなければならないのか，また，異なる組み合わせは何通りあるかを問うている。まず，ジッヘルマン・ダイスの場合に用いた，母関数の因数分解による方法で7通りの解を見つけた。次に，図形的な解法により，7通りの解を見つけた。そして，因数分解による解法と図形的な解法の7通りが，それぞれ対応していることを示した。さらに，$n\times n=n^2$ ます計算の場合の解の数 N は，p を n の約数の数とするとき，$N=(p-2)(p-1)+1$ となるのではと予想した。

AMS Subject Classification: 11A02, 00A09, 05A15
キーワード： 百ます計算，ジッヘルマン・ダイス，母関数，円分多項式，因数分解，ナイト・ツアー

1．10年目の奇跡

共著者のひとり西山は2005年度，イギリスのケンブリッジ大学に留学中であった。知人のスティーブ・ハンブルから面白い問題があるとメールが送られてきた。それは，2つのサイコロを使った実験で，サイコロの目の和は2から12まで分布するが，これと同じ度数分布を持つサイコロがあるとするならば，

1, 3, 4, 5, 6, 8 と 1, 2, 2, 3, 3, 4

の組み合わせである，というものである。普通のサイコロは1から6までであるが，サイコロの6面にこのような数を記入しておけば，サイコロの目の和の度数分布が同じになることが確認できたので，日本数学協会[1]の掲示板に，ケンブリッジから投稿した（2005年5月24日）。その後，調べたことを「サイコロの目の和が同じ」という記事で『理系への数学』2005年12月号に投稿し，掲載された［6］。

共著者のもうひとり宮永は，西山の投稿をヒントにして，これを百ます計算[2]の足し算

1）2002年設立，公式サイト http://www.sugaku-bunka.org/（2015年9月閲覧）

2）縦10×横10のますの左と上にそれぞれ0から9（の場合が多いが，それ以外もある。）の数字をランダムに並べそれぞれ交差するところに指定された計算方法（加法，減法，乗法，除法など）の答えを記入する計算トレーニングである。

の問題として発展させ，そのことを同掲示板に投稿した（2005年７月17日）。また，勤務大学の学生に百ます計算の穴埋め問題として出題したところ，「因数分解がこんなことに使えるとは驚いた」というような感想が寄せられたという。宮永は，この時点で多項式の因数分解による方法で，異なる７通りの解を見つけていた。多項式の因数分解とは何ぞや。これは後述する。

2005年に掲示板に投稿された「サイコロの目の和」と「百ます計算」についてのスレッドは，その後，しばらく書き込まれることはなかった。2015年になって，宮永が，同協会のある勉強会に参加したところ，10年前に投稿したのと同じ「百ます計算」の問題が出され，その解が７通りであるという報告を受け，自分が10年前に掲示板に投稿したことがあるのを思い出し，驚いた。宮永は，投稿日が10年と１日前だったことで，さらに驚いたと掲示板に書き込んだ（2015年７月18日）。まさに10年目の奇跡である。

西山は，サイコロの目の和（ジッヘルマン・ダイス）には興味があったが，百ます計算は自分が受けた教育ではなく知らなかったので，宮永の書き込みにはそれほど関心を示さなかった。今回，改めて宮永の投稿内容を読んでみて，これが彼のアイデアによるものであることを知り，何らかの形で記事または論文にすることを彼に勧めた。宮永は，解法がジッヘルマン・ダイスに用いられた母関数の因数分解によるものであり，新規性に乏しく記事としての価値が少ないと固辞した。その後，ふたりの情報交換，意見交換により意外な展開となったことは後述する。

まず，宮永が示した百ます計算・足し算の概略を説明しよう。

図１に示すように左の列Aと上の行Bには次のような数が入っている。これがひとつの解である。

$$A=\{0,\ 2,\ 20,\ 22,\ 40,\ 42,\ 60,\ 62,\ 80,\ 82\},\quad B=\{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 16,\ 17\}$$

100個のます目をひとつずつ足し算で埋めていってもよい。穴埋めが面倒だったら，A，Bの数列を表計算ソフトに入力し，複合参照を用いて数式をコピーすれば，たちどころに100個のます目が計算できる（図２）。その数はランダムに並んでいるが，０から99までの数が１個ずつ現れることが確認できる。

これは，百ます計算・足し算の特殊なケースであるが，このようなことを可能にするAとBの組み合わせは，どのようにして求めるのであろうか。ジッヘルマン・ダイスに用いられた因数分解による方法をそのまま応用すればいいわけだが，詳しくは後述する。

西山は，AとBを求めるには因数分解による方法しかないのだろうかと思案しながら，図２に表示された100マスの数を眺めながら，図形的な解法がないかを検討してみた。図２の数字で，0を出発点として，1，2，3と線で結んでいき99まで到達させた。それが図３である。０から99までの経路（Path）は，規則的な形をしている。この経路の形がひとつの解だとしたら，別の経路があるなら，それが別の解となるはずだ。また，図２の100個の数について，左端の列にはAと同じ数列が，上端の行にはBと同じ数列が入っていることに気付いた（図４）。

後述するが，図３のような規則的な別の経路を見つけ，その経路に沿って数字を０から

99まで埋めていき，図４では左から２列目，上から２行目に対応する数列を別の A と B の組み合わせとし，その数列を図１のように新しい問題とすれば，特殊なケースが実現できることになる。

＋	0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
0										
2										
20										
22										
40										
42										
60										
62										
80										
82										

図１．一つの解

＋	0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
0	0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
2	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19
20	20	21	24	25	28	29	32	33	36	37
22	22	23	26	27	30	31	34	35	38	39
40	40	41	44	45	48	49	52	53	56	57
42	42	43	46	47	50	51	54	55	58	59
60	60	61	64	65	68	69	72	73	76	77
62	62	63	66	67	70	71	74	75	78	79
80	80	81	84	85	88	89	92	93	96	97
82	82	83	86	87	90	91	94	95	98	99

図２．足し算してみる

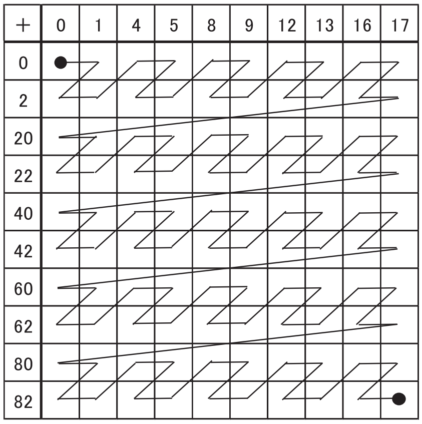


図３．０から99までを線で結ぶ

＋	0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
0	0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
2	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19
20	20	21	24	25	28	29	32	33	36	37
22	22	23	26	27	30	31	34	35	38	39
40	40	41	44	45	48	49	52	53	56	57
42	42	43	46	47	50	51	54	55	58	59
60	60	61	64	65	68	69	72	73	76	77
62	62	63	66	67	70	71	74	75	78	79
80	80	81	84	85	88	89	92	93	96	97
82	82	83	86	87	90	91	94	95	98	99

