

計量政策状態空間モデルの理論的基礎

伊 藤 幸 雄

要 約

この論文では、一般的に、動学的経済安定化政策（Dynamic Stabilization Policy）で使用される計量構造モデルを状態空間型によって表現し、かつ、それを経済政策、特に最適経済安定化政策モデルに、使用する際の政策制御可能性を確認するためのその枠組みと技術的方法について述べる。

最初、この研究が1970年代に始められたにもかかわらず、その後、進展が見られていない（藤本（1999））。したがって、ここでは、それらをもう一度掘り起こし、その経済政策への重要性を検討するものである。以下、第1節では、計量モデルと状態空間モデルとの関係について述べ、第2節では、計量モデルを政策に適合するように変換した「計量政策状態空間モデル」について述べ、それ以降は、そのモデル基いた可制御性、第3節では、経済政策の動学理論、第4節では、ある政策期間の全体にわたる「可制御性」すなわち、「目標経路可制御性」について述べる。第5節では、いわゆる政策制御性を成立させるための最小次元の方程式モデルの条件で、モデル選択の一つの原理である「ケチの原理」（principle of parsimony）と同値であるモデルの最小実現の理論について述べる。第6節では結論を述べる。

キーワード：計量モデル、状態空間型、政策可制御性、ハンケル行列、マルコフ・パラメータ、最小実現

1. 序

一般に、ほとんどの計量モデルは離散型であるが、ここで離散型モデルを用いるのは、第一に、計量モデルは、ほとんど離散型で表されること、第二に、経済における統計データ（日、月、四半期、年時系列など）は、離散型時系列データで与えられること。最後に、連続型と同様に離散型モデルで最適制御理論が展開できるからである。最適安定化政策問題には、主に二つの構成要素が必要であった。それは、経済構造を表す制約式と経済厚生（損失）を表す評価関数である。制約式としては、ここでは計量モデルを使用するが、そのままでは最適制御理論を適用できないので、それを状態空間型（state space forms）、あるいは状態空間モデルというモデル表現型に変換して最適安定化問題を考えることができる。その際、動学的政策問題と深く関わりのある政策問題の『可制御性』（controllability）について述べよう。

2. 計量モデルと状態空間モデル

最適安定化政策問題で取り扱われる状態空間モデルは、時変系（time-varying）と呼ば

れる時間の経過とともに変化するモデル係数を含んだモデルも存在するが、そのようなモデルの閉ループ解¹⁾の計算は非常に複雑である。したがって、この節では、モデル係数が時間的に固定している不時変系 (time-invariant) の状態空間モデルに限って議論する。

最近の経済学における動学ゲーム理論や最適制御理論の応用において、状態空間モデルが盛んに用いられるようになった。しかし、この状態空間モデル (特に、動学的計量モデルの状態空間型) は、計量経済学におけるモデルの表現型、すなわち構造型、誘導型、および最終型とはいくぶん違っている。最適制御理論の経済分析への応用では、えてして、工学系で使用されている最適制御理論の結果を盲目的に適用し、そのモデルの構造問題 (すなわち、計量モデルの構造型、誘導型、および最終型から状態空間型への変換問題) を無視して、応用する傾向がある。その傾向は、2次評価関数と線形状態空間モデルの最適制御理論 (すなわち、LQ²⁾問題) の経済分析への実のある応用が達成され得ない場合がありうる。この概念に深く関わっている『可制御性』の概念は、さらにまた、経済政策の動学理論、言い換えれば、経済動学システムにおける経済政策解の存在問題³⁾にも関係している。このような重要性があるにもかかわらず、ほとんど、この事実は脚光を浴びてこなかった (Preston, 1977b)。しかし、ここでは、その重要性を鑑み、動的経済政策問題の基礎として、『可制御性』を述べることにする。

最小実現問題は、安定化政策の重要な性質を含んでおり、可制御性、可観測性を同時に満たすシステムであり、また状態空間モデルの最小次元のシステムである。ここでは、伝統的計量モデルからどのようにして解析的に、状態空間モデルに変換できるか検討する。最小実現に関しては、さまざまな方法が存在する (Myoken & Uchida, 1977; Bray, 1974)。前者は、Ho & Kalman (1966) によって提案された一般化ハンケル行列⁴⁾を使い、後者は、Mayne (1968) の方法を用いたボックス・ジェンキンズ型の伝達関数を通じた最小次元である。本論文では、計量モデルに適した行列演算のみで、状態空間モデルの最小実現が得られる方法 (Caines & Wall, 1974) を論ずる。

(a) 構造型 (structural form)

計量モデルは、一般に次のような構造型で表される。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_0 \mathbf{y}_t + \mathbf{H}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{H}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{G}_0 \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \mathbf{G}_q \mathbf{x}_{t-q} + \mathbf{w}_t \quad (1)$$

- 1) この章では最適安定化政策解の存在、一意性、またその閉ループシステムの安定性に深く関係している計量モデルの状態空間表示に関する最小実現の重要性について述べる。最適制御政策を元の状態空間モデルに導入した自己再帰方程式システム。
- 2) 付加的確率変数 (攪乱項) を導入することによって LQ (G はその確率変数のガウス (正規) 分布を意味する。) 問題と呼ばれることもある。
- 3) このようにして、状態空間モデルの構造問題、正確にいうと、状態空間モデルの最小実現問題 (minimal realization) を、最適制御理論を経済分析に適用する前に、解決しておく必要がある。従って、この問題解決されていない場合、導かれた制御政策のなかに、経済的に意味のないものが現れることがある。
- 4) 伝達関数、あるいは最終型における係数行列 (衝撃および中間乗数行列) によって構成された行列。

ここで,

y_{t-i} ($i=1, \dots, p$) $G \times 1$ 内生変数ベクトル

x_{t-i} ($i=1, \dots, q$) $K \times 1$ 外生変数ベクトル 4....)

H_i ($i=0, \dots, p$), G_i ($i=0, \dots, q$) はそれぞれ推定済みの $G \times G$, および $G \times K$ 構造係数行列。 p, q は内生変数, および外生変数⁵⁾ ベクトルの最大タイム・ラグ数で, 通常, $p \geq q$ ⁶⁾ であり, 内生変数のタイム・ラグは外生変数のそれより大きい, または等しい。ただし, H_i, G_i は一部はゼロ行列であるかもしれない。また w_t は G 次元構造型攪乱項残差ベクトルで, 平均ゼロベクトル, 一定の分散・共分散行列と仮定される。

周知のように, 構造型は, 経済活動の相互依存関係を示しており, いわば, 経済理論に基づく経済『構造』を記述している。この構造型は, 当期内生変数が, それ自身とそのラグ付き内生変数, 当期とラグ付き外生変数, および攪乱項ベクトルによって説明されるものである。構造型は, 経済変数が, どのような相互依存関係を持っているかを把握するとき, 特に重要である。通常, 計量モデルと言えば, この型のことを言う。

(b) 誘導型 (reduced form)

この他に, 当期の内生変数が, 先決変数 (すなわち, ラグ付き内生とすべての外生変数) によって影響される様子を見たい場合がある。幸いにも, この目的に最も適合した表現型をもっているモデルがある。これが, 誘導型で, (1)の右辺の第一項を左辺に移項して, 両辺に $(I - H_0)^{-1}$ を乗ずれば, 次式が得られる。

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + B_0 x_t + B_1 x_{t-1} + \dots + B_q x_{t-q} + e_t \quad (2)$$

ここで, $A_i = (I - H_0)^{-1} H_i$ ($i=1, \dots, p$)

$$B_i = (I - H_0)^{-1} G_i \quad (i=0, \dots, q)$$

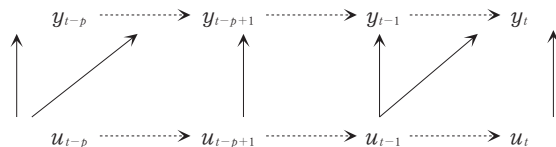
$$e_t = (I - H_0)^{-1} w_t$$

さらに, $(I - H_0)$ が非特異行列, すなわち $(I - H_0)^{-1}$ が存在すると仮定される。⁷⁾

誘導型は, 先決変数が当期の内生変数に影響与える程度を見るために, 非常に便利な形

5) 定数項は, $u_{t-i}=1$ として定義し, 制御変数列ベクトル u_t の第一行に含まれるとする。

6) この仮定は現実世界に関する限りは, かなり根拠あるように思われる。例えば, 計量経済学では, 内生変数は経済システムに対して出力として考えられる。一方, 外生変数は, 入力として考えられる。不等号は出力の最大のタイム・ラグ次数は, 入力に等しいか, またはそれよりも大きいことを意味している。換言すれば, 有限時間の p 時間遅れから現在時点までの時系列データを取る時, 現在の入力が過去における出力にまったく影響を与えないことを意味する。このことは決して根拠ないことではないと考える。このことを明示するために, 図示することによってよりよく理解することができるであろう。



7) 行列が特異である場合は, 一般化逆行列を用いて, 誘導型を得ることができる。

をしている。したがって、(衝撃)乗数分析に対して大変適合している。しかし、モデルの様々な変数間に存在する相互依存関係は見るができないことに注意すべきである。

(c) 最終型 (final form)

最終型は、当期内生変数が過去の外生変数および攪乱項の履歴によってのみ表現されるモデル形式で、工学系では「伝達関数」(transfer function)と呼ばれている。この表現型は、誘導型から導かれ、過去の外生変数に対する当期の内生変数への影響を知ることができ、それは、係数行列としてマルコフ行列と呼ばれ、経済学、特に計量経済モデルにおける動学乗数行列に対応するものである。

今、ラグ付き内生変数を $y_{t\pm i} = z^{\pm i} y_t$ とおくと、(2)式の係数行列は、次のように書かれる。

$$A(z^{-1}) = I - A_1 z^{-1} - A_2 z^{-2} \cdots - A_q z^{-q} \quad (3)$$

$$B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} \cdots + B_q z^{-q} \quad (4)$$

