

並列多工程生産の効果に関する数理的分析*

藤 本 芳 張 (義治)

要旨

わが国での工業集積については京浜工業地域が注目され、最近では大工業システムの中での情報的要因の研究が中心となっている。工業集積といっても生産問題にかかわることであり、具体的な生産の面を考慮し注文と工程生産の関係から把握し、並列多工程生産の効果、有利性を分析することに本研究の目的がある。生産という根源的な問題におおし、数理的な待ち行列モデルを援用することに特徴がある。

まず第2章では、対象とした並列多工程生産システムについて説明している。待ち行列理論により、加工待ちと加工中を合わせた注文数、すなわち生産システムに存在する注文数とか工程が稼働していない遊休工程数を確率的に求め、それらの確率分布を検討している。次いで第3章では、並列多工程生産システムの有利性を分析している。1工程あたりの加工待ち注文数、工程稼働率がどのように工程数増加、集中により良化しているか、さらに工程能力の集中といった規模集中の効果を分析している。第4章では、このような効果が生じる背景を情報的な見地から考察し、具体的な生産形態として注文生産タイプについて論じている。第5章は、本研究のまとめである。

キーワード：並列多工程生産、待ち行列モデル、工程稼働率、工程能力の集中

1. は じ め に

わが国では、ベンチャー生産、ベンチャー企業などということばが使われだしたのは1970年代といわれ [1]、これまで日本経済の新しい担い手として注目されてきた。その経営が行われる場所によって、経営の採算性とか成長性などが影響を受けるのではないか。筆者の研究は、従来から企業活動の立地、特に生産立地にかかわってきたが、ベンチャー生産の立地はどうなのか興味をもった。ベンチャー、起業に関する著書の中で立地についての記述があるのは、むしろ数少ない [1], [2]。

ベンチャーに限らず、情報集約的、知識集約的企業の新規立地に影響を与えるものとしてクラスター、集積の存在があげられ [3]~[5]、特に情報的なものを中心となり検討されている。生産ということになれば、わが国では京浜工業地域が群を抜いており、大工業システムの中での情報的要因が重要視されている。筆者も最近、これに焦点をあてて論じたが [6]、高いレベルのものとは言い難い。

* この論文は、2009年4月から2010年3月にわたる国内留学期間（留学先：関西学院大学商学研究科）における研究成果の一部をまとめたものである。指導に当たられた福井幸男教授に感謝の意を表したい。

工業集積といっても生産問題にかかわることであり、結局は多くの生産が集中することにより有利性、メリットが生じていると考えられる。企業という大きな経営の枠組みでつかむよりも、具体的な生産の面を考慮し注文と工程生産の関係から把握することにより、集中による効果を数量的に、明確に分析できる可能性がある。このような視点でもって、集中というものを根源的な生産の集中という問題におろし、並列多工程生産の効果、有利性を分析することに本研究の目的がある。数理的な展開において待ち行列モデルを援用しているが、本研究のような生産の問題に属する生産管理の1つの著書で待ち行列システムに関する部分〔7〕をみても分かるように、生産の集中について言及されていない。

第2章では、注文の受注と対象とした並列多工程生産システムについて説明し、待ち行列理論により、加工待ちと加工中を合わせた注文数、すなわち生産システムにある注文数を確率的に記述し、工程が稼働していない遊休工程数を確率的に求め、それらの確率分布を検討している。第3章では、並列多工程生産システムの有利性、メリットを分析している。1工程あたりの加工待ち注文数、工程稼働率がどのように工程数の増加により良化しているか、さらに工程能力の集中といった規模集中の効果を分析している。第4章では、このような効果が生じる背景を情報的な見地から考察し、具体的な生産形態として注文生産タイプについて論じている。第5章は、本研究のまとめである。

2. 注文の受注と並列多工程生産システム

2.1 対象とした生産システム

同一内容の生産加工ができる s 工程が並列している生産システムに、需要がランダムに生じしポアソン分布により示される注文がシステムの外から来るものとする。その注文に対し加工時間というサービス時間を要し、そのつど加工処理、納品する問題を解析するのに待ち行列モデルを用いることができる。以下、そこでの用語を主として使うことにより説明する。