図４．100マスの１列目と１行目が解

西山が，なぜ経路に注目したのか。それは，ナイト・ツアー[3]や，魔方陣（奇数×奇数）の一般解を連想したからである。ナイト・ツアーは 8×8＝64個 のチェスのます目を「桂馬飛び」ですべてを通過させるというパズルであるが，この経路がひとつの解になっている。図５(a)では右上端の１を出発点として，桂馬飛びしながら２，３，４と進んでいくと重

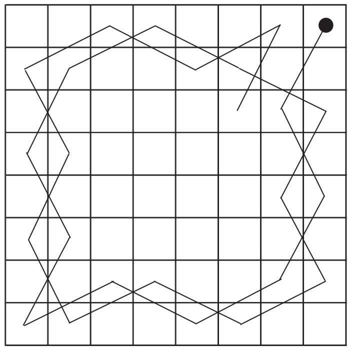
3）Knight's Tour は，チェスを使った数学的パズルの一種。「騎士の巡歴」「桂馬拾い」とも呼ばれ，チェスボード上のナイトを移動させ，64マス全てを一回ずつ通過させる。

複することなく64まで進むことができる。図５(b)は25の途中まで図示してある。

魔方陣は，縦・横・斜めの和が同じになるというパズルであるが，ます目が奇数×奇数，偶数×偶数の場合，それぞれに対して一般解が知られている。図６は奇数×奇数，5×5の解の一例であるが，数字の１を最下行の中央に置き，そこから斜め左下に進んでいく。そこにます目がなければ，その位置に対応するます目に移動する。そのようにして 2，3，4，5 と進んでいく。そして，進むべきます目にすでに数が埋められていたなら，真上に進むことにする。そしてまた，斜め左下に進めば，25まで到達することができる。これも規則にのっとった経路の問題である。今回の百ます計算も０から99までの経路を求める問題でもあるので，必ず，図形的な解が存在するのではと，西山は期待した。

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

(a)



(b)

図５．ナイト・ツアー（参考文献[4]より）

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

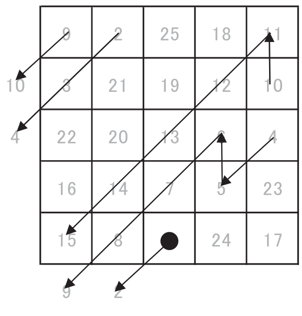


図６．魔方陣（奇数×奇数）の一般解

２．ジッヘルマン・ダイス

ここでは，ジッヘルマン・ダイスの簡単な説明をしておこう。ジッヘルマン・ダイスとは，コロネル・ジョージ・ジッヘルマン氏が開発した特殊なサイコロで，図７に示すように，サイコロの目の和の度数分布が，普通のサイコロと同じになるというものである。図７左は普通のサイコロ，同右はジッヘルマン・ダイスであり，サイコロの目は 1，3，4，5，

6, 8 と 1, 2, 2, 3, 3, 4 になっている。マーチン・ガードナーが1978年，サイエンティフィック・アメリカン誌の数学ゲームで，ジッヘルマン・ダイスを取り上げている[1]。

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

+	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

図７．サイコロの目の和の度数分布が同じになる

普通のサイコロと同じ度数分布をもつサイコロはジッヘルマン・ダイスしかないことを，ジョセフ・ガリアンらによって，母関数（生成関数ともいう）の因数分解を用いて証明されている[2][3]。つまり，多項式の因数分解がつぎに示すように２通りあることだ。式の２行目が普通のサイコロ２個，３行目がジッヘルマン・ダイス２個に対応している。詳しくは，文献[６]を参照のこと。

$$
\begin{aligned}
&x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}\\
&=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\\
&=(x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8)(x+2x^2+2x^3+x^4)
\end{aligned}
$$

ジッヘルマン・ダイスには後日談がある。私の記事[6]は英語にも翻訳しておいたので[7]，世界中の多くの読者の目に触れることになった。中でも，ジッヘルマン・ダイスの考案者である，コロネル・ジョージ・ジッヘルマン氏ご本人からメールを頂いて驚いた(2012年１月)。本人かどうか疑ったが，ホームページも開設されていることを知り，間違いないことがわかった。彼は，ジッヘルマン・ダイスを広めてくれたことに対する謝辞とともに，つぎのようなコメントがあった。私の記事の末尾に「現在このサイコロはクレイジー・ダイスまたは発見者の名前をとってジッヒャーマン・ダイスと呼ばれている。この名前のサイコロが商品として売り出されているが，実際のカジノでは使われていないらしい」と書いているが，ジッヒャーマン氏ご本人はサイコロを売り出していない。本人に断わりもなくジッヘルマン・ダイスという商品名でゲーム・ステーション社など数社が勝手に売り出していて迷惑であるというのだ（図８）。そこで私は，日本語版，英語版ともにその箇所を訂正し，その旨を彼に伝えた。

ジッヘルマン・ダイスは息の長い人気があり，今でも話題になることがある。2014年，ニューヨーク・タイムズ紙のコラムに，ジッヘルマン・ダイスに関する記事が紹介されている[９]。そこでは，私の英文記事も紹介されている[7]。

図8．市販されているジッヘルマン・ダイス（ゲーム・ステーション社製）

3．因数分解による7通りの解

宮永が百ます計算・足し算に用いた因数分解による解法を説明しよう。

A と B を足して C になり，その C が $\{0, 1, 2, 3, \cdots, 99\}$ になる。もとの A と B を求めよという問題であるから，A, B, C を $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ として，式で表すとつぎのようになる。

$$a(x) \times b(x) = c(x)$$

$$c(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99}$$

$c(x)$ は母関数または生成関数とよばれている。この多項式はこのままでは因数分解しにくいので，両辺に $(1-x)$ を掛ける。

$$c(x) \times (1-x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99}) \times (1-x) = 1 - x^{100}$$

そして，$1-x^{100}$ の因数分解を試みる。

$$\begin{aligned}1 - x^{100} = &(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)\\ &\times(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})\\ &\times(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})\end{aligned}$$