したがって、方程式(2)から、次式を導くことができる。

$$y_t = A(z^{-1})^{-1} B(z^{-1}) x_t + A(z^{-1})^{-1} e_t = T(z^{-1}) x_t + w_t \quad (5)$$

ここで $w_t = A(z^{-1})^{-1} e_t$

ただし、(4)の方程式が意味をもつため、すなわち $A(z^{-1})$ が正則であるためには、 $A(z^{-1})=0$ の解が単位円外に存在する必要がある。このように、システムが安定であることが前提とされる。 $T(z^{-1})$ をローレンツ展開すると、次式が得られる。

$$T(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i z^{-i} \quad (6)$$

それゆえ、次式が成立する。

$$A(z^{-1}) T(z^{-1}) = B(z^{-1}) \quad (7)$$

したがって、 z^{-i} に関する係数行列を比較すると、(6)式の両辺にはつぎの関形式が成立している。

$$T_i = B_i + \sum_{i=1}^{\infty} A_i T_{t-i} \quad (8)$$

ただし、 $T_0=0$, $B_1=0$, $A_0=0$ で T_i はマルコフ行列と呼ばれる。

ここで、経済システムにおいて、外生変数を原因、あるいはインプットとして、内生変数をその経済活動から生じた結果、あるいはアウトプットとして位置づける。この関係は、計量モデルの誘導型と最終型によって表現されと考えられる。このように、経済システムは、複雑な経済活動が行われる大きなメカニズムとして考えられる。これは、「ブラック・ボックス」と呼ばれる図1によって示すことができる。

いままで、経済政策には、計量モデルの誘導型と最終型が適合していることを見てきた。ここでは、さらに第4番目のモデル表現形式である状態空間モデルを見ることにしよう。この表現形式は、特に最適安定化(制御)政策問題を考えるとき、非常に重要な概念であるが、経済学者は、この工学系の概念を経済システムにおける意義を考えずに経済問題に適用する傾向がある。したがって、我々は、Kalman (1960) の原点にもどってその定義

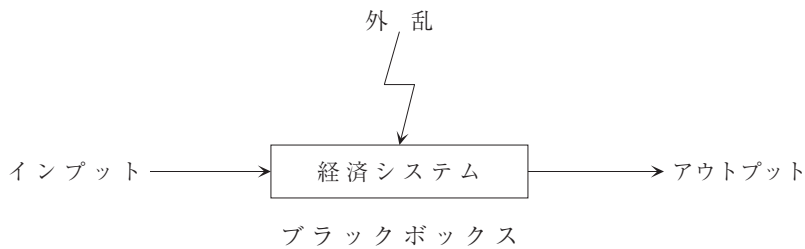


図1. 経済システムにおけるインプット・アウトプット関係

を与え、その経済政策的意義を検討することにしよう。それは、次の問題を提起することによって説明されるかもしれない。すなわち、「経済システムにおける『状態』(state)とはどのように解釈されるのか。」、また「何故、この概念を経済システムに導入する必要があるのか。」この問題提起に対する答えは、次の『状態』の定義のなかに包含されているであろう。

定義1：(状態)

「システム、あるいは数学的過程における状態とは、システムの履歴、将来の挙動の計算が可能な過程に関する十分な情報を含んだ変数の最小集合である。」

システムとして、計量モデルを考えよう。システムとしての状態は、内生変数が考えられる。計量モデルは優れて動学的であるので、多かれ少なかれ、ラグ付き内生変数、ラグ付き外生変数を持つ。したがって、内生変数の過去の値が既知であれば、その現在値を知ることができる⁸⁾。このようなプロセスより、経済システムの履歴を表す時系列が生み出されることとなり、まさに上記の定義と整合性をもつのである。例えば、状態空間モデルの類似性は、当期の内生変数が、その過去の履歴（過去の内生変数）、当期とラグ付き外生変数および当期とラグ付き攪乱項によって表される「基本的動学方程式」(Goldberger, 1969; Kmenta, 1971)に明示的に見られるのである。これは、誘導型から導かれるもので、内生変数は過去から将来への経済システムの状態を決定する必要な情報を持っているといえることができるだろう。

計量モデルを、ティンバーゲン・タイル流の経済政策的観点から状態空間モデル表示に変換するために、ティンバーゲンの変数分類を検討しておこう。ティンバーゲンは、静学における経済政策の原理を考えたが、経済政策は、本来動学システムを対象としているので、動学的経済政策を取り扱わねばならないことを Preston (1977a) が強調しており、その萌芽は Hansen (1958) に既に見られると指摘している。

8) システムが若干の確率誤差項によって攪乱される時でさえ、確率誤差が既知であれば、統計的方法で推定できる。

ティンバーゲンの政策理論において、経済変数は、目標 (target)、手段 (instrument)、局外 (irrelevant)、与件 (data) 変数の4つに分類されている。したがって、過去の内生変数は与件として考えられている。この変数分類を計量モデルとの比較で図示しよう。

計量モデル	政策モデル
内生変数 y (endogenous variable)	目標変数 (target) y^T
	局外変数 (irrelevant) y^R
外生変数 x (exogenous variable)	手段変数 (instrument) u あるいは制御変数
	与件変数 (data) z

しかし、我々は、常に動学システムを考えているので、例えば、連続する2期間の経済政策期間の場合、過去と現在の経済変数に日付をつけて区別し、同じ目標、あるいは手段変数であっても、それぞれ2つの相異なる目標、手段変数として取り扱うことにする。ここで、前述した状態変数の定義とティンバーゲンの変数分類の双方を考慮すれば、内生変数である過去を含む目標・局外変数を状態変数 (state variable)、過去を含む手段変数を、政策決定者 (政府) が自らの裁量で自由にコントロール可能な制御変数 (control variable)、および与件変数を、経済システム以外の外的環境により支配され、所与として与えられる純粋な外生変数 (pure exogenous variable) として取り扱うことにする。

(b) 計量政策状態空間モデル (econometric policy state space models)

政策的観点から、計量モデルから状態空間モデルへの変換を考え、それを計量政策状態空間モデル (econometric policy state space model) と呼ぶことにしよう。

一般に計量モデルは、次のように ARMAX (Auto Regressive Moving Average with exogenous variable) モデル型の時系列モデルで表現される。(Hannan, 1976)⁹⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t = & \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{t-2} + \cdots + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_t + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_p \mathbf{u}_{t-p} \\ & + \mathbf{C}_0 \mathbf{z}_t + \mathbf{C}_1 \mathbf{z}_{t-1} + \cdots + \mathbf{C}_p \mathbf{z}_{t-p} + \mathbf{E}_0 \mathbf{e}_t + \mathbf{E}_1 \mathbf{e}_{t-1} + \cdots + \mathbf{E}_p \mathbf{e}_{t-p} \end{aligned} \quad (9)$$

いま、状態変数ベクトルを次のように定義する。

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{pt} \end{bmatrix},$$

さらに、状態変数を次のようにおくと、

9) 入力変数の最大ラグ数は状態変数のと同じである。すなわち、 $p=q$ であると仮定される。経済因果性において、入力 (原因) が出力 (結果) を時間的に超えないという意味は根拠ないことではない。

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{1t} &= \mathbf{B}_p \mathbf{u}_t + \mathbf{C}_p \mathbf{z}_t + \mathbf{E}_p \mathbf{e}_t \\
\mathbf{x}_{2t} &= \mathbf{x}_{1t-1} + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{2t-1} + \mathbf{B}_{p-1} \mathbf{u}_t + \mathbf{C}_{p-1} \mathbf{z}_t + \mathbf{E}_{p-1} \mathbf{e}_t \\
&\dots\dots\dots \\
\mathbf{x}_{pt} &= \mathbf{x}_{p1t-1} + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{p-1t-1} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_t + \mathbf{C}_0 \mathbf{z}_t + \mathbf{E}_0 \mathbf{e}_t \\
\mathbf{y}_t &= \mathbf{x}_{pt}
\end{aligned}$$

次のような状態空間モデルが得られる。

$$\text{システム } S: \mathbf{x}_t = \mathbf{A} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_t + \mathbf{C} \mathbf{z}_t + \mathbf{E} \mathbf{e}_t \quad (10)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{D} \mathbf{x}_t \quad (11)$$

ただし,
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_{p-1} \\ \mathbf{B}_{p-2} \\ \cdots \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \\ \mathbf{C}_{p-1} \\ \mathbf{C}_{p-2} \\ \cdots \\ \mathbf{C}_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \cdots \quad \mathbf{I}], \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{E}_{p-1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_t$: n 次元状態変数ベクトル $\mathbf{e}_t$: n 次元確率的残差項ベクトル
 $\mathbf{u}_t$: m 次元制御変数ベクトル $\mathbf{z}_t$: 1 次元予件変数ベクトル
 $\mathbf{y}_t$: k 次元目標変数ベクトル

$\mathbf{A}(n \times n)$, $\mathbf{B}(n \times m)$, $\mathbf{C}(n \times 1)$, $\mathbf{D}(k \times n)$, および $\mathbf{E}(n \times 1)$ は推定済み係数行列である。

計量状態空間モデルの最小実現¹⁰⁾を達成するために、重要な2つの概念『可制御性』『可観測性』を取り扱う。これらの概念は、工学系で Kalman (1960, 1964) が、最初に展開し、以後多くの工学者によって、発展させられている。ここでは、これらの概念を総括し、その経済状態空間モデルの意味を考えよう。まず、初めに、次の記号を導入する。システム S を4個のパラメータ集合 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ¹¹⁾で示し、それによって、計量モデルからの「実現」(realization)を意味するものとする。

「可制御性」の概念から述べることにしよう。

定義2：可制御性 (Controllability)

システム $S(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ は、もし初期状態ベクトル $\mathbf{x}_0$ ¹²⁾、および与件変数ベクトル、 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_T$ が与えられる前提のもと、有限時間、 $t=1, \dots, T$ で状態変数 $\mathbf{x}_t$ が最終状態 $\mathbf{x}_T$ に移動させるような制御変数系列が存在するならば、(完全状態)¹³⁾ 可制御である。

