

## 本来のラムゼイモデルと限界 $q$

松 田 年 弘

### 1. はじめに

ラムゼイが1928年に発表した論文「A Mathematical Theory of Saving」は、「所得のうち、いくらを貯蓄（投資）に回すべきか」という異時点間の最適な資源配分を扱ったものである。ラムゼイの論文は第二次世界大戦後に経済学者の注目をあび、新古典派の経済成長理論の原型を与えたことはよく知られている。一方、トービンの名前を冠する  $q$  理論は1969年の「A General Equilibrium Approach to Monetary Theory」において登場し、資産選択理論のフレームワークの中で「投資率—投資家が資本ストックを増加させようとする速度—は  $q$ 、すなわち資本の市場価格と資本財の再取得費用の比率に関係していなければならない」と主張されている。そして、短期では  $q$  は1よりも大きかったり小さかったりする場合も生じるが、資本ストックの調整により、長期均衡成長において  $q$  は1になると考察されている。

基礎とする理論的フレームワークを異とする二つの論文であるが、トービンの  $q$  理論と同時期に投資の調整費用を導入した投資理論がLucas (1967) 等によって提唱されており、やがてAbelの研究等を経て、 $q$  理論が投資調整費用を考慮した異時点間の資源最適配分というフレームワークから導出できることがHayashi (1982) によって明らかになった<sup>1)</sup>。もっとも、新古典派のアプローチにおいて投資を決定するのは、今期の資本ストック量および「限界  $q$ 」であり、限界  $q$  は「各期限界収益の割引現在価値と再取得価格の比」と一般に定義される。なお、Hayashi (1982) は、限界  $q$  と観測可能な平均  $q$  が一致する条件、すなわち生産関数と投資調整関数が一次同次であるという条件も得ている。

Ramsey (1928) のモデルは幾つかの仮定をおいて展開されるが、ラムゼイ本人が「将来の効用を過去の効用と比較評価するにあたって割り引かないこと」を特に強調すべきポイントとしてあげている<sup>2)</sup>。すなわち、時間選好率ゼロの仮定である。しかし、その後にCass (1965) 等がラムゼイモデルを「洗練」して今日の標準的なラムゼイモデル（以下、標準ラムゼイモデル）を作り上げたが、そこでは政治上の現実主義的観点から「将来の効用を正の率で割り引く」、つまり時間選好率は正と仮定された。

標準ラムゼイモデルは、いまや異時点間の最適な資源配分を考慮した経済成長理論の多くのテキストにおいて重視されている。とりわけ、齊藤 (1996) は標準ラムゼイモデルを縦横に活用して、モデルから帰結できる経済学上のインプリケーションを多く示すことに成功している。齊藤 (1996) は標準ラムゼイモデルの限界  $q$  についても、中央計画モデルという条件のもと、その値が1に等しいことを導いている。

本論文は、本来のラムゼイモデル (Ramsey, 1928) が時間選好率ゼロの仮定を設けていることに

1) ただし、トービンは新古典派による  $q$  理論の解釈と一線を画している (Tobin & Brainard, 1990)。

2) ラムゼイは「(割引は) 倫理的に擁護できず、単に想像力の弱さから生じる習慣である」と述べている。

触発され、投資調整費用を仮定しない新古典派の成長理論において、限界  $q$  と時間選好率あるいは利子率の関係を考察するものである。第2章では、ある恒等式を用いて、標準ラムゼイモデルに代表される新古典派の経済成長理論において、形式的な限界  $q$  が1と一致する条件を厳密に検討する。この条件から、利子率が長期的にゼロに収束する場合、形式的な限界  $q$  は必ずしも1とならないことがわかる。第3章では、第4章以降の内容が無限計画期間の横断性条件と関連するので、横断性条件の必要性と由来について既存の知見を整理する。第4章においては、時間選好率をゼロとする本来のラムゼイモデル、すなわち利子率が長期的にゼロに収束するモデルにおける形式的な限界  $q$  を実際に計算する。