最初に $(1-x)$ を掛けておいたので，$(1-x)$ で割れば $c(x)$ が求まる。

$$\begin{aligned}c(x) = &(1+x)(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)\\ &\times(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})\end{aligned}$$

$c(x)$ は8項に因数分解されたことになる。この8項を $a(x)$ と $b(x)$ の2つのグループに分けて，それぞれを展開すると，ジッヘルマン・ダイスと同じように，百ます計算・足し算の A と B の数列が求まるというのだ。

宮永は，7通りの解を見つけていた。西山は，独自に因数分解による解をもとめ，宮永の求めた解と突き合わせてみると完全に一致していることがわかった。8項を2つのグループに分け，それぞれが10項ずつの和になっていることを確かめ，見落としがないようにするには，多大な計算量が必要である。見落としをなくすため，解の候補の絞り込みについては，多項式に $x=1$ を代入するという，ジッヘルマン・ダイスで用いたのと類似の方法を用いてみよう[6]。

いま，$c(x)$ が $p(x)$ から $w(x)$ の8つの関数に因数分解されたとする。そして，これ

らの関数に $x=1$ を代入した値を計算してみる。

$$c(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{99}=p(x)q(x)r(x)s(x)t(x)u(x)v(x)w(x)$$

$$\begin{aligned}
&p(x)=1+x, && p(1)=2\\
&q(x)=1+x^2, && q(1)=2\\
&r(x)=1+x+x^2+x^3+x^4, && r(1)=5\\
&s(x)=1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}, && s(1)=5\\
&t(x)=1-x+x^2-x^3+x^4, && t(1)=1\\
&u(x)=1-x^2+x^4-x^6+x^8, && u(1)=1\\
&v(x)=1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20}, && v(1)=1\\
&w(x)=1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40}, && w(1)=1
\end{aligned}$$

多項式の組 $\{a(x),\ b(x)\}$ が

・条件１：$a(x)$ の項が10個で，それらの項の係数が１

・条件２：$b(x)$ の項が10個で，それらの項の係数が１

・条件３：$a(x)\times b(x)=c(x)$

を満たすとする。

条件１，２より

$$c(1)=100,\quad a(1)=10,\quad b(1)=10$$

となっている必要がある。また，

$$p(1)=q(1)=2,\quad r(1)=s(1)=5$$

$$p(1)\times r(1)=p(1)\times s(1)=2\times 5=10$$

であるので，条件３より $\{a(x),\ b(x)\}$ に振り分けられる $\{p(x),\ q(x),\ r(x),\ s(x)\}$ の組み合わせは，

$$\{p(x)\times r(x),\ q(x)\times s(x)\}\ \text{または}\ \{p(x)\times s(x),\ q(x)\times r(x)\}$$

の２通りとなる。

一方，

$$t(1)=u(1)=v(1)=w(1)=1$$

であるので，$\{t(x),\ u(x),\ v(x),\ w(x)\}$ は，$a(x)$ または $b(x)$ のどちらにも振り分けられる可能性がある。

以上より，$\{p(x),\ q(x),\ r(x),\ s(x),\ t(x),\ u(x),\ v(x),\ w(x)\}$ の $\{a(x),\ b(x)\}$ への振り分け方は，

$$2\times 2^4=32\ \text{通り}$$

あることになる。振り分けられた後，それぞれの多項式を展開し，それらが条件１～条件３を満たしているか精査する必要がある。紙と鉛筆で計算してもよいが，作業量が多く，計算ミスや見落としを考えると数式処理ソフト[4]を使うという方法もある。

このようにして求めた，７通りの解を次に示しておく。

4）たとえば Wolfram Alpha, http://www.wolframalpha.com/（2015年９月閲覧）などがある。

解１：

$$a(x)=(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})$$
$$\times(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})$$
$$=(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40})(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})$$
$$=(1+x^{10})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$
$$=1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+x^{50}+x^{60}+x^{70}+x^{80}+x^{90}$$
$$b(x)=(1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)$$
$$=(1+x)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9$$

以下，同様にして，

解２：

$$a(x)=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})$$
$$=1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+x^{30}+x^{35}+x^{40}+x^{45}$$
$$b(x)=(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^{50}+x^{51}+x^{52}+x^{53}+x^{54}$$

解３：

$$a(x)=(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})$$
$$=1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{50}+x^{55}+x^{60}+x^{65}+x^{70}$$
$$b(x)=(1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^{25}+x^{26}+x^{27}+x^{28}+x^{29}$$

解４：

$$a(x)=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})$$
$$\times(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})$$
$$=1+x^5+x^{20}+x^{25}+x^{40}+x^{45}+x^{60}+x^{65}+x^{80}+x^{85}$$
$$b(x)=(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}$$

解５：

$$a(x)=(1+x)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})$$
$$=1+x+x^{20}+x^{21}+x^{40}+x^{41}+x^{60}+x^{61}+x^{80}+x^{81}$$
$$b(x)=(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)$$
$$=1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}+x^{16}+x^{18}$$

解６：

$$a(x)=(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})(1+x+x^2+x^3+x^4)$$
$$\times(1-x+x^2-x^3+x^4)$$
$$=1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{50}+x^{52}+x^{54}+x^{56}+x^{58}$$
$$b(x)=(1+x)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})$$
$$=1+x+x^{10}+x^{11}+x^{20}+x^{21}+x^{30}+x^{31}+x^{40}+x^{41}$$

解７：

$$a(x)=(1+x^2)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})$$
$$=1+x^2+x^{20}+x^{22}+x^{40}+x^{42}+x^{60}+x^{62}+x^{80}+x^{82}$$
$$b(x)=(1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)$$
$$=1+x+x^4+x^5+x^8+x^9+x^{12}+x^{13}+x^{16}+x^{17}$$

以上，８項を $a(x)$ と $b(x)$ にわけて，それぞれを展開して10項の和になっていることを確認したが，この展開された多項式が，$a(x)\times b(x)=c(x)$ を満たしていることを，等比数列の角度から吟味しておこう。

解１：

$a(x)$ は，初項が１，公比が x^{10}，項数が10の等比数列の和であり，$b(x)$ は，初項が１，公比が x，項数が10の等比数列であるから，

$$a(x)=1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+x^{50}+x^{60}+x^{70}+x^{80}+x^{90}$$
$$=\frac{1\times(1-(x^{10})^{10})}{1-x^{10}}=\frac{1-x^{100}}{1-x^{10}}$$
$$b(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9$$
$$=\frac{1\times(1-x^{10})}{1-x}=\frac{1-x^{10}}{1-x}$$

となる。これらより

$$a(x)\times b(x)=\frac{1-x^{100}}{1-x^{10}}\times\frac{1-x^{10}}{1-x}=\frac{1-x^{100}}{1-x}=c(x)$$