10) Uchida & Myoken (1978) は Chow の状態空間モデル (Chow, 1974) は最小実現ではないことを証明した。後で見るように任意の計量モデルは少なくとも可観測である。

11) システムはこのように表現される。

上記の定義は、明らかに、システム S を解くことによって理解できる。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^t \mathbf{A}^{t-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^t \mathbf{A}^{t-i} \mathbf{C} \mathbf{z}_i \quad (12)$$

ここで、可制御性が成立するための必要十分条件を定理 1 で述べる。

定理 1

システム $S (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ が可制御であるための必要十分条件は、

$$\text{rank } \mathbf{Q}_c = n \quad (13)$$

が成立することである。

ただし、 $\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ は可制御行列 (controllability matrix) と呼ばれる。

証明 (必要性) 上記の (12) は、任意の k に対して、次のように解かれる。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{C} \mathbf{z}_i \quad (14)$$

が成立するために、次式が成立しなければならない。

$$\text{rank } [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \cdots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = n$$

ここで、(14) の制御変数系列を縦ベクトルにすることによって (14) を (15) の連立方程式に書き換えられる。(15) で、制御変数に関する解が存在するためには、この可制御行列が一次独立 (階数 n) でなければならない。換言すれば、初期状態と与件変数系列 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_T$ が制御政策期間 $[1, T]$ に与えられ、上の条件が成立するならば、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_T$ が存在する。すなわち、

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_k - \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_0 - [\mathbf{A} \quad \mathbf{AC} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{C}] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

が存在する。ただし、残差項ベクトルをしばらくのあいだ無視する。¹⁴⁾ したがって、任意の k に対して、ケーリー・ハミルトンの定理¹⁵⁾ より $\mathbf{A}$ は、 $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{k-1}$ の一次結合で表される。もし $n \geq k$ ならば、(15) は、満足されねばならない。逆に $n < k$ ならば、 $\mathbf{A}^k (k=n, n+1, \dots)$ は行列 $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ の一次独立の列ベクトルとして表現さ

12) 初期状態 $\mathbf{x}_0$ はいつでも与えられると見なされる。

13) 以下、特に断らない限り、「完全状態」可制御を単に「可制御」と言う。

14) ここでは、確率システムを取り扱わないが、この理論を確率システムに拡張することができる。その場合、目標 (状態) は、元の目標 (状態) の期待値によって置き換えられる。

15) ケーリー・ハミルトンの定理は次のように述べられる。 $\mathbf{A}$ を $n \times n$ の正方行列とする特性方程式が次のように表される。

$$|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \mathbf{A}^n + a_n \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 = 0$$

そのとき、行列 $\mathbf{A}$ は、次式を満足させる。

$$\mathbf{A}^n + a_n \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} = 0$$

れうる。このようにして、次を得る。

$$\text{rank } Q_c = \text{rank} [B \ AB \ \cdots \ A^{k-1}B] \\ = n$$

(十分性) もし $\text{rank } Q_c = n$ ならば、 $T = n$ で制御変数系列によって達成されるような状態が存在している。もしシステム S の解が連続的な制御変数系列と与件変数系列を導入することによって、次式

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{\tau=1}^n A^{n-\tau} B u_\tau + \sum_{\tau=1}^n A^{n-\tau} C z_\tau \quad (16)$$

が満足されるならば、このことは、明らかである。したがって、システム S (A, B, C, D) は可制御である。 Q.E.D.

この可制御性は、状態方程式に関係しているのみで、行列 A と B は目標 (出力) 方程式の行列 D には何も影響を与えない。したがって、システム S の可制御性を議論するときには、(A, B, C, D) と書かずに、可制御行列集合 (A, B) と、可制御システムを書くこともある。

この経済政策的意味を考えよう。マクロ経済政策で、システム S は、1 目標変数、例えば、消費、および 1 制御変数、政府支出が存在するとしよう。もし政策当局者が政府支出を制御することによって、ある消費量を達成したいとすれば、彼は、このシステムの可制御行列の階数をチェックすることで、この目的が達成できるかどうかを確かめることができる。したがって、この条件が満足されるならば、政策当局は、政府支出を操作することによって国民の希望消費量を達成することができることを意味する。そうでなければ、経済政策策定のための計量モデルの一部、あるいは全方程式を修正するか、あるいは可能ならば、制御変数を増加しなければならない。このことは、政策策定者として望ましくなく、回避しなければならない。また、可制御性を満たすような状態空間モデルを再構成しなければならない。これが、既存の計量モデルから状態空間モデルの最小実現を達成しなければならない一つの理由である。

最適制御問題を取り扱うときに、もう一つの重要な概念が存在する。これがいわゆる「可観測性」(Observability) と呼ばれるもので、可制御性と双対関係にある。この概念の意味は、後に明らかにされるが、最適制御問題の解の存在、一意性、最適性、および閉ループシステムの漸近的安定性に深く関係している。しかし、それらは、ここでは示さず、可観測性の定義とその重要な定理だけを述べるに止めることにしよう。

定義 3：可観測性 (observability)

システム S (A, B, C, D) は、制御系列, $u_1, u_2, \dots, u_T$ と与件系列, $z_1, z_2, \dots, z_T$ が与えられたならば、有限期間, $t=1, 2, \dots, T$ において、任意の初期状態 x_0 が、目標変数系列 $\{y_t; t=1, \dots, T\}$ から一意的に決定されるならば、可観測である。

可観測なシステムに対して次の定理が成立する。

定理2 (可観測性)¹⁶⁾

システム S が可観測であるための必要かつ十分条件は、次式が成立することである。

$$\text{rank } \mathbf{Q}_0 = n \quad (17)$$

ただし、

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{DA} \\ \vdots \\ \mathbf{DA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

証明) 状態方程式, 目標方程式から次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 - \mathbf{DB}_1 - \mathbf{DCz}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}^T - \sum_{t=1}^T \mathbf{DA}^{t-1} \mathbf{Bu}_t - \sum_{t=1}^T \mathbf{DA}^{t-1} \mathbf{Cz}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{DA} \\ \vdots \\ \mathbf{DA}^{T-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (18)$$

可観測性の定義より, 初期状態 $\mathbf{x}_0$ に対する一次連立方程式を解かねばならない。すなわち, 可観測は (18) $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}_0$ (ここで, $\mathbf{Y}$ は (18) の左辺の項をまとめたベクトル) の方程式の解の存在を前提にすることと等価である。そのためには, 行列 $\mathbf{Q}_0 (kT \times n)$ は, 階数 n をもち, $(\mathbf{Q}_0' \mathbf{Q}_0)$ は非特異であり, したがって, $(\mathbf{Q}_0' \mathbf{Q}_0)$ は逆行列を持たねばならない。すなわち, $((\mathbf{Q}_0' \mathbf{Q}_0)^{-1})$ が存在し, (18) が解をもち,

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{Q}_0' \mathbf{Q}_0)^{-1} \mathbf{Q}_0' \mathbf{Y}$$

が成立する。したがって, 次の条件が満足されなければならない。

$$\text{rank } \mathbf{Q}_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{DA} \\ \vdots \\ \mathbf{DA}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (19)$$

可制御性の証明に取られたと同じ手続きで, ケーリー・ハミルトンの定理によって, $\mathbf{A}^n$ が $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ の一次結合として表され, $T \geq n$ のとき, $\mathbf{A}^T$ は $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ の一次結合で表される。したがって,

$$\text{rank } \mathbf{Q}_0 = n \quad (20)$$

(十分性) 逆に (18) 式の後半部分, あるいは制御系列, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ が存在しない時でさえ, (19) が成立することは, システム $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ が可観測であることが明らかである。

Q. E. D.

可制御行列と同様にして, 可観測は行列 $(\mathbf{A}, \mathbf{D})$ にのみ関係するので, しばしば, 可

16) この概念は, 長期的な (無限時間) の経済政策を考慮するとき重要であるが, しかし, さしあたり, 後に述べるシステムの最小実現表示のためと, 我々は短期的 (有限時間) の経済安定化政策に関心をもっているの, これらが関係を指摘するだけで十分であると考ええる。

観測集合 (A, D) と書かれる。このように、可制御性と可観測性は互いに、双対の概念であるが、この双対性に関して Kalman (1960) が証明しているが、我々の目的とは直接関係がないのでその証明は省略する。

3. 経済政策の動学理論

ティンバーゲンの固定目標政策を考慮するとき、政策策定者の基本的目的は、目標空間でのある希望点、あるいはある希望値に達成することである。しかし、Hansen (1942)¹⁷⁾ に述べているように、政策決定は元来、動学的性質を持つものなので、動学における政策存在問題を取り扱うべきである。政策目的の動学的性質を考えるならば、Preston (1977b) にしたがって2つの政策的概念に分割されるであろう。一つは、『目標点達成』であり、もう一つは、『目標経路達成』であろう。前者は形式的に

$$Y^* = y_T \quad T \in \{0, 1, \dots\} \quad (21)$$

として表される。ただし、 Y^* は、 T 時点における希望時点における目標希望達成集合であり、この政策目的は、希望時点 T に達成すべき希望目標変数を意味している。

他方、後者は、特定の時間区間にわたる上記の目標達成系列によって定義される。すなわち、

$$Y^* = \{(y_0^*), y_1^*, \dots, y_T^*\}^{18)} \quad T \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (22)$$

この目的は、政策当局がこの系列の初期時点で、希望目標変数値を達成した後、その希望目標経路に沿って、その目標変数値を維持したいときに立てられる。特に、このパラメータ「目標経路区間」(target path interval)、あるいは「政策区間」(policy interval) と呼ばれ、目標経路の長さによって規定される。