外部からもたらされる注文は複数のユーザーからのものであるが、単位期間あたりの注文の発生数は、平均 λ 個のポアソン分布により示されるものとする。また、この1注文あたりの生産加工時間は、平均 $1/\mu$ の指数分布に従うものとする（これは加工サービスが延々と続き切れ目がない場合に、単位期間あたりの注文処理数が平均 μ のポアソン分布に従うということと同等である）。

この生産システムにおける同一の加工をする並列工程数が s である。待ち行列モデルの記号で表した $M/M/s(\infty)$ においては、これらの工程が並存しており、図1のように、ある注文が入ったとき s 個の工程がすべて加工を行っている場合は、新たな注文は1列の待ち行列の後ろに並び（形式的ではあるが、あたかも注文が1列に並んでいると考える）、先着順に加工の始まるのを待たねばならない。そのうちに先に入った注文の加工が終わり、待ち行列の先頭から先着順に注文が空いた工程にインプットされ、加工が始まる。

これが待ち行列モデルを用いて、対象とした生産システムをこの受注、生産の関係について説明したものである。加工内容がどのようなものであるかなどの吟味とか加工サービスの質

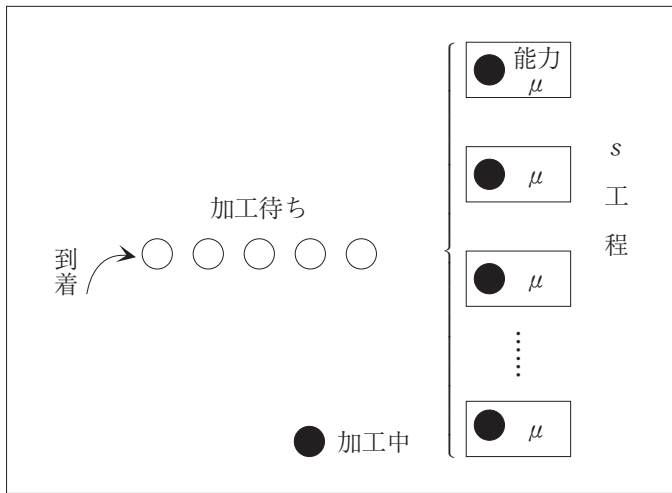


図1 注文の待ちとs工程

を問題にしているわけではなく、ただサービス時間とか待ち時間といった時間という尺度でのみ把握するものである。 $M/M/s$ では待ち行列が1列であることに注意したい。

2.2 p_n について

加工待ちの注文と加工中の注文とを合わせ、生産システムに n 個の注文が入っている確率を p_n とする。

$$p_0^{-1} = \sum_{n=0}^{s-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n / n! + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s}{\left(s - \frac{\lambda}{\mu} \right) (s-1)!}$$

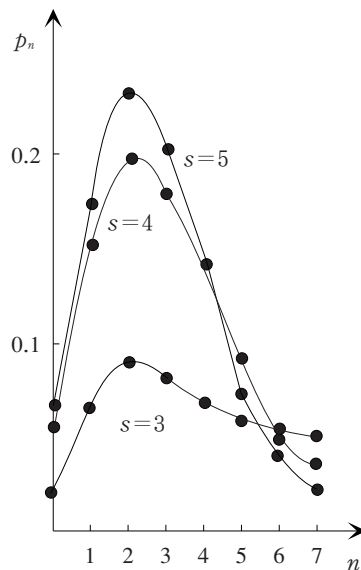
となる。 p_0 は、まったく注文がない、すなわち並列 s 工程すべてが非稼働の状態の確率である。

$$p_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{n!} p_0 & 1 \leq n \leq s \\ \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^n p_0 & n \geq s \end{cases}$$

である。

この p_n のグラフを、 $\lambda/(s \times \mu) < 1$ のケースに限って分析する。なお、この値が1以上であると p_n は理論上求められない。

図2は横軸に n 、縦軸に p_n をとって図示したもので、 $s=3, 4, 5$ の3つの場合である。 $\lambda=27, \mu=10$ である。 $n=0$ から $n=s-1$ の場合、すなわち $0 \leq n \leq s-1$ の場合の確率 p_n の合計は、生産システムが受注後すぐに加工できる状態の確率を示している。 $n \geq s$ とな

図2 n と p_n ($s=3, 4, 5$)