同様にして，

解２：

$$a(x)=1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+x^{30}+x^{35}+x^{40}+x^{45}$$
$$=\frac{1\times(1-(x^5)^{10})}{1-x^5}=\frac{1-x^{50}}{1-x^5}$$
$$b(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^{50}+x^{51}+x^{52}+x^{53}+x^{54}$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^{50})$$
$$=\frac{1\times(1-x^5)}{1-x}\times(1+x^{50})=\frac{1-x^5}{1-x}\times\frac{1-x^{100}}{1-x^{50}}$$
$$a(x)\times b(x)=\frac{1-x^{50}}{1-x^5}\times\frac{1-x^5}{1-x}\times\frac{1-x^{100}}{1-x^{50}}=\frac{1-x^{100}}{1-x}=c(x)$$

解３：

$$a(x)=1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{50}+x^{55}+x^{60}+x^{65}+x^{70}$$
$$=(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^{50})$$
$$=\frac{1\times(1-(x^5)^5)}{1-x^5}\times(1+x^{50})=\frac{1-x^{25}}{1-x^5}\times\frac{1-x^{100}}{1-x^{50}}$$
$$b(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^{25}+x^{26}+x^{27}+x^{28}+x^{29}$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^{25})$$

$$=\frac{1\times(1-x^{5})}{1-x}\times(1+x^{25})=\frac{1-x^{5}}{1-x}\times\frac{1-x^{50}}{1-x^{25}}$$

$$a(x)\times b(x)=\frac{1-x^{25}}{1-x^{5}}\times\frac{1-x^{100}}{1-x^{50}}\times\frac{1-x^{5}}{1-x}\times\frac{1-x^{50}}{1-x^{25}}=\frac{1-x^{100}}{1-x}=c(x)$$

解４：

$$a(x)=1+x^{5}+x^{20}+x^{25}+x^{40}+x^{45}+x^{60}+x^{65}+x^{80}+x^{85}$$
$$=(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})(1+x^{5})$$
$$=\frac{1\times(1-(x^{20})^{5})}{1-x^{20}}\times(1+x^{5})=\frac{1-x^{100}}{1-x^{20}}\times\frac{1-x^{10}}{1-x^{5}}$$
$$b(x)=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}$$
$$=(1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4})(1+x^{10})$$
$$=\frac{1\times(1-x^{5})}{1-x}\times(1+x^{10})=\frac{1-x^{5}}{1-x}\times\frac{1-x^{20}}{1-x^{10}}$$
$$a(x)\times b(x)=\frac{1-x^{100}}{1-x^{20}}\times\frac{1-x^{10}}{1-x^{5}}\times\frac{1-x^{5}}{1-x}\times\frac{1-x^{20}}{1-x^{10}}=\frac{1-x^{100}}{1-x}=c(x)$$

解５：

$$a(x)=1+x+x^{20}+x^{21}+x^{40}+x^{41}+x^{60}+x^{61}+x^{80}+x^{81}$$
$$=(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})(1+x)$$
$$=\frac{1\times(1-(x^{20})^{5})}{1-x^{20}}\times(1+x)=\frac{1-x^{100}}{1-x^{20}}\times(1+x)$$
$$b(x)=1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+x^{8}+x^{10}+x^{12}+x^{14}+x^{16}+x^{18}$$
$$=\frac{1\times(1-(x^{2})^{10})}{1-x^{2}}=\frac{1-x^{20}}{1-x^{2}}$$
$$a(x)\times b(x)=\frac{1-x^{100}}{1-x^{20}}\times(1+x)\times\frac{1-x^{20}}{1-x^{2}}=\frac{1-x^{100}}{1-x}=c(x)$$

解６：

$$a(x)=1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+x^{8}+x^{50}+x^{52}+x^{54}+x^{56}+x^{58}$$
$$=(1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+x^{8})(1+x^{50})$$
$$=\frac{1\times(1-(x^{2})^{5})}{1-x^{2}}\times(1+x^{50})=\frac{1-x^{10}}{1-x^{2}}\times\frac{1-x^{100}}{1-x^{50}}$$
$$b(x)=1+x+x^{10}+x^{11}+x^{20}+x^{21}+x^{30}+x^{31}+x^{40}+x^{41}$$
$$=(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40})(1+x)$$
$$=\frac{1\times(1-(x^{10})^{5})}{1-x^{10}}\times(1+x)=\frac{1-x^{50}}{1-x^{10}}\times(1+x)$$
$$a(x)\times b(x)=\frac{1-x^{10}}{1-x^{2}}\times\frac{1-x^{100}}{1-x^{50}}\times\frac{1-x^{50}}{1-x^{10}}\times(1+x)=\frac{1-x^{100}}{1-x}=c(x)$$

解７：

$$a(x)=1+x^{2}+x^{20}+x^{22}+x^{40}+x^{42}+x^{60}+x^{62}+x^{80}+x^{82}$$
$$=(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})(1+x^{2})$$

$$=\frac{1\times(1-(x^{20})^5)}{1-x^{20}}\times(1+x^2)=\frac{1-x^{100}}{1-x^{20}}\times(1+x^2)$$

$$b(x)=1+x+x^4+x^5+x^8+x^9+x^{12}+x^{13}+x^{16}+x^{17}$$

$$=(1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16})(1+x)$$

$$=\frac{1\times(1-(x^4)^5)}{1-x^4}\times(1+x)=\frac{1-x^{20}}{1-x^4}\times(1+x)$$

$$a(x)\times b(x)=\frac{1-x^{100}}{1-x^{20}}\times(1+x^2)\times\frac{1-x^{20}}{1-x^4}\times(1+x)=\frac{1-x^{100}}{1-x}=c(x)$$

最近の他の著書として，百ます計算・足し算と同様な例題（$n=4$ の場合）が見られる。母関数を使った証明で，因数分解に３通りあることが示されている[8]。この本には「東工大情報科学科の2006年度学部３年生向きのセミナーで吉川紘史君に示唆された」とあるので，おそらく，ジッヘルマン・ダイスの因数分解による解法にヒントを得たのではないだろうか。

$$\begin{aligned}1+x+x^2+\cdots+x^{15}&=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\\&=(1+x+x^2+x^3)(1+x^4+x^8+x^{12})\\&=(1+x+x^4+x^5)(1+x^2+x^8+x^{10})\\&=(1+x+x^8+x^9)(1+x^2+x^4+x^6)\end{aligned}$$