2つの政策問題は、これらの目的が達成可能かどうかによって引き起こされるもので、前者の問題は、「目標点可制御性」(target point controllability) と呼び、後者を「目標経路可制御性」(target path controllability) 問題として取り扱われる。前者は、希望時点を T において希望目標変数値を達成するような制御変数系列が存在するかどうか、また後者は、希望、あるいは特定化された政策期間にわたって希望目標値系列を達成するような制御変数系列が存在するかどうかの問題である。これらの概念は、Tinbergen (1952) に提案された経済政策の存在問題に関連している。事実、これらの概念は、経済政策の動学理論の観点から、ティンバーゲン定理の動学的一般化として展開されてきた。(Myoken, 1976, 1980; Preston, 1974, Preston 1976; Aoki, 1974) ここでの議論は Preston (1976) と Myoken (1976) によるものであるが、前者とは、若干結果が違っており、後者の欠けている「経済政策のカウント・ルール」を補うものである。

17) Preston (1977b) が述べているように、Hansen の本 (Hansen, 1948, 1968) は多くの経済学者によって見過ごされている。彼は、経済システムの動学的フレームワークでの経済政策の理論を議論した最初の人物である。

18) y_0^* は初期状態 x_0^* がシステムで一旦与えられたならば、自動的に得られた。それゆえ、事実、 y_0^* は、希望目標変数系列から以下のように排除される。

次に、「ティンバーゲンの定理」との関連より、「目標点可制御性」と「目標経路可制御性」、およびその「カウント・ルール」について述べる。この目的のため、まず「ティンバーゲンの定理」を思い出そう。

次のような線形計量モデルを考えよう。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{u}_t + \mathbf{C}\mathbf{z}_t \quad (23)$$

$\mathbf{y}_t$: k 次元当期目標変数ベクトル

$\mathbf{u}_t$: m 次元当期制御変数ベクトル

$\mathbf{z}_t$: r 次元与件変数ベクトル

この式は、紛れなく計量モデルの誘導型であるので、ラグ付き内生、制御、与件変数はすべて $\mathbf{z}_t$ に内包されている。ここでは、もちろん局外変数は方程式から除外されていると仮定される。¹⁹⁾ ティンバーゲンの政策理論における政策存在の概念は、ある希望目標値を達成するのに十分な数の制御（手段）変数が存在するかどうかである。これは、次のように『固定目標政策問題』として次のように述べられる。

『固定目標政策問題』

与件変数 $\mathbf{z}_t$ が既知で、与えられたもの、すなわち、 $\mathbf{z}_t = \mathbf{z}^*$ であるならば、任意の所与の固定された特定値に対する望まれた目標値 $\mathbf{y}_t = \mathbf{y}^*$ を満足する $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}^*$ が存在するかどうかを取り扱う問題である。

「ティンバーゲンの定理」は、普通、手段と目標変数の数とその関係を意味する。しかし、これは単なる必要条件を与えるのみで、十分条件ではない。「ティンバーゲンの定理」の必要十分条件は次のように表される。

「ティンバーゲンの定理 1」（階数条件）

独立な目標変数の任意の固定目標値 $\mathbf{y}_t = \mathbf{y}^*$ は、もし手段変数行列 $\mathbf{B}$ の階数が目標変数の数に等しく、かつそのときのみ、すなわち、次式、

$$\text{rank } \mathbf{B} = k \quad (24)$$

が成立するとき得られる。

証明) これは、(23)を考えることによって得られる。

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{C}\mathbf{z}_t$$

すなわち、

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_t = \mathbf{y}^* - \mathbf{C}\mathbf{z}^* \quad (25)$$

「ティンバーゲンの定理」は、実際には、 m 個の制御系列 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ の連立方程式の解が得られるかどうかにか等しいので、我々は直ちに(24)から $\text{rank } \mathbf{B} = k$ を導くことができる。

19) 局外変数の消去については付録Aを参照せよ。

経済学の文献でしばしばよく見られるのが、次のティンバーゲンの「静学カウント・ルール」²⁰⁾と呼ばれる(24)に関する必要条件である。

ティンバーゲンの定理 2：(静学カウント・ルール)

k 個の独立な目標変数の任意の固定された目標変数値 $\mathbf{y}_t = \mathbf{y}^*$ を得るために、制御変数の数は目標変数の数に等しいか、または超えなければならない。すなわち、

$$m \geq k \quad (26)$$

である。

次に、これらのティンバーゲン定理を頭に置きながら、目標点可制御性の定義を与える。

定義 4：(目標点可制御性)

任意の初期状態 $\mathbf{x}_0$ と外生与件変数系列, $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_T$ に対する「任意」の目標点変数値 $\mathbf{y}_t$ に到達するための政策当局に関する必要十分条件は、システム行列 $R(k \times mn)$ が次の階数条件を満足するときのみ目標点可制御である。

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathbf{R} &= \text{rank } [\mathbf{DB} \ \mathbf{DAB}, \dots, \mathbf{DA}^{n-1}\mathbf{B}] \\ &= \text{rank } \mathbf{DQ}_c \\ &= k \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、システム $S(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ は、 $\text{rank } \mathbf{Q}_c = n$ であるような可制御システムである。

以下の証明は、Ogata (1967) を若干修正して述べたものである。

証明) (十分性) システムが目標点可制御であると仮定する。定義より、目標変数 $\mathbf{y}_t$ が初期状態 $\mathbf{x}_0$ に対する希望された時点で、一つの目標値を達成しなければならない。もちろん次の方程式は時点 T に対して次式が成立しているものとする。

$$\mathbf{y}_T = \mathbf{D}\mathbf{x}_T \quad (28)$$

(12)を再述すると、

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{A}^T \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=1}^T \mathbf{A}^{T-\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}_\tau + \sum_{\tau=1}^T \mathbf{A}^{T-\tau} \mathbf{C} \mathbf{z}_\tau \quad (29)$$

(28)を(29)に代入すると、次を得る。

$$\mathbf{y}_T = \mathbf{D}\mathbf{A}^T \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=1}^T \mathbf{D}\mathbf{A}^{T-\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}_\tau + \sum_{\tau=1}^T \mathbf{D}\mathbf{A}^{T-\tau} \mathbf{C} \mathbf{z}_\tau \quad (30)$$

(30)を整理し、行列形式で表すと、次式を得る。

$$[\mathbf{DB} \ \mathbf{DAB} \ \dots \ \mathbf{DA}^{T-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_T \\ \mathbf{u}_{T-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{A}^T \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=1}^T \mathbf{D}\mathbf{A}^{T-\tau} \mathbf{C} \mathbf{z}_\tau \quad (31)$$

さて、システムが目標点可制御であるので、行列 $\mathbf{R}^*$ の階数は k である。すなわち、

20) 元のティンバーゲンの定理は、実際に、以下で述べるように、経済政策の静学理論である。

$$\text{rank } \mathbf{R}^* = k \quad (32)$$

ここで, $\mathbf{R}^* = [\mathbf{DB} \ \mathbf{DAB} \ \cdots \ \mathbf{DA}^{T-1}\mathbf{B}]$

換言すれば, 方程式(28)において, 所与の初期状態 $\mathbf{x}_0$ に対して, 制御変数系列, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_T$ が存在するために, この行列は, 階数 k をもたねばならない。 $T \geq n$ ならば, 明らかに, $\text{rank } \mathbf{R} = k$ は, $\text{rank } \mathbf{R}^* = k$ を意味する。もし, $T < n$ ならば, 行列 $\mathbf{DA}^h\mathbf{B}$ (ここで, $T \leq h \leq n-k$) は, ケーリー・ハミルトンの定理により, $\mathbf{DB}, \mathbf{DAB}, \cdots, \mathbf{DA}^{T-1}\mathbf{B}$ に一次従属である。したがって, $\text{rank } \mathbf{R}^* = k$ は, $\text{rank } \mathbf{R} = k$ を意味し, このように, $\text{rank } \mathbf{R} = k$ が成立すれば, システムは「目標点可制御」である。

(必要性) 目標点可制御であるとすれば, しかし, $\text{rank } \mathbf{R} = k$ が成立しないとする。後者は, 行列 $\mathbf{R}$ の若干の列ベクトルが他のベクトルに一次従属であることを意味し, n 次元実ユークリッド空間において次式を満足するようなベクトル $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ が存在する。

$$\boldsymbol{\eta}'\mathbf{R} = \boldsymbol{\eta}'[\mathbf{DB} \ \mathbf{DAB} \ \cdots \ \mathbf{DA}^{T-1}\mathbf{B}] = 0 \quad (33)$$

$$\mathbf{y}_T - \sum_{\tau=1}^T \mathbf{DA}^{T-\tau} \mathbf{Cz}_\tau = \boldsymbol{\eta} \quad \text{および} \quad \mathbf{x}_0 = 0 \quad \text{とすれば,}$$

そのとき, (32)を満たす制御系列は存在しないことになる。(33)の前から $\boldsymbol{\eta}'$ を掛けることによって, 次式を示すことができる。

$$\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\eta} = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 = 0 \quad (34)$$

これは, 明らかに, 仮定 $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ に矛盾することになる。これで, 定理の半分を証明したことになる。さらに残りの半分の証明を試みることにしよう。

ここで, 目標点可制御性と区別するために, $\mathbf{Q}_c$ に対する『状態』可制御性という用語を導入しよう。ことばの違いからわかるように, 状態可制御性は, 状態方程式(10)に対して定義されており, それに対して, 目標点可制御性は, むしろ, 目標制御方程式に対して定義されている。一般に, 状態可制御性は, 目標時点可制御性の必要でも, 十分条件でもない。しかしながら, 状態可制御性は, もし $k \times n$ 行列 $\mathbf{D}$ が, 一次独立, すなわち, $\text{rank } \mathbf{D} = k$ で, 状態可制御行列 $\mathbf{Q}_c$ がフルランク, すなわち, $\text{rank } \mathbf{Q}_c = n$ であり, かつそのときのみ, 直ちに, 目標点可制御性を意味することになる。これは, 次のように説明できる。 $\text{rank } \mathbf{D} = k$, $\text{rank } \mathbf{Q}_c = n$, および $\dim \mathbf{x} = n \geq k = \dim \mathbf{y}$ としよう。シルベスターの不等式²¹⁾より次を得る。