る確率 p_n の合計は，注文が到着後すぐに加工を受けられず，加工を待たねばならない確率を示している。この確率を減少させるには s を大とすればよい。

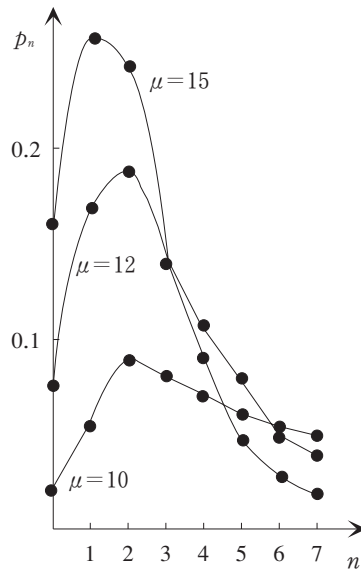
図2では， s を3から4, 5と s を大とすると相対的にグラフは上にシフトし，すぐに加工ができる確率が高くなっていることを把握できる。

図3は，図2と同様であるが， $\mu=10, 12, 15$ の3つの場合である。 μ が大になるにつれ， p_n のグラフは上にシフトしている。早く加工可能となる確率が高くなっていることが分かる。

これらの2つのグラフから，単位期間あたりのインプット数（注文数）を一定とすれば，単位期間あたりのアウトプット数（加工処理能力）を大とすることにより，早く加工処理のできることを示している。

生産システムの全工程能力に対して，システムに入ってくる注文数（平均的に考えて）の比率 $\lambda/(s \times \mu)$ は，生産システムの加工サービス能力がどれくらい注文という需要に対応できるかを示す尺度である。これを小とすることで（すなわち μ 大， s 大とすることである），到着した注文が加工を待つ確率を小とできる。自分の注文より先にインプットされた注文の加工が終わるまでの時間を少なくし，なるべく早く自分の加工を開始してほしい。このような時間的因子は，1つの尺度であろう。なお注文数は，確率的に示されコントロール不可の性質をもっている。

s は離散変量であるが，図2と図3の2つのグラフから， p_n は単調に増加し，あるところで最大値をとって，その後単調に減少しているようである。 $n=\lambda/\mu$ 付近で最大となっている。このことを確認し曲線の概形を知っておくことは重要と思われるので，以下検討してみる。

図3 n と p_n ($\mu=10, 12, 15$)

$n \leq s$ に対しては

$$p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1}$$

となるが、 $n \leq \frac{\lambda}{\mu}$ のとき n の増加に応じて p_n は増加し、 $n > \frac{\lambda}{\mu}$ のとき n の増加に応じて p_n は減少する。

$n \geq s$ に対しては

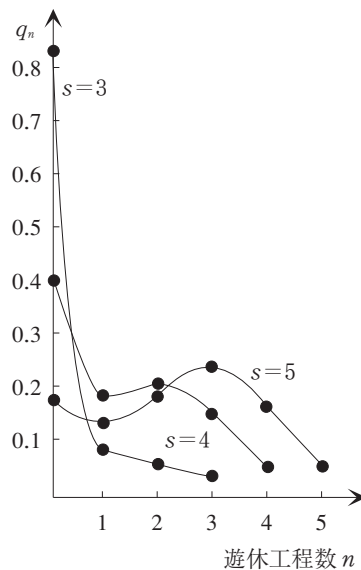
$$p_n = \frac{\lambda}{s\mu} p_{n-1}$$

となり、 $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$ であるから p_n は n の増加に応じて単調に減少する。

この両者の場合をまとめると、 p_n は $n = \lambda/\mu$ で最大値をとる。

2.3 q_n について

先に入った注文の加工終了をなるべく長く待たず、早く加工着手してもらう方法として、工程数 s を増加させるとか、 μ を大、よって平均加工時間 $1/\mu$ を小にすることが考えられる。ところがそのような操作を行うと、逆の待ちというか工程側が注文の来訪を待つ確率が大きくなって、工程の稼働率が悪くなって工程が稼働しない遊休の比率が高くなってしまふ。注文という需要側と加工対応する供給側の両方の便利さを同時に満たすことはできない。両者のバランスを保つということになる。加工待ちの注文数を少なくすることは需要側にはメリットであるが、それでは工程側が遊休となる割合が高くなって注文のインプッ