４．円分多項式

$1-x^{100}$ の因数分解について少し詳しく説明しておこう。高校数学のレベルでは，よく知られた公式，

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

により，

$$1-x^{100}=(1+x^{50})(1-x^{50})=(1+x^{50})(1+x^{25})(1-x^{25})$$

のように，３つの多項式の積にまで因数分解される。この３項は次のように因数分解される。

$$(1+x^{50})=(1+x^{10})(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})$$

$$(1+x^{25})=(1+x^5)(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})$$

$$(1-x^{25})=(1-x^5)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})$$

さらに，

$$(1+x^{10})=(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)$$

$$(1+x^5)=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)$$

$$(1-x^5)=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

であるので，これらを代入すると９項に分解されることになる。

$$\begin{aligned}1-x^{100}=&(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)\\&\times(1-x^2+x^4-x^6+x^8)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})\\&\times(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40})\end{aligned}$$

$(1-x)$ は因数分解をしやすくするために $c(x)$ に掛けた項なので，これで割ると $c(x)$ は8項になる。

さて，このような方法で高次の多項式も因数分解できないわけではないが，$1-x^n$ という特殊な形をした多項式は，円分多項式において議論されているので，そのこととの関連を説明しておこう。$1-x^{100}$ の因数分解は，$x^{100}-1=0$ に関係している。$x^{17}-1=0$ は，ガウスの正17角形作図法と関係し，西山はこれを記事にしたことがある[5]。$x^n-1=0$ は円分方程式とよばれている。単位円の円周上に，$x=1$ を含めて n 個の複素数解が存在する。

円分多項式の公式を知っていれば，高次の因数分解も比較的楽である。円分多項式は1の冪根（べきこん）に関連のある多項式で，次の式で定義される多項式 $\Phi_n(x)$ をさす。

$$\Phi_n(x)=\frac{x^n-1}{\prod_{d|n,\ d\neq n}\Phi_d(x)}$$

これは整数を係数にもつ多項式で，有理数体上の既約多項式である。多項式 x^n-1 はつぎのように円分多項式の積として既約分解される。ここに d は n の約数である。

$$x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x)$$

実際に円分多項式を計算してみると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\Phi_1= && =x-1\\
&\Phi_2=(x^2-1)/\Phi_1 && =x+1\\
&\Phi_3=(x^3-1)/\Phi_1 && =x^2+x+1\\
&\Phi_4=(x^4-1)/\Phi_1\Phi_2 && =x^2+1\\
&\Phi_5=(x^5-1)/\Phi_1 && =x^4+x^3+x^2+x+1\\
&\Phi_6=(x^6-1)/\Phi_1\Phi_2\Phi_3 && =x^2-x+1\\
&\Phi_7=(x^7-1)/\Phi_1 && =x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
&\Phi_8=(x^8-1)/\Phi_1\Phi_2\Phi_4 && =x^4+1\\
&\Phi_9=(x^9-1)/\Phi_1\Phi_3 && =x^6+x^3+1\\
&\Phi_{10}=(x^{10}-1)/\Phi_1\Phi_2\Phi_5 && =x^4-x^3+x^2-x+1
\end{aligned}$$

さて，ここでは $x^{100}-1$ の因数分解が必要なので，前述の2番目の公式を使うと，

$$x^{100}-1=\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{20}\Phi_{25}\Phi_{50}\Phi_{100}$$

となる。$n=100$ であり，100の約数 d は 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 の9個あり，それぞれの既約多項式 Φ_d の積となる。ここで，

$$\begin{aligned}
&\Phi_{20}=(x^{20}-1)/\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_5\Phi_{10} && =x^8-x^6+x^4-x^2+1\\
&\Phi_{25}=(x^{25}-1)/\Phi_1\Phi_5 && =x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1\\
&\Phi_{50}=(x^{50}-1)/\Phi_1\Phi_2\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{25} && =x^{20}-x^{15}+x^{10}-x^5+1\\
&\Phi_{100}=(x^{100}-1)/\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{20}\Phi_{25}\Phi_{50} && =x^{40}-x^{30}+x^{20}-x^{10}+1
\end{aligned}$$

などを代入すると，

$$\begin{aligned}
x^{100}-1=&(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\\
&\times(x^8-x^6+x^4-x^2+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)(x^{20}-x^{15}+x^{10}-x^5+1)
\end{aligned}$$

$\times(x^{40}-x^{30}+x^{20}-x^{10}+1)$

となり，前述の $c(x)\times(1-x)$ とは表示の順序は違っているが，同様の因数分解ができたことになる。

5．図形的な解

ここでは，百ます計算・足し算のもうひとつの解法，図形的な解について説明しよう。$c(x)=a(x)\times b(x)$ は 10×10＝100 個のます目があるが，0を左上端，99を右下端に固定しておくことにする。そして，左上端0から右下端99までの経路で，進む方向についての規則をもうけておく。この規則は後述するブロック間にも適用されるとする。

・規則１：左から右に進む

・規則２：上から下に進む

10×10＝100 個のマス目を均等なブロックに分割する方法を考えてみよう。

10の約数は 1，2，5，10 の４つがある。10を約数から除くと３つの分割方法があり，これがたてと横に適用されるので，3×3＝9 通りの分割方法がある。ただし，上の２つの規則を適用すると，重複するパターン（たとえば図９など）が除かれ，７個の分割方法ということになる。

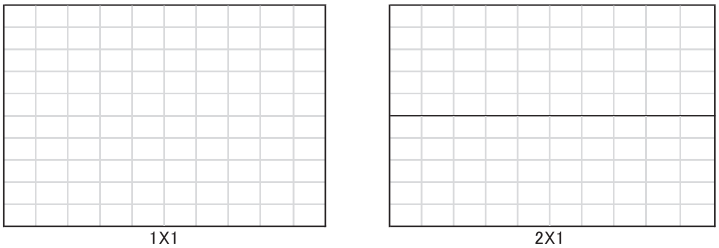


図９．同じ解となる例

図10は分割例であるが，上段はたて横ともに分割のないもの，中段は横に２分割したもの，下段は横に５分割したものである。中段と下段にはたてに分割なし，２分割，５分割の３パターンがある。上段，中段，下段を合計すると 1+3+3=7 で７パターンとなる。