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathbf{DQ}_c &\leq \min \{ \text{rank } \mathbf{D}, \text{rank } \mathbf{Q}_c \} \\ &\leq \text{rank } \mathbf{D} = k \end{aligned} \quad (35)$$

状態可制御行列 $\mathbf{Q}_c$ がフルランク, n すなわち, $\text{rank } \mathbf{Q}_c = n$ であることを考慮すると,

$$\text{rank } \mathbf{D} \geq \text{rank } \mathbf{DQ}_c \quad (36)$$

となり, したがって, (34)と(36)から, $\text{rank } \mathbf{DQ}_c = k$ を得, これによって, 後半の証明

21) シルベスターの不等式は次のように表される。

行列 $\mathbf{A}(n \times m)$, $\mathbf{B}(m \times r)$, $\mathbf{C}(n \times r)$ とすると次のシルベスター (Sylvester) の不等式が成立する。

$$\text{rank } \mathbf{A} + \text{rank } \mathbf{B} - m \leq \text{rank } \mathbf{C} = \text{rank } \mathbf{AB} \leq \min \{ \text{rank } \mathbf{A}, \text{rank } \mathbf{B} \}$$

は完結する。

ここで、 $\text{rank } Q_c = n$ が成立しても、 $\text{rank } D = k$ の条件が付加されなければ、いつでも可制御性が目標点可制御性を意味するものではないことに注意すべきである。したがって、可制御性は、上記の仮定のもとでは必要であっても、十分条件ではない。この注目すべき結果は、目標点可制御性が、 $\text{rank } D = k (k \leq n)$ の数の大きさに拘らず、状態可制御行列 Q_c によってのみ決定されてしまう。これは、ティンバーゲンの結果と異なり、さらに Preston (1977b) においても次の系を導くことができる。

系 1

システム S が目標点可制御であるための必要十分条件は、次の条件が成立することである。

$$\text{rank } R^T = \text{rank} [DB \ DAB \ \cdots \ DA^{T-1}B] = k \quad (37)$$

ここで、 $T < n$: n は状態の次元数である。

これから、次に目標点可制御性のための動学カウント・ルールを見ることにしよう。

ルール 1 : (目標点可制御性の動学カウント・ルール)

動学政策モデル S は、もし時間付き手段変数（制御変数）の数が目標変数の数に等しいか、または超えているならば、すなわち、

$$k \leq mT \quad (38)$$

が成立していれば、目標点可制御である。

ルール 1 の場合、 $k \leq m$ であれば、すなわち、目標変数が時間なし手段変数の数より、等しいか、または大きくなれば、 $k \leq m$ では、 $T > 0$ に対して自然に成立する。しかし、 $k > m$ であっても、すなわち、目標変数が手段変数より多くても、 $[(k-m)/mT]$ が $(k-m)/m$ より大きければ、成立する。(ただし、 $[\]$ は、最小整数値を表す。) 最初の陳述は、明らかであるので、説明を省略し、第二のことをもっと明瞭に述べる必要があるだろう。第二番目は、たとえ目標変数が手段変数の数よりも多くても、望まれた時点 T が手段変数の数を超える数の不足分より大きければ、すなわち、 T が目標変数の数の不足分を補足する程十分長ければ、目標点可制御になる可能性があることを意味している。これは、前述した周知のティンバーゲン静学カウント・ルール（ティンバーゲン定理 2）に対して非常に驚くべき結果である。すなわち、システムが動学になったとき、ティンバーゲン（静学）カウント・ルールは、ただ単なる経済政策の存在の動学カウント・ルールの特殊な場合にすぎないことを意味している。この動学カウント・ルールは、ティンバーゲン定理 1 の一般化、あるいは経済政策の動学理論となるであろう。次にティンバーゲン定理 1 に対する特別な注意を払いながら、目標経路可制御性について議論してみよう。

4. 目標経路可制御性 (target path controllability)

政策当局に関心が深いのは、目標経路達成を満足するもう一つの重要な概念である目標経路可制御性である。これらの研究は、Aoki (1976)²²⁾、Myoken (1976) および Preston (1977b) によって研究されている。前にも述べたように、目標経路可制御性は、初期状態、制御系列、与件系列によって影響される。この事実を考慮に入れると、いつ政策行動とればよいのか、厳密に言うとは、初期状態をいつから設定し、制御系列や与件系列の長さをどの程度にとれば良いかについて、次の二つの概念を区別する。その一つは、Preston (1977b) も述べているように、経済政策の「政策先行」(policy lead)²³⁾、あるいは「政策期待」(policy anticipation) を考えることである。この「政策先行」を s としよう。この s は、目標経路政策原点 0 から s 期後方にあたることを意味する。Preston によると、次のように説明される。²⁴⁾

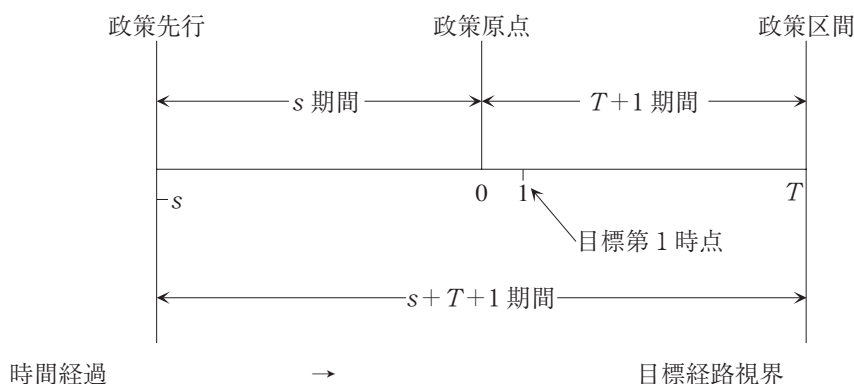


図2 目標経路可制御性と政策先行

政策先行を考えると、次の2つに分けて、目標可制御性を議論することができる。(i) 政策先行なし目標経路可制御性、(ii) 政策先行つき目標経路可制御性。このことを頭にとめて、この節の構成を述べると、まず第一に、目標経路制御性を定義する。第二に、(i) および(ii)の階数条件と動学カウント・ルールを示す。

22) Aoki (1974) は、目標経路可制御性を完全出力可制御性 (completely output controllability) と呼んだが、それは連続時間で述べられている。

23) この概念は、Preston (1977b) によって経済政策問題に導入された。この「政策先行」は、政策当局が目標経路目的を達成するための期待の程度を示すものである。

すなわち、目標経路軌道に達する最初の時点 Aoki (1974) は、目標経路可制御性を完全出力可制御性 (completely output controllability) と呼んだが、それは連続時間で述べられている。

24) この図は、Preston によるものであるが、幾つかの概念の名はすこし変更されている。

定義 5：（目標経路可制御性）

システム S は、もし指定された政策区間にわたって、望まれた目標経路に沿った目標系列を導く制御系列が存在すれば、システム S は目標経路可制御であると言う。

最初に、「政策先行なし目標経路可制御性」について述べよう。

定理 3：（政策先行なし目標経路可制御性）

システム S が政策先行なしの目標経路可制御であるための必要十分条件は、次の行列 $R_{0T}(kT \times mT)$ が次の条件、

$$\text{rank } R_{0T} = kT \quad (39)$$

ただし、

$$R_T = \begin{bmatrix} DB & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ DAB & DB & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ DA^{T-1}B & DA^{T-2}B & \cdots & \cdots & DB \end{bmatrix}$$

が初期状態 x_0 、制御変数系列 $u_1, u_2, \dots, u_T$ 、外生的与件変数行列、 $z_1, z_2, \dots, z_T$ 、および政策区間 T が与えられたとき、満たされることである。

証明) 初期状態 (10) (11) が任意の t での目標ベクトルについて解くならば、次を得る。

$$y_t = DA^t x_0 + \sum_{\tau=1}^t DA^{t-\tau} Bu_\tau + \sum_{\tau=1}^t DA^{t-\tau} Cz_\tau \quad (40)$$

時間 t を第 1 期から最終期である目標経路視界 T までシフトさせると、次を得る。

$$y_1 = DAx_0 + DBu_1 + DCz_1 \quad (41)$$

$$y_2 = DA^2x_0 + \sum_{\tau=1}^2 DA^{2-\tau} Bu_\tau + \sum_{\tau=1}^2 DA^{2-\tau} Cz_\tau \quad (42)$$

$$y_T = DA^T x_0 + \sum_{\tau=1}^T DA^{T-\tau} Bu_\tau + \sum_{\tau=1}^T DA^{T-\tau} Cz_\tau \quad (43)$$

これらの方程式群を行列ベクトル表示で整理し、表現すれば次式を得る。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^{T-1} \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} DB & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ DAB & DB & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ DA^{T-1}B & DA^{T-2}B & \cdots & \cdots & DB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} DC & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ DAC & DC & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ DA^{T-1}C & DA^{T-2}C & \cdots & \cdots & DC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_T \end{bmatrix} \quad (44)$$

両辺を整理すると、

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} DB & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ DAB & DB & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ DA^{T-1}B & DA^{T-2}B & \cdots & \cdots & DB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ DA^{T-1} \end{bmatrix} x_0 - \begin{bmatrix} DC & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ DAC & DC & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ DA^{T-1}C & DA^{T-2}C & \cdots & \cdots & DC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_T \end{bmatrix} \quad (45)
 \end{aligned}$$

ここでの問題は、望まれた目標変数系列 $\{y_1^*, y_2^*, \dots, y_T^*\}$ 、初期状態 x_0 、および外生的与件変数系列 $\{z_1, z_2, \dots, z_T\}$ が与えられたとき、制御変数系列が存在するかどうかである。これは、既知数 $\{y_1^*, y_2^*, \dots, y_T^*\}$ 、および $\{z_1, z_2, \dots, z_T\}$ が与えられたとき、未知数 $u_1, u_2, \dots, u_T$ をもった一次連立方程式の存在問題として解釈され得る。このシステムの一次連立方程式の一意解の階数条件を適用することができる。²⁵⁾ したがって、ただちに次を得る。

$$\text{rank } R_{0T} = kT$$

行列 R_{0T} の対角要素の行列をみると、同じ行列 $DB (k \times m)$ をもつ $u_1, u_2, \dots, u_T$ の制御系列が存在する。それゆえ、 R_{0T} の対角要素がゼロであるときでさえも、上記の条件は $\text{rank } DB = k$ が成立する限り、いまだ、成立する。この条件から次の系を得る。