図4 遊休工程数と q_n ($s=3, 4, 5$)

トを待つという，工程側にもたらされる逆の待ちが発生する割合が高くなる。

非稼働の遊休工程数が n である確率を q_n とする。

$$q_s = p_0, q_{s-1} = p_1, \dots, q_1 = p_{s-1}$$

となる。

遊休工程数がない，すなわち全 s 工程が稼働している確率 q_0 は

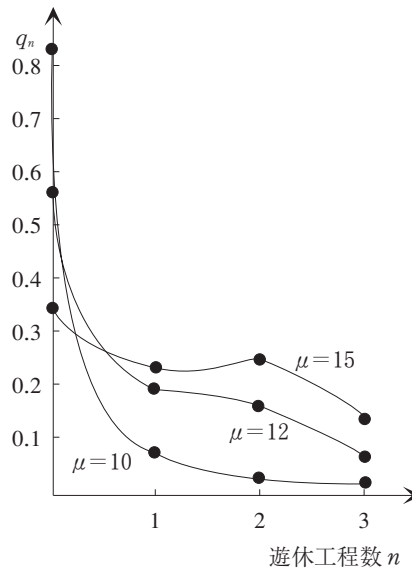
$$\begin{aligned} q_0 &= p_s + p_{s+1} + p_{s+2} + \dots \\ &= 1 - \sum_{i=1}^s q_i \end{aligned}$$

となる。

図4は $\lambda=27$, $\mu=10$ として， $s=3, 4, 5$ の各場合について q_n のグラフを描いたものである。図5は $\lambda=27$, $s=3$ として， $\mu=10, 12, 15$ の各場合について q_n のグラフを描いたものである。この2つの図は，先ほどの図2，図3と反対の傾向を示している。

図4では s 大になるほど q_0 は小となっている。図2より， s 大なるほど加工待ちの注文数を相対的に小（すなわち需要側の便益が上がっていることになる）とできることが分かったが，図4では q_0 は小となっている。 q_0 は遊休工程数が0である確率であり，これが小ということは遊休工程数が存在する確率が高いことを示している。 q_0 小となると，工程側というか供給側の便益が下がることを示している。

次いで，図3と図5の比較を行う。図3では， μ 大なるほど相対数にグラフは上に移動し，早く加工処理できる可能性が高いことを示している。これは需要側の便益が向上していることを示しているが，図5では μ 大なるほど q_0 小となっており，さきほどの図2と図4の比較の場合と同様に，工程側が不利になることを示している。

図5 遊休工程数と q_n ($\mu=10, 12, 15$)

3. 並列多工程生産の有利性

3.1 加工待ちの平均注文数

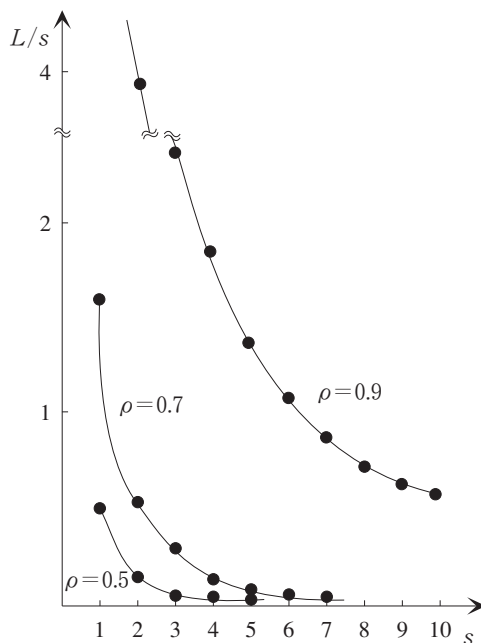
2章の分析は、注文とその加工処理からなる生産システムを待ち行列モデルに即して分析したもので、生産システムに存在する加工中の注文数と純粹に加工待ちの注文数を合わせた数量でつかみ、その確率で示したものであった。需要側の便益とはいっても、すぐに加工してもらえ 가능성이高いとか、生産システム側の便益とはいっても加工注文数が少なく、逆の待ちという工程側が注文を待っている確率が小であるといった点について、確率をもとに論じたものであった。