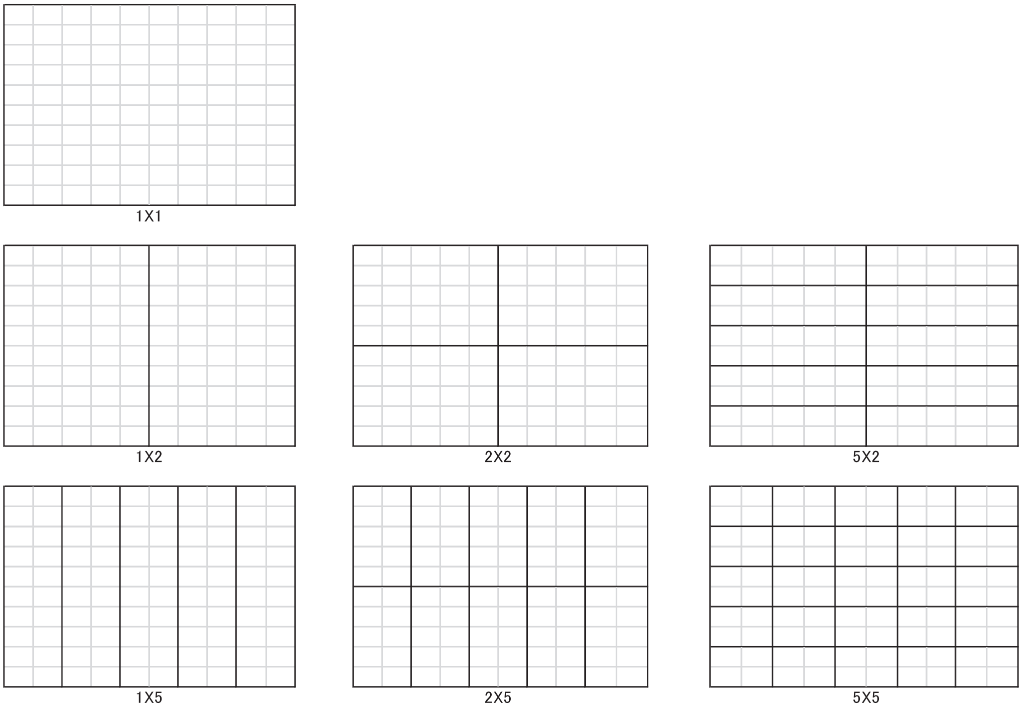
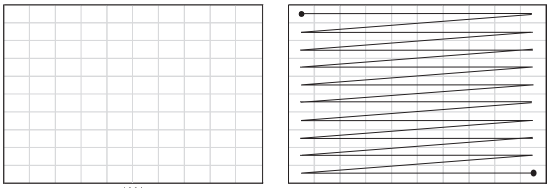


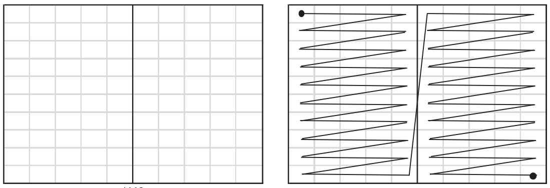
図10.　７通りの分割

この７パターンに，規則にしたがって経路を描き，０から99までの数字を埋めたものが図11である。中央の経路図は規則的な図形となっている。経路はブロック内だけでなく，ブロック間も左から右へ，上から下への規則で進んでいる。右側は０から99までの数字を入れた図であるが，各々の図で左の列は $a(x)$ に，上の行は $b(x)$ になっていて，これが百ます計算・足し算の解となる。



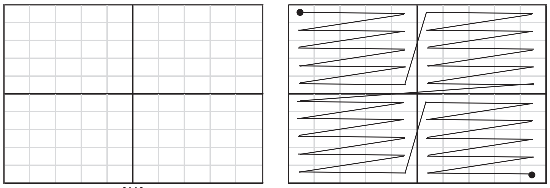
1X1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99



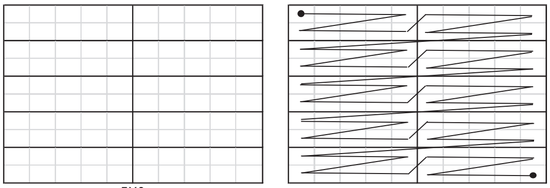
1X2

0	1	2	3	4	50	51	52	53	54
5	6	7	8	9	55	56	57	58	59
10	11	12	13	14	60	61	62	63	64
15	16	17	18	19	65	66	67	68	69
20	21	22	23	24	70	71	72	73	74
25	26	27	28	29	75	76	77	78	79
30	31	32	33	34	80	81	82	83	84
35	36	37	38	39	85	86	87	88	89
40	41	42	43	44	90	91	92	93	94
45	46	47	48	49	95	96	97	98	99



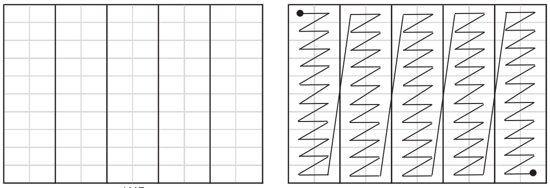
2X2

0	1	2	3	4	25	26	27	28	29
5	6	7	8	9	30	31	32	33	34
10	11	12	13	14	35	36	37	38	39
15	16	17	18	19	40	41	42	43	44
20	21	22	23	24	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	75	76	77	78	79
55	56	57	58	59	80	81	82	83	84
60	61	62	63	64	85	86	87	88	89
65	66	67	68	69	90	91	92	93	94
70	71	72	73	74	95	96	97	98	99



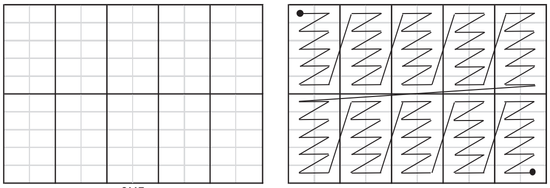
5X2

0	1	2	3	4	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	30	31	32	33	34
25	26	27	28	29	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	50	51	52	53	54
45	46	47	48	49	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	70	71	72	73	74
65	66	67	68	69	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	90	91	92	93	94
85	86	87	88	89	95	96	97	98	99



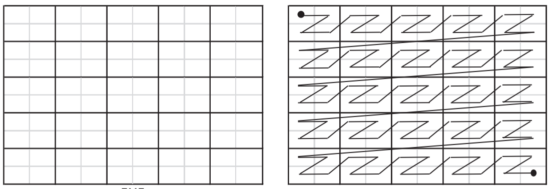
1X5

0	1	20	21	40	41	60	61	80	81
2	3	22	23	42	43	62	63	82	83
4	5	24	25	44	45	64	65	84	85
6	7	26	27	46	47	66	67	86	87
8	9	28	29	48	49	68	69	88	89
10	11	30	31	50	51	70	71	90	91
12	13	32	33	52	53	72	73	92	93
14	15	34	35	54	55	74	75	94	95
16	17	36	37	56	57	76	77	96	97
18	19	38	39	58	59	78	79	98	99