系 2 :

システム S が政策先行なし目標経路可制御であるための必要十分条件は、次式が成立することである。

$$\text{rank } DB = k \quad (46)$$

つぎに政策先行なし目標経路可制御の動学カウント・ルールを導くことができる。

ルール 2 : (政策先行なし目標経路可制御性の動学カウント・ルール)

システム S は、時間つき手段変数の数が、時間つきの目標変数の数に等しいか、あるいは目標経路カウント・ルール

$$mT \geq kT \quad (47)$$

が満足されるときのみ、政策先行つきの目標経路可制御である。

25) これは次のように述べられる。任意のベクトル b (m -次元列ベクトル) に対して、 $\text{rank } A = l$ 、すなわち、 A が完全行階数であるかつ、またそのときのみ $Ax = b$ ($A : l \times m$ 行列) に対する一意解が存在する。

(47)から見られるように、ティンバーゲンの静学カウント・ルール、すなわち、 $m \geq k$ から、 $T > 0$ に対して、(47)が自動的に成立する。したがって、この状況下では、ティンバーゲンのカウント・ルールは、直接、動学カウント・ルールに応用される。

今度は、「政策先行つき目標経路可制御性」の階数条件とその動学カウント・ルールに目を向けよう。この場合、政策当局者は、政策目標経路原点 '0' から逆時間で 's' で与えられた初期状態 x_{-s} と、所与の手段変数系列、 $\{u_{-s+1}, u_{-s+2}, \dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_T\}$ 、および所与の与件変数系列 $\{z_{-s+1}, z_{-s+2}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_T\}$ を考慮することを前提とする。したがって、次の定理を得る。

定理 4：（政策先行付き目標経路可制御性の階数条件）

システム S が政策先行 's' つき目標経路可制御であるための必要十分条件は、次の目標経路可制御行列 $R_{sT}(kT \times n(s+T+1))$ が次式を満足させることである。

$$\text{rank } R_{sT} = kT \quad (48)$$

ただし、初期状態 x_{-s} と与件変数系列 $\{z_{-s+1}, z_{-s+2}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_T\}$ は所与とする。²⁶⁾

(48)の目標経路視界の t を $-s$ から T にシフトさせると、その結果は、次のような行列・ベクトル形式で書かれうる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} DA^{s+1} \\ DA^{s+2} \\ \vdots \\ DA^{s+T+1} \end{bmatrix} x_0 \\ &+ \begin{bmatrix} DA^s B & DA^{s-1} B & DA^{s-2} B & \cdots & DB & \cdots & 0 \\ DA^{s+1} B & DA^s B & DA^{s-1} B & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ M & M & M & \vdots & \cdots & \cdots & M \\ DA^{s+T+1} B & DA^{s+T} B & DA^{s+T-1} B & \cdots & \cdots & \cdots & DB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{-s+1} \\ u_{-s+2} \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} DA^s C & DA^{s-1} C & \cdots & DC & \cdots & 0 \\ DA^{s+1} C & DA^s C & \cdots & DAC & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ DA^{s+T} C & DA^{s+T-1} C & \cdots & \cdots & DC & 0 \\ DA^{s+T+1} C & DA^{s+T} C & \cdots & \cdots & DAC & DC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{-s+1} \\ z_{-s+2} \\ \vdots \\ z_{T-1} \\ z_T \end{bmatrix} \quad (49) \end{aligned}$$

前と同様にして、 $x_{-s}, z_{-s+1}, z_{-s+2}, \dots, z_T$ 、および $y_1, y_2, \dots, y_T$ によって、 $u_{-s+1}, u_{-s+2}, \dots, u_T$ に対するこの方程式を整理すると、連立一次線形方程式システムの存在の階数条件を使って上述した定理を得ることができる。 Q. E. D

この可制御性の動学カウント・ルールは次のように得られる。

26) 以下特に断らない限り、初期状態と与件系列は所与とする。

ルール 3：（政策先行つき目標可制御性の動学カウント・ルール）

システム S は、時間付き手段変数の数が、時間付きの目標変数と等しいか、または超えている、すなわち、次式が満たされる時のみ、政策先行 ' s ' と政策区間 ' T ' をもつ目標経路可制御である。

$$m(s+T+1) \geq kT \quad (50)$$

ここで、もし手段変数の数が目標変数の数に等しいか、または、超える場合、すなわち、 $m \geq k$ であれば、 $s > 0$ 、 $T > 0$ である限り、(50)は自動的に成立するけれども、上記の不等式は、たとえ、目標変数の数が、手段変数の数に等しいか、または超えるとき、 $m > k$ で、しかも、ルール 2 が成立しない時でさえ、成立する可能性を示している。前者は、明白であるので、後者を次に詳しく見ていくことにしよう。それには、二つの場合がある。(i)政策区間 ' T ' が固定され、政策先行 ' s ' が増加する場合、(ii)政策先行 ' s ' が固定され、政策区間 ' T ' が増加する場合である。

(i) の場合を考えよう。(50)から次の不等式が得られる。

$$s \geq \frac{(k-m)T}{m} - 1 \quad (51)$$

この不等式は、 $k > m$ に対して、政策先行 ' s ' は目標変数を超える手段変数の不足を補足するのに政策区間 ' T ' が十分長くさえあれば、目標経路可制御の可能性があることを意味する。

(ii) の場合を考えよう。(50)から次を得る。

$$T \leq \frac{m(s+k)}{(k-m)} \quad (52)$$

これは、与えられた政策先行 ' s ' に対して、政策当局は、一旦 k と m が固定されると、 $[m(s+k)/(k-m)]$ (ただし、 $[\]$ は前出の最小整数値を表す。) の限界を超えて政策計画視界 T を無限に引き延ばすことができないことを意味する。換言すれば、政策先行 ' s ' が $k < m$ に対して固定されると、最大政策計画視界 T に上限があることを示している。

このように、これらの結果は、システムが動学に成った場合、ティンバーゲンの静学カウント・ルールはもはや目標可制御であるかどうか、特に、目標点制御および政策先行付き目標経路可制御かどうかを判断するのに適用されない。いままで見てきたように、ティンバーゲン静学カウント・ルールと動学カウント・ルールを明示的に区別する2つの重要な可制御性に関するパラメータ、「政策区間」 ' T ' と「政策先行」 ' s ' が存在することに注意すべきである。もっとも動学経済政策の他の必要な要素は、初期条件であり、手段変数系列であり、かつ外生的与件系列が与えられることが前提となっている。それゆえ、動学経済政策存在問題を取り扱うとき、手段変数と目標変数の数と同時に、「政策先行」と「政策区間」のような経済政策の動学的要素も考慮に入れるべきであると結論できる。

次に、目標点可制御性と目標経路可制御性の関係を考えよう。これは次の系として述べられる。

系 3 :

目標点可制御性は、目標経路可制御性の必要条件であり、次の包含関係が成立する。

$$R \subset R_{sT} \quad \text{あるいは} \quad R \subset R_{0T} \quad \text{かつ} \quad R_{0T} \subset R_{sT}$$

これは、前の定理から明らかである。この式は、政策当局目標経路政策区間の中で、最初の目標点目的を達成することができなければ、もはや目標経路目的を達成することが決してできないことを意味する。これは、目標経路可制御性を確立するために、目標点可制御性の重要性を述べているもので、目標点可制御性は、政策先行 $s=0$ 、あるいは政策区間 $T=0$ のどちらかを仮定することによって得られる。しかし、両方が同時にゼロではないことを明記すべきである。それゆえ、目標点可制御性は目標経路可制御性の特殊な場合であると考えられる。

5. 計量政策状態空間モデルの最小実現の計算法

いままで動学的経済政策に関する可制御性と可観測性の重要性について述べてきた。ここで、当然、両性質を同時に満たす状態空間モデルを追求することになる。そのような状態空間モデルを得ることが、いわゆる「最小実現問題」(minimal realization problem)で、この節の最初に述べられた経済安定化政策において重要な役割を果たすものである。したがって、この節では、その実際的な数値的計算法を示してみよう。

ここでは、計量政策状態空間モデルの最小実現²⁷⁾のため、Mayneの方法(Mayne, 1968)を採用しよう。これは、計量モデルから状態空間モデルの最小実現への変換に最も適合しているように思われる。Mayneの方法において、状態空間モデルから最小実現を得る二つの択一的な方法が存在する。最初の一つは、次のようである。第1段階では、状態空間モデルの初期実現をえるために、計量モデルの最終型、あるいは伝達関数から非最小実現(可制御、あるいは可観測実現)に変換する。さらに、第2段階は、初期実現の可観測部分、あるいは可制御部分を求めるために行列演算を行い、我々の最終目的である最小実現を導出することである。もう一つの方法は、単に行列演算のみ必要とする方法である。すなわち、まず、不可制御・不可観測状態空間モデルから、一旦、可制御か、可観測システム²⁸⁾のどちらかの初期実現を得る。さらに、若干の行列演算を行うことによって、初期実現の可観測部分、あるいは可制御部分を得る。その結果得られる状態空間モデルが最小実現になっている。この二つの方法を比較すると、計算上の観点から、前者よりも後者のほうが、ただ単なる行列計算をするだけでなのですばやく結果が得られ、コンピュータ・プログラミングが容易でもある。他方、前者は、伝達関数は、行列計算と同様、伝達関数行

27) 計量モデルからの最小実現に関する研究は非常に少ない。Myoken & Uchida (1977b) はその貴重な貢献の1つである。

28) 状態空間モデルが可制御、あるいは可観測であれば、この手続きの次の段階は最小実現となろう。たとえ元のシステムがすでに最小実現であったとしても、Mayneの方法は状態空間モデルの構造を変更しない。