もう少し精微に検討していこう。これまでの記号を使って、未加工で実際に待っている加工注文数の平均を L とすると

$$L = \frac{s^s}{s!} \frac{\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{s+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} p_0$$

ただし、 p_0 は生産システムに注文が入っていない確率であり、2章で示したのと同じである。

L を s で割った指標は、1工程あたりの平均加工待ちの注文数を示しており、この大小は需要側の便益の大小を示すものといえるであろう。加工が始まるまでの平均加工待ち時間も L に比例するが、この L/s の指標の方が直接的で分かりやすいので、これを用いることにする。単純にいうと、自分（の注文）が到着したとき、すでに待っている先客（の

図6 s と L/s

注文) 数は, 1 工程あたり平均してどれ位あるかを示している。

$\rho = \lambda / (s \times \mu)$ とし, 一定にしよう。この指標は分母が全工程能力を示し, 分子はインプットされる注文数の平均を示しており, 生産システムが保持する工程能力のうちどれほどが注文の加工に対応しているか, 稼働率, 操業率を示している。

図6は, 横軸に s , 縦軸に L/s をとってグラフ化したものである。なお, ρ は 0.5, 0.7, 0.9 の3つの場合をとってある。3つのどの場合とも, s 大, すなわち多工程になればなるほど L/s は小となっており, 多工程によるメリットが需要(注文)側に生じることが分かる。

工程稼働率 ϕ は

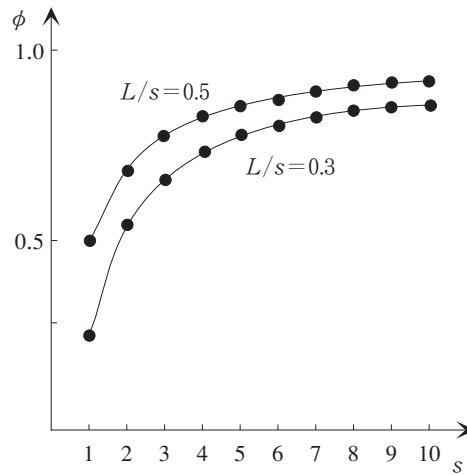
$$\phi = \frac{1p_1 + 2p_2 + \cdots + s(p_s + p_{s+1} + \cdots)}{s}$$

で示される。各場合について計算すると ρ に等しくなる。

ρ 一定では s 大につれ L/s は減少していくが, これは需要側にもたされる並列多工程生産によるメリット, 有利性である。

3. 2 工程の稼働率

以上の分析は, 供給(工程)側の稼働率一定であるから, 供給側の便益一定のもとでのものである。これは1つの側面である。それでは, 需要側, 注文側の便益を一定にすると, 供給側, 生産システム側にはどのようなメリットが生じているのであろうか。以下にその

図7 sと ϕ

分析を試みる。

L/s を s の変化にかかわらず一定、すなわち注文側のメリットを変えないものとする、 s の増大による集中化の効果は、生産システムの工程稼働率の向上という形で表れてくる。

$\lambda=5$, $s=1$, $\mu=10$ では、 L/s の値は 0.5 となる。この場合、工程稼働率 ϕ は 0.5 である。 $s=2$, $\mu=10$ で、前と同じく $L/s=0.5$ とするのは、 $\lambda=14$ 、よって $\phi=14/20=0.7$ と上昇する。

図7は、 s の増減と工程稼働率 ϕ の関係を図示したものである。 L/s は、0.5 と 0.3 の2つの場合に分けて示してある。 s 増加とともに ϕ は増加している。

注文側の便益を一定に保つことによって s 増大、すなわち工程数が集中すればするほど、工程稼働率が向上していく様子が分かる。すなわち集中の効果が生じている様子を把握することができる。

結局、注文側、工程ともども集中の効果の発揮の様子を把握できる。これは注文側、生産工程側の片一方の便益を一定にした上での考察である。現実には、両者が便益を享受できるような、これらの中間的な値をとっているであろう。