2X5

0	1	10	11	20	21	30	31	40	41
2	3	12	13	22	23	32	33	42	43
4	5	14	15	24	25	34	35	44	45
6	7	16	17	26	27	36	37	46	47
8	9	18	19	28	29	38	39	48	49
50	51	60	61	70	71	80	81	90	91
52	53	62	63	72	73	82	83	92	93
54	55	64	65	74	75	84	85	94	95
56	57	66	67	76	77	86	87	96	97
58	59	68	69	78	79	88	89	98	99



5X5

0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
2	3	6	7	10	11	14	15	18	19
20	21	24	25	28	29	32	33	36	37
22	23	26	27	30	31	34	35	38	39
40	41	44	45	48	49	52	53	56	57
42	43	46	47	50	51	54	55	58	59
60	61	64	65	68	69	72	73	76	77
62	63	66	67	70	71	74	75	78	79
80	81	84	85	88	89	92	93	96	97
82	83	86	87	90	91	94	95	98	99

図11．図形による７通りの解

左の列の数列を A，上の行の数列を B とすると，7通りの解は次のようになる。図形で求めた解は，先に因数分解で求めた7通りの解 $a(x)$，$b(x)$ に対応付けることができる。

解1：

$$A=\{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\},\ B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$a(x)=1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+x^{50}+x^{60}+x^{70}+x^{80}+x^{90}$$
$$b(x)=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5}+x^{6}+x^{7}+x^{8}+x^{9}$$

解2：

$$A=\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\},\ B=\{0, 1, 2, 3, 4, 50, 51, 52, 53, 54\}$$
$$a(x)=1+x^{5}+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+x^{30}+x^{35}+x^{40}+x^{45}$$
$$b(x)=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{50}+x^{51}+x^{52}+x^{53}+x^{54}$$

解3：

$$A=\{0, 5, 10, 15, 20, 50, 55, 60, 65, 70\},\ B=\{0, 1, 2, 3, 4, 25, 26, 27, 28, 29\}$$
$$a(x)=1+x^{5}+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{50}+x^{55}+x^{60}+x^{65}+x^{70}$$
$$b(x)=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{25}+x^{26}+x^{27}+x^{28}+x^{29}$$

解4：

$$A=\{0, 5, 20, 25, 40, 45, 60, 65, 80, 85\},\ B=\{0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14\}$$
$$a(x)=1+x^{5}+x^{20}+x^{25}+x^{40}+x^{45}+x^{60}+x^{65}+x^{80}+x^{85}$$
$$b(x)=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}$$

解5：

$$A=\{0, 1, 20, 21, 40, 41, 60, 61, 80, 81\},\ B=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$
$$a(x)=1+x+x^{20}+x^{21}+x^{40}+x^{41}+x^{60}+x^{61}+x^{80}+x^{81}$$
$$b(x)=1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+x^{8}+x^{10}+x^{12}+x^{14}+x^{16}+x^{18}$$

解6：

$$A=\{0, 2, 4, 6, 8, 50, 52, 54, 56, 58\},\ B=\{0, 1, 10, 11, 20, 21, 30, 31, 40, 41\}$$
$$a(x)=1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+x^{8}+x^{50}+x^{52}+x^{54}+x^{56}+x^{58}$$
$$b(x)=1+x+x^{10}+x^{11}+x^{20}+x^{21}+x^{30}+x^{31}+x^{40}+x^{41}$$

解7：

$$A=\{0, 2, 20, 22, 40, 42, 60, 62, 80, 82\},\ B=\{0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17\}$$
$$a(x)=1+x^{2}+x^{20}+x^{22}+x^{40}+x^{42}+x^{60}+x^{62}+x^{80}+x^{82}$$
$$b(x)=1+x+x^{4}+x^{5}+x^{8}+x^{9}+x^{12}+x^{13}+x^{16}+x^{17}$$

6．一般化 $N=(p-2)(p-1)+1$

$10\times10=100$ ます計算の場合は，7通りの解があることがわかった。それでは，$n\times n=n^2$ ます計算の場合，何通りの解があるのだろうか。n についての一般化ができないだろうか。ここでは，それを考えてみよう。

まず，$2\times2=4$ ます計算から $9\times9=81$ ます計算について，図形による解を列挙してみる。解の数は，$n\times n=n^2$ のます目を均等なブロックに分割することがキーであったので，