列も計算する必要があるので少し厄介である。したがって、Mayne が提示した最小実現の計算法の後者の手続きをとる。

ここでは、計量モデルから状態空間モデルを経て最小実現を導く過程を示すことにする。まず、ティンバーゲンの政策分類にしたがって、計量モデルは次の ARMAX 誘導型モデルで表すことができる。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}_t = & \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{y}}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{y}}_{t-2} + \cdots + \mathbf{A}_p \bar{\mathbf{y}}_{t-p} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_t + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_p \mathbf{u}_{t-p} \\ & + \mathbf{C}_0 \mathbf{z}_t + \mathbf{C}_1 \mathbf{z}_{t-1} + \cdots + \mathbf{C}_p \mathbf{z}_{t-p} + \mathbf{E}_0 \mathbf{e}_t + \mathbf{E}_1 \mathbf{e}_{t-1} + \cdots + \mathbf{E}_p \mathbf{e}_{t-p}\end{aligned}\quad (64)$$

ここで、

$\bar{\mathbf{y}}_{t-i}$: N 次元 i 時間遅れ内生変数ベクトル

$\mathbf{u}_{t-i}$: m 次元 i 時間遅れ制御変数ベクトル

$\mathbf{z}_{t-i}$: r 次元 i 時間遅れ与件変数ベクトル

$\mathbf{e}_{t-i}$: N 次元 i 時間遅れ非系列相関残差項ベクトル、ただし $N(0, \Sigma)$ に従うと仮定される

$\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ および $\mathbf{E}_i (i=1, 2, \dots, p)$: 推定済み定数行列

ここで、つぎのように内生変数が最初の $N-k$ 個の局外変数 $\mathbf{y}_{t-i}^R$ と残り k 個の目標変数 $\mathbf{y}_{t-i}$ から構成されると仮定したことを思い出そう。

$$\bar{\mathbf{y}}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-i}^R \\ \cdots \\ \mathbf{y}_{t-i} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N-k \\ \\ \} k \end{matrix}\quad (65)$$

次のように状態変数ベクトルを定義しよう。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{1t} &= \mathbf{B}_p \mathbf{u}_{t-p} + \mathbf{C}_p \mathbf{z}_{t-p} + \mathbf{E}_p \mathbf{e}_{t-p} \\ \mathbf{x}_{1t} &= \mathbf{x}_{1t-1} + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{2t-1} + \mathbf{B}_{p-1} \mathbf{u}_{t-p+1} + \mathbf{C}_{p-1} \mathbf{z}_{t-p+1} + \mathbf{E}_{p-1} \mathbf{e}_{t-p+1} \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_{pt} &= \mathbf{x}_{p-1t-1} + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{pt-1} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_t + \mathbf{C}_0 \mathbf{z}_t + \mathbf{E}_0 \mathbf{e}_t \\ \mathbf{y}_t &= [\mathbf{0} : \mathbf{I}] \mathbf{x}_{pt} \\ \mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{y}}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-i}^R \\ \cdots \\ \mathbf{y}_{t-i} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N-k \\ \\ \} k \end{matrix}\end{aligned}$$

このようにして、次のシステム S_2 を得る。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_t + \mathbf{C} \mathbf{z}_t + \mathbf{E} \mathbf{e}_t \quad (66)$$

S_2

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{D} \mathbf{x}_t \quad (67)$$

ここで

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1t} \\ \mathbf{x}_{2t} \\ \mathbf{x}_{3t} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{pt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_{p-1} \\ \mathbf{B}_{p-2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_p \\ C_{p-1} \\ C_{p-2} \\ \vdots \\ C_0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_p \\ E_{p-1} \\ E_{p-2} \\ \vdots \\ E_0 \end{bmatrix}, \quad D = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad I_k]$$

$I_k: k \times k$ 単位行列

ここで、 A は $N(p+1) \times N(p+1)$ 行列、 B は $N(p+1) \times m$ 、 C は $N(p+1) \times r$ 行列、 E は $N(p+1) \times N$ 行列、および $k \times N(p+1)$ 行列であり、変数ベクトル x_t, u_t, z_t, y_t 、および e_t はすべて前と同じである。

今、可観測行列 Q_0 を構築してみよう。

$$Q_0 = \begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & [0 \cdots I_k] \\ 0 & 0 & \cdots & [0 \cdots I_k] & * \\ \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & \vdots & \vdots \\ [0 \cdots I_k] & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad (68)$$

ここで、 $n = N(p+1)$ と仮定される。また、 $*$ は非ゼロ行列である。 $\text{rank } D = k$ であるので

$$\text{rank } Q_0 = n = N(p+1)$$

は明らかに成立する。したがって、このシステムは可観測である。次にこれが可制御であるかどうか確認してみよう。可制御行列は次のように構成される。

$$Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (n \times mn)$$

$$= \begin{bmatrix} B_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{p-1} & * & * & \cdots & * \\ B_{p-2} & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \quad * \text{は、非ゼロ要素行列} \quad (69)$$

このシステムが制御可能かどうかは、この可制御行列からは明らかではない。それは、可制御行列 Q_c の中の小行列である要素行列に依存している。この事実、一般に任意の計量モデルは、すべての内生変数が局外変数でない限りは、少なくとも可観測状態空間モデルに変換されうることを確認するものであるが、可制御性は明白ではない。換言すれば、これは、任意の計量モデルから、いつでも可観測状態空間モデルを構築できることを示している。このようにして、計量モデルは、一旦、可観測であることが確認されたならば、我々はそのシステム S_4 可制御部分を得るだけでよい。そのことによって、計量モデルの最小次元実現 (minimal realization) が得られる。したがって、計量モデルの最小実現問題は、次のように要約されう。

第一段階は、(66) と (67) のような可観測状態空間モデルを構成することである。さらに、第二段階では、Mayne の方法を使用してこの状態空間モデルから最小次元実現を得る。

したがって、いま可観測状態モデルの可制御部分を得ることだけを考えよう。

システム (A, B, C, D, E) の制御可能な部分空間の次元を n_c とせよ。

つぎのような n_c 個のベクトルを可制御行列 Q_c の部分行列 $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ から選択する。

$$b_1, Ab_1, \dots, A^{p_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, b_q, \dots, A^{p_q-1}b_q$$

これらのベクトルの選び方は、Mayne の方法 (Mayne, 1968) に記述されている。次にこの方法について見ることにしよう。初期実現を $R(A, B, D)$, R の可制御部分空間を X_c とせよ。したがって $\dim R = n \geq n_c = \dim X_c$ となる。行列 B が m 個列ベクトルからなっていると仮定せよ。

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$$

最小実現を得るための変換行列 S (あるいは V) の計算過程は次のように述べられる。

ステップ 1 : $s_1 = b_1$ とおく。

ステップ 2 : a. As_i が $s_1, s_2, \dots, s_i$ と一次独立ならば $s_{i+1} = As_i$ と設定し、ステップ 7 に進める。

b. As_i が $s_1, s_2, \dots, s_i$ と一次従属ならば、ステップ 3 に進める。

ステップ 3 : $s_i = A^{p_q-1}b_q$ と置き、 i を q^* に s_i を s_{q^*} にそれぞれ置き換える。

ステップ 4 : $As_q = A^{p_q-1}b_q = \sum_{i=1}^{q^*} \alpha_{qi}s_i$ が満足されるような一次独立な列ベクトル $s_1, s_2, \dots$,

s_q の係数 $\alpha_{q1}, \dots, \alpha_{qq^*}$ 決定せよ。ただし、 p_q は、 $A^{p_q}b_q$ が $s_1, s_2, \dots, s_q$ と一次従属であり、 $q^* = p_1 + p_2 + \dots + p_q$ であるような最小整数である。

ステップ 5 : $s_{q^*+1} = b_j$ とせよ。ただし、 b_j は、 $s_1, s_2, \dots, s_{q^*}$ の一次独立な集合 $b_{q+1}, \dots, b_m$ 中の最初のベクトルである。

ステップ 6 : b_j が b_{q+1} になる (u_{jt} が u_{q+1t} になる) ように $b_{q+1}, \dots, b_m$ (およびそれに対応した u_i) の並び変えよ。(s_{q^*+1} が前に廃棄されたならば、 s_{q^*+1} の候補として $b_{q+1}, \dots, b_m$ の要素のセットからのベクトルをチェックする必要はない。)

ステップ 7 : さらにもうこれ以上独立なベクトルが見つからない時この手続きを終了する。すなわち、 $i = n_c$ のとき $S = [S_1, S_2, \dots, S_q, \dots, S_t]$ ($n \times n_c$)

$$\text{ここで, } S_q = [s_{(q-1)^*+1}, \dots, s_q] = [b_q, \dots, A^{p_q-1}b_q]$$

さらに、 t は、 S 構築のために使用された B の列ベクトルの数である。

$$t^* = p_1 + p_2 + \dots + p_t = n_c, \quad 0^* = 0$$

さらに独立なベクトルが存在するならば、ステップ 2. a に進めよ。

今、次の式

$$V_c S_c = I_{nc}^{29} \quad (70)$$

29) 同様に、前述された行列の構成において b_i を d_i に、 A を A' に置き換えることによってこれらのベクトルを得ることができる。

を満たすような行列

$$S_c = [b_1 A b_1, \dots, A^{pq-1} b_q] \quad (71)$$

を定義せよ。

もし(71)を満たすような行列 $V_c(n \times n_c)$ を見つけることができるならば、元のシステム $S_2(A, B, C, D, E)$ の可制御部分 $(A_c, B_c, C_c, D_c, E_c)$ を得ることができる。新システムは次の行列変換で与えられる。

$$\begin{aligned} A_c &= V_c A S_c \quad (n_c \times n_c) \\ B_c &= V_c B \quad (n_c \times n) \\ C_c &= V_c C \quad (n_c \times r) \\ D_c &= D S_c \quad (k \times n_c) \\ E_c &= V_c E \quad (n_c \times n_c) \end{aligned} \quad (72)$$