3.3 工程能力の集中の効果

いままでの解析は、 μ の能力を持った工程が s 個並存している場合であるが、より理想的に考えて複数の工程を1つの工程にまとめたときを考える。 $s=10$, $\mu=10$ の場合をさらに細かくみてみる。この場合の全工程能力は、 $s \times \mu = 100$ である。この100の値を同じにし、 $s=1$ であれば $\mu=100$, $s=2$ であれば $\mu=50$, $s=4$ であれば $\mu=25$, $s=5$ であれば $\mu=20$ と4つのケース ($s=10$, $\mu=10$ の場合は省略する) を、図8に示してある。 $s=1$, $\mu=100$ の場合が最も工程能力の集中化がすすんでいる

前節において、工程数の集中があればあるほど集中のメリットが生じることを示したが、

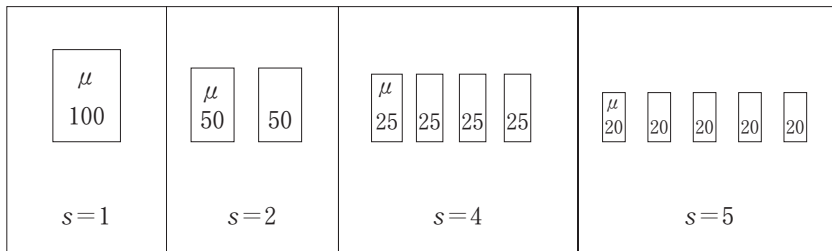


図8 工程能力の集中したケース

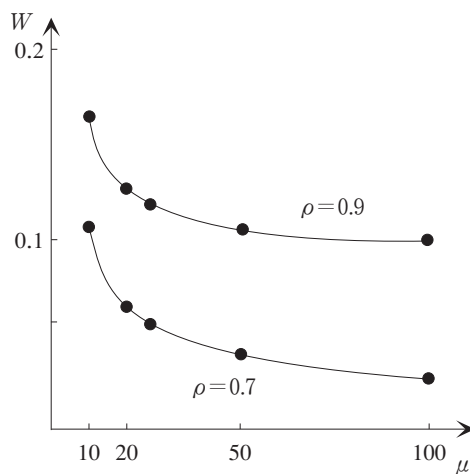
さらなるメリットが生じる条件があるのではないか、それを探る意味で工程数のみならず、工程能力の集中のいろいろなパターンを検討してみることにした。

これまでの分析では、指標として1工程あたりの平均待ち人数をとってきたが、工程能力の集中がすすんでいる場合では工程加工時間が短くなるので、これを含めた指標で比較することが重要である。そこで注文が入ってから加工が終わるまでの時間を W として比較した。

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

となる。

図9は、 $\rho=0.7, 0.9$ の2つの場合について μ と W の関係を示したものである。 $\mu=10$ の場合は $s=10$ であり、最も工程数集中の効果がみられるものであるが、 $\mu=20, 25, 50, 100$ と工程能力の集中の程度がすすむほど W は小となる。能力集中の場合、すなわち $s \times \mu$ ($s=1, 2, 4, 5$)の工程能力を持った場合が発注から下請け加工の終了時までの時間 W が短くなる。結局、工程の数を減じて数個の工程能力にまとめ、加工時間の高速処理

図9 μ と W

化の促進力が理想的には働くことになる。

現実には、ちょうど能力 $s \times \mu$ の高速処理機能を持った工程が存在するとは限らない。以上の考え方は、高速処理能力化の可能性を示すものでしかない。従来、規模集積による利益は複数個の経営数集積による利益とは厳密に区別されてきたが、以上のように工程数の集中による利益は、工程能力の集中によるもたらされる利益に、さらに展開されることになった。

4. 考 察

4.1 並列多工程生産の効果

注文数の条件を等しくし（1工程あたりの注文の平均数を同じにし）、工程能力をすべての工程で同じに（ μ 一定に）した場合、工程数 s の増大（工程数の集中）の効果が生じ、さらに μ を増大させた工程能力の集中という、一種のスケールエフェクトの生じることを示してきた。次に、このような効果が生じる根拠を示してみる。

$s=1$ では注文の待ち行列は1列であり、そこにしか注文は並べないのであるから、あたかもどの工程を選択するかといった自由度はまったくない。 s が複数の場合でも、各工程ごとに1つの待ち行列をつくるというモデルは、1工程に並んでしまえば他の工程に移るといった鞍替えはできず、先に入った注文の加工が終了するまで待たねばならない。他の工程での加工状況、待ち状況の情報を生かすことができないので、全く情報が知らされていないのと同じである。これは、 $M/M/1$ システムが s 個あるという、単なる工程の局所的並存の状態であり、各工程に関連がなく各工程が分離独立されて加工する限り工程数集中のメリットは生じてこない。