それを図12に示す。

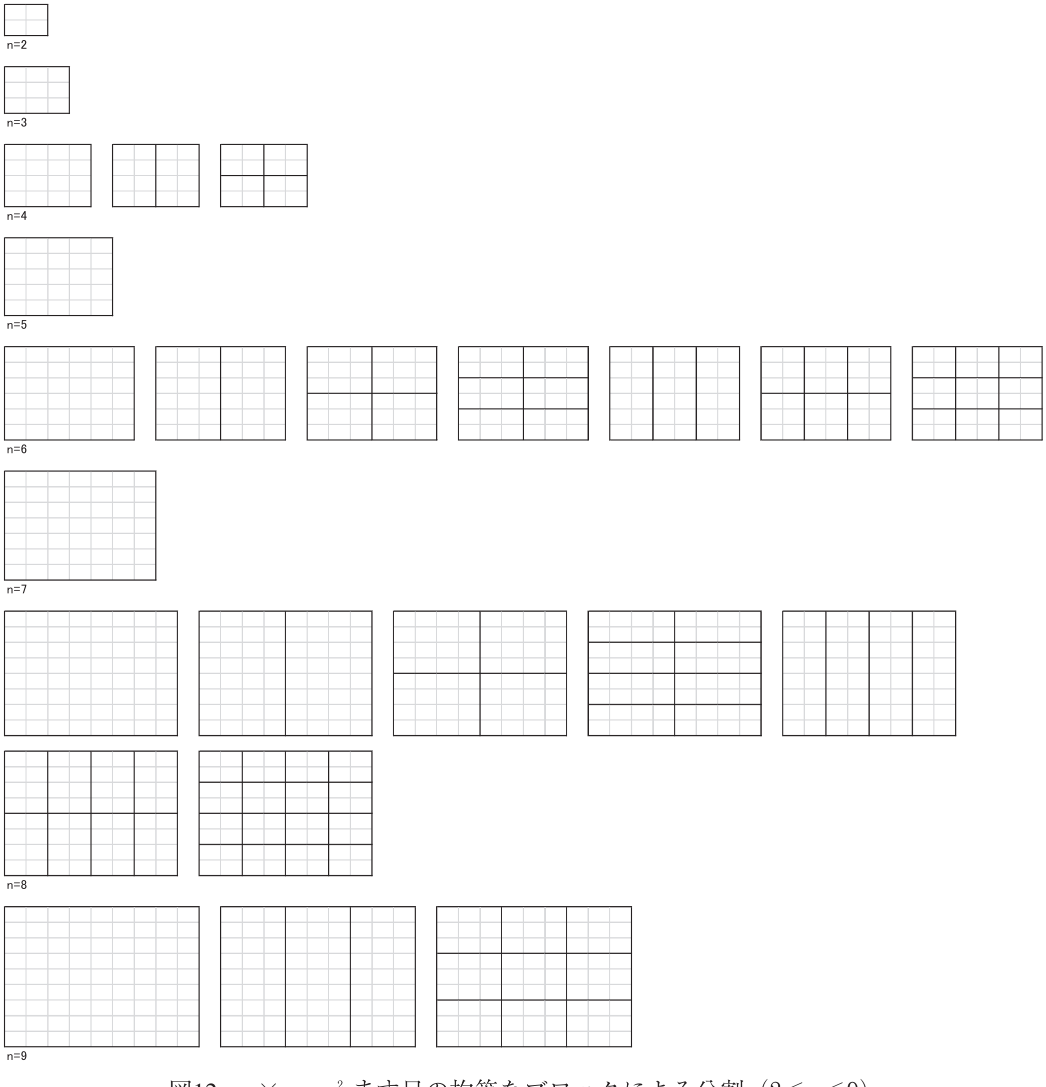


図12. $n\times n=n^2$ ます目の均等なブロックによる分割（$2\leq n\leq 9$）

まず，n が素数の場合は，ブロックに分割できないので，解は１通りである（$n=2$, 3, 5, 7）。つぎに，$n=4$, 9 の場合は，３通りのブロック化が可能なので，解は３通りとなり，$n=6$, 8 の場合は，７通りのブロック化が可能なので，解は７通りとなる。実際に因数分解による解法でも確かめたところ，正しいことがわかった。

均等なブロックに分割する方法は，n の約数が関係している。分割のパターンは約数の個数に関係している。そこで n の約数を書き上げ，約数の個数を p として表にすると次のようになる。

n	$n\times n=n^2$	n の約数	約数の個数（p）	解の数（N）
2	4	1，2	2	1
3	9	1，3	2	1
4	16	1，2，4	3	3
5	25	1，5	2	1
6	36	1，2，3，6	4	7
7	49	1，7	2	1
8	64	1，2，4，8	4	7
9	81	1，3，9	3	3
10	100	1，2，5，10	4	7

表１．約数の個数（p）と解の数（N）との関係

$n\times n=n^2$ ます計算の場合，N 通りの解があるとすると，N と n には次の関係がある。

$N=1,\quad (n=2, 3, 5, 7)$

$N=3,\quad (n=4, 9)$

$N=7,\quad (n=6, 8, 10)$

上の式 N をつぎのように変形することができる。

$N=1,\quad N=3=1+2,\quad N=7=1+3+3$

そして，$n=12$ の場合の $12\times12=144$ を考えてみると，12の約数は，1，2，3，4，6，12 の６個あるので，この場合の解は

$N=21=1+5+5+5+5,\quad (n=12)$

になるのではと期待が持てる。詳細は割愛するが，この図形的な解と因数分解による解が，一致して，21通りであっていることがわかった。

そこで，つぎの定義と予想が成立することになる。

定義：

A と B は n 個の数列であり，$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$，$A_i=a_i$，$B_j=b_j$ とする。

A と B の足し算によって $C=\{C_{i,j}\}$ が計算される。

$C_{i,j}=A_i+B_j,\quad (1\leq i, j\leq n)$

C の $n\times n=n^2$ 個の要素が，ランダムに並んでいても，０から n^2-1 までの数が重複することなく，１度だけ現れるとき，それを n^2 ます問題・足し算の解とする。

予想：

n の約数の個数を p とするとき，$n\times n=n^2$ ます計算・足し算の解の数 N は，

$$N=(p-2)(p-1)+1$$

となる。

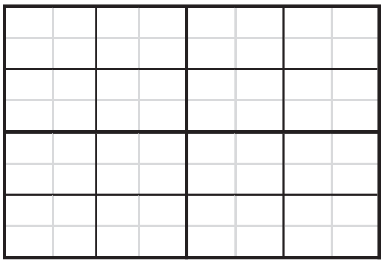
例）$n=12$ の場合は，約数は 1，2，3，4，6，12 の 6 個であるので，

$p=6$，$N=4\times5+1=21$

$n=16$ の場合は，約数は 1，2，4，8，16 の 5 個であるので，

$p=5$，$N=3\times4+1=13$

以上は西山の予想であるが，この公式を検証する段階で，宮永が反例を見つけた。たとえば，$n=8$ の場合について，同じ分割パターンでも図13のような数字の配置も可能である。すなわちブロックの中にブロックが存在する入れ子の構造である。これ以外にも解がありそうで，それらは次回の論考で詳しく考察することにしたい。



+	0	1	4	5	16	17	20	21
0	0	1	4	5	16	17	20	21
2	2	3	6	7	18	19	22	23
8	8	9	12	13	24	25	28	29
10	10	11	14	15	26	27	30	31
32	32	33	36	37	48	49	52	53
34	34	35	38	39	50	51	54	55
40	40	41	44	45	56	57	60	61
42	42	43	46	47	58	59	62	63

図13．入れ子構造による別解（$n=8$）

参考文献

［1］Martin Gardner, Mathematical games, *Scientific American*, 238 (1978), 19-32.

［2］Joseph A. GALLIAN and David J. RUSIN, Cyclotomic Polynomials and Nonstandard Dice, *Discrete Mathematics*, 27 (1979), 245-259.

［3］Duane M. Broline, Renumbering of the Faces of Dice, *Mathematics Magazine*, 52 (1979), 312-315.

［4］Brian Bolt, The Amazing Mathematical Amusement Arcade, Cambridge Univ. Press, 1984. 24ページに Knight's tours の項あり。

［5］西山豊「ガウスの正17角形作図法」『Basic 数学』1998年4月，23-27ページ

［6］西山豊「サイコロの目の和が同じ」『理系への数学』2005年12月，4-7ページ

［7］Yutaka Nishiyama, Sicherman Dice: Equivalent Sums with a Pair of Dice, *Osaka Keidai Ronshu*, Vol. 60, No. 2, 185-192, July 2009.

［8］小島定吉『離散構造』朝倉書店，2013年，7-9ページ

［9］Gary Antonick, Col. George Sicherman's Dice, *The New York Times*, June 16, 2014. http://wordplay.blogs.nytimes.com/2014/06/16/dice-3/?_r=0（2015年9月閲覧）