ここでは、 n_c は最小状態次元である。

このようにして、初期実現として、可観測状態空間モデルを得ることができるけれども、若干の計量モデルでは、初期実現として、可制御状態空間モデルの構築のほうが可観測状態空間モデルよりも容易である。

次に可制御状態モデルの構築を考えることにしよう。システム $S_2(A, B, C, D, E)$ 可制御で、可観測行列 $Q = [D' \ A'D' \ \dots \ (A')^{n-1}D']$ が階数 $n_0 \leq n$ を持つ、すなわち、 $\text{rank } Q_0 = n_0$ と仮定しよう。前と同様に、 Q_0 の部分行列から、 n_0 個の一次独立な行ベクトル $d_1, A'd_1, \dots, Ad_2, \dots, (A')^{ps-1}d_s$ を選ぶことができる。ここで、次のように V_0 を定義しよう。

$$V_0 = [d_1, A'd_1, \dots, d_2, \dots, (A')^{ps-1}d_s] \quad (n \times n_0) \quad (73)$$

ここで、 $D' = [d_1, d_2, \dots, d_s] \quad (n_0 \times n)$

したがって、次式を満たすような行列 $S_0(n \times n_0)$ を決定することができる。

$$V_0 S_0 = I_{n_0} \quad (n_0 \times n_0) \quad (74)$$

それゆえ、このシステムの最小実現は、次のようになる。

$$\begin{aligned} A_0 &= V_0 A S_0 \quad (n_0 \times n_0) \\ B_0 &= V_0 B \quad (n_0 \times n) \\ C_0 &= V_0 C \quad (n_0 \times r) \\ D_0 &= D S_0 \quad (k \times n_0) \\ E_0 &= V_0 E \quad (n_0 \times n_0) \end{aligned} \quad (75)$$

ここでは、 n_0 は最小実現次元である。

このように、システム $(A_c, B_c, C_c, D_c, E_c)$ とシステム $(A_0, B_0, C_0, D_0, E_0)$ は、ともに可制御で可観測であることがわかる。もし初期実現が可制御でも可観測でもなければ、上記のような行列演算を交互に繰り返すことによって最小実現を得ることができる。

この計算手続きは、次のダイアグラムによって示される。

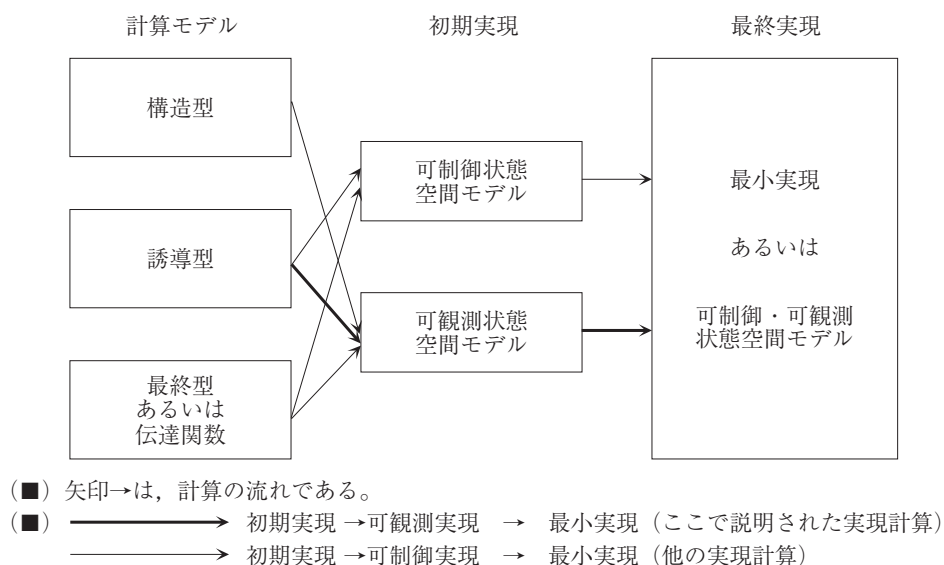


図7 Mayne による計量政策モデルの最小実現

初期実現は、必ずしも可制御でも可観測でもない場合があることに注意しなければならない。最終的には、状態空間表現による政策モデルの最小実現化は上記で示される手続きが容易である。何故なら誘導型はすでに政策変数を含めた外生変数によって、目標変数を含めた内生変数を説明している方程式であるので、可観測性は、目標変数選択行列 D の階数が目標変数の数に一致すれば、必ず保証されるからである。

6. 結 論

本論文では、状態空間モデルで表現された政策モデルの政策可制御性の理論的基礎を展開した。そこでは、Tinbergen 以来の目標と手段数の静学的関係が、動学的モデルを取り扱う現実的な動学的可制御性として取り扱われなければならないことが「目標経路可制御性」の概念で包括的にとらえることを示した。また、そのような「政策可制御性」と統計学でのモデリングの基本的概念である「ケチの原理 (principle of parsimony)」を同時実現する、計量政策モデルの最小実現モデルの導出を示した。今後の課題として、第一に、展開された理論的基礎に実際の推定された計量モデルを使用して計算すること、第二に、非線形な計量状態空間モデルの政策可制御性に拡張することが残されている。

参 考 文 献

- [1] Aoki, M. (1973) "On Sufficient Condition for Optimal Stabilization Policies," *Review of Economic Studies*, Vol. 40, No. 121, pp. 131-138.
- [2] Aoki, M. (1975) "On a Generalization of Tinbergen's Condition in the Theory of Policy to Dynamic Models," *Review of Economic Studies*, Vol. 4, No. 2, pp. 293-296.

- [3] Bray, J. (1974) "Predictive Control of a Stochastic Model of the UK Economy Simulating Present Policy Making Practice by the UK Government", *Annals of Economic and Social Measurement*, Vol. 3, No. 1, pp. 239-56.
- [4] Caines, P.E. & K.D. Wall (1975) "Theoretical Foundations for Methods of Estimation and Control in Economic Policy Optimization", in *Modelling the Economy*, ed. by G.A. Renton, Heinemann Educational Books, London, pp. 353-397.
- [5] Chow, G.C. (1974) *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*, John Wiley & Sons, New York.
- [6] Chow, G.C. (1981) *Econometric Analysis by Control Methods*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] 藤本利躬 (1999) 『経済政策とインプリメンテーション』—フリッシュ研究— お茶の水書房
- [8] Goldberger, G.S. (1959) *Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein-Goldberger Model*, North-Holland Pub Co., Amsterdam.
- [9] Hannan, E.J. (1976) "The Identification and Parametrization of ARMAX and State Space Forms", *Econometrica*, Vol. 44, No. 4, pp. 713-723.
- [10] Hansen, B. (1958) *The Economic Theory of Fiscal Policy*, translated by P.E. Burke, George Allen & Unwin Ltd., London.
- [11] Hansen, B. (1971) *Lectures in Economic Theory*, Studentlitteratur, Lund.
- [12] Ho, B.L. & R.E. Kalman (1966) "Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Functions", *Regelungstechnik*, Vol. 12, No. 14, pp. 545-592.
- [13] 伊藤幸雄 (1974) 「マクロ経済政策モデルにおける確率最適制御」 修士論文 名古屋市立大学 3月
- [14] Ito, Y. (1983) "Controllability and Stabilization Policies of Dynamic Economic Systems" Doctor Thesis, University of Sussex, February 1983.
- [15] Kmenta, J. (1971) *Elements of Econometrics*, Macmillan Co., New York.
- [16] Kalman, R.E. (1963) "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems", *Journal of SIAM Control*, Ser. A, Vol. 1, No. 2, pp. 596-600.
- [17] Mayne, D.Q. (1968) "Computational procedure for the minimal realisation of transfer-function matrices," *Proc. IEE*, Vol. 115, no. 9, pp. 1363-1368.
- [18] Myoken, H. (1976) "A Dynamical Existence Problem of Macroeconomic Model", *International Journal of Systems Science*, Vol. 6, No. 6, pp. 501-511.
- [19] Myoken, H. (1980) *Dynamic Structure, Optimal Control and Stabilization in Multivariable Economic Systems, Research Program on Decision and Control of Socio-economic Systems*, Ser. 4, Bunshindo Pub. Co. Ltd., Tokyo.
- [20] Myoken, H. & Y. Uchida (1977b) "A Minimal Canonical form Realization for a Multivariable Economic Systems," *International Journal of Systems Science*, Vol. 8, No. 7, pp. 801-811.
- [21] Pindyck, R.S. (1973) *Optimal Planning for Economic Stabilization: The application of control theory to stabilization policy*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam.
- [22] Preston, A.J. (1974) "A Dynamic Generalization of Tinbergen's Theory of Policy," *Review of Economic Studies*, Vol. 41 (1), N. 125, pp. 65-74.
- [23] Preston, A.J. (1977a) "Policy Objectives and Instrument Requirements for A Dynamic

- Theory of Policy,” in *Application of Control Theory to Economic Analysis*, ed. by Pitchford & S.J. Turnovsky, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, pp.255-292.
- [24] Preston, A.J. (1977b) “Existence, Uniqueness, and Stability of Linear Optimal Stibilisation Policies,” in *Application of Control Theory to Economic Analysis*, ed. by Pitchford & S.J. Turnovsky, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, pp.255-292.
- [25] Roberts, D.M. (1969) “A Computer Program for the Minimal Realization of Transfer Function matrices”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-16, No. 3 , pp.227-233.
- [26] Tinbergen, J. (1952) *On the Theory of Economi Policy*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam.
- [27] Uchida Y. & H. Myoken (1978) “A Comparison of Optimal Control Policies based on Two State-Space Representations”, in *Optimal Control Systems, Decision Structures, and Economic Applications, Research Program on Decision and Control Socio-economic Systems*, Ser.2, ed. by H. Myoken, Bunshindo Pub. Co. Ltd., Tokyo, pp.61-79.