$M/M/s$ システムでは待ち行列が1列であり、注文の待ち行列の先頭にたつと、ある工程において先の注文の分の加工が終わるやいなや、先頭の注文に対する生産加工が開始されることがこのモデルの特徴である。先頭にたつと、全工程の加工状況をたえずキャッチできるとみなせ、こういう意味で情報が付与させているとみなせる。これが工程数集中のメリットの根拠である。

工程能力の集中により、さらなるメリットが生じる。分散した工程の加工待ち状況を情報として生かし、どの工程で加工を受けるかの意思決定を行うことの可能なのが $M/M/s$ タイプであるが、さらに分散した工程を能力的に集中させて数少ない工程（理想的には1工程）にまとめることにより、この「あやふやな」、「不確定な」状況の意思決定を行う手続き、手間が省くことができる。情報が完全に行きわたっているとみなせ、より情報が付与されているとみなせよう。

並列多工程生産の効果、有利性の生じる根拠を、「情報」というものを視座に入れ検討することができる。

4.2 生産形態の検討

ここで注意すべきことは、これらの数理的分析の結果は注文発生と加工状況が今まで解

析してきたような確率の場にあるときに成立するということで、確率の場がないときには、特に集中によるメリットは生じてこない。

単位期間の注文が確率的でなく、定量的場合には、対応する生産システムはその一定量を処理する能力、あるいは在庫を用意すればよいので稼働率を原理的に100%に維持できる。このような場合は、集中によるメリットとは無関係である。このような定期、定量発注に近い生産型は、計画的に生産する見込量産型である。

これに対し、不定期、不定量の発注にかかわるのが注文少量型生産である。この生産タイプは、顧客の特殊な注文に従って、そのつど設計、製作する型で、この特殊な注文をこなすために自己にない技術は、すべてそのつど生産を引き受けてくれる側に発注することにならざるを得ない。その発注量、時期とも一定しない。この種の注文にかかわる生産システムは、集中によるメリットを求めることになる。このことは、注文生産タイプの中小下請け工場が京浜工業地帯など、大工業地帯への立地指向性を示す1つの理由ともみなせよう。

5. 本研究のまとめ

本研究は、工程数の増大、工程能力の集中がなされた並列多工程生産の効果、有利性について待ち行列モデルを援用して数理的に分析したものである。分析のまとめを行うと、以下のようである。

- (1) 加工待ちと加工中を合わせた注文数を確率的に記述し、工程数 s 、工程能力を示す μ を大とすることで加工までの時間を小とすることができるとなどを分析した。さらに、工程が稼働していない遊休工程数を確率的に求め、工程側が有利、不利になるケースを検討した。
- (2) 1工程あたりの加工待ち注文数、工程稼働率が工程数の増加、集中により良化することを示し、並列多工程生産システムの有利性、メリットを分析した。さらに工程能力の集中といった規模集中の効果を示した。
- (3) このような工程数の増加、工程能力の集中による効果が生じる背景を情報的な見地から考察し、具体的な生産形態として注文生産タイプについて論じた。

本研究は、生産の集中を数理的に扱ったとはいえかなりの限界がある。扱いやすいところを分析したともみなせる。現在では、情報的な視点の方が重要であることは間違いないところである。今後、そちらの方に向かわざるをえないであろう。

参 考 文 献

- [1] 植田浩史ら『中小企業・ベンチャー企業論』有斐閣、2006
- [2] Dorf, R. C., 設楽常巳訳『最強の起業戦略』日経 BP 社, pp. 362-365, 2011
- [3] 川端基夫『立地ウォーズ』新評論, 2008
- [4] 山下彰一ら『産業クラスターと地域経営戦略』多賀出版, pp. 7-14, 2009

- [5] 松原宏ら『立地論入門』古今書院, pp. 91-95, 2002
- [6] 藤本義治 “わが国機械工業における生産リンケージと情報要因”, 大阪経大論集, 第57巻第5号, 2007
- [7] 黒田充『生産スケジューリング』朝倉書店, pp. 51-77, 2002