## 2. 標準ラムゼイモデルにおいて限界 $q$ が1と一致する条件

本章では、標準ラムゼイモデルにおける限界  $q$  を表現し、この値が1と一致する条件を厳密に求める。まず、齊藤（1996）に準拠して、離散変数の標準ラムゼイモデルを次のように定める。時間選好率を  $\rho$ 、 $t$  期の資本ストックを  $k_t$ 、消費量を  $c_t$ 、固定資本減耗率を  $\delta$ 、 $t$  期の財の価格  $p_t$ 、資本のレンタル料を  $R_t$ 、実質利子率を  $r_t$ 、 $k_t$  をインプット変数とする生産関数を  $f(\bullet)$ 、 $c_t$  をインプット変数とする効用関数を  $U(\bullet)$  と表記する。生産された財は投資財にも消費財にも利用できると仮定する。そして、代表的個人が生産された財の一部を投資に回しつつ、現在から無限の将来にわたるまでの効用の現在価値を最大化するという問題（中央計画モデル）の解を考える。このとき、各期限界収益の割引現在価値は、

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_t(f'(k_{t+i}) - \delta)}{(1+r_{t+i})(1+r_{t+i-1}) \cdots (1+r_t)}$$

で表され、これを再取得価格で除した値、

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f'(k_{t+i}) - \delta)}{(1+r_{t+i})(1+r_{t+i-1}) \cdots (1+r_t)}$$

が  $t$  期の限界  $q$  に相当する。齊藤（1996）は、標準ラムゼイモデルにおける均衡過程（解が定常状態に収束する過程）では（1）の値が1になることを正当に証明しているが、本論文では（1）の値が1になる必要十分条件を検討する。

本モデルでは投資調整費用の存在を仮定しないので、企業の利潤最大化の一階条件から、企業の資本のレンタルプライスは資本の限界生産物に等しいという簡単な式が成立する。

$$(2) \quad R_t = f'(k_{t-1})$$

また、実質利子率はレンタルプライスから減価償却率を引いた値に相当するとみなす。

$$(3) \quad r_t = R_t - \delta$$

（1）式に（2）と（3）を代入すると、 $t$  期の限界  $q$  は（4）式で与えられる。

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_{t+i}}{(1+r_{t+i})(1+r_{t+i-1}) \cdots (1+r_t)}$$

（4）式の値を計算するには、次に示す我々の補題が有用である。

**補題** 次の恒等式が任意の  $a_i$  と任意の  $x_i$  について成立する。

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} x_k}{(a_1 + x_1)(a_2 + x_2) \cdots (a_k + x_k)} = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + x_i}$$

補題は直接計算あるいは帰納法によって証明することができる。特に  $x_i = x$  とおくと、任意の  $a_i$  と任意の  $x$  について (5) の恒等式が成立する。(5) の恒等式は数論の研究で現れたことがある。

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} x}{(a_1 + x)(a_2 + x) \cdots (a_k + x)} = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + x}$$

また、特に  $a_i = 1$  とおくと、任意の  $x_i$  について (6) の恒等式が成立する。

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k)} = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i}$$

(6) の恒等式から、補題の系が直ちに導かれる<sup>3)</sup>。

補題の系  $n \rightarrow +\infty$  において、 $\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \rightarrow \infty$  を必要十分条件として次式が成立する。

$$\frac{x_1}{1 + x_1} + \frac{x_2}{(1 + x_1)(1 + x_2)} + \frac{x_3}{(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)} + \cdots + \frac{x_n}{(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n)} + \cdots = 1$$

補題の系から、本モデルにおいて、限界  $q$  が 1 に一致する必要十分条件は  $\prod_{i=1}^n (1 + r_{t+i}) \rightarrow \infty$  であることがわかる。標準ラムゼイモデルでは、均衡過程において実質利子率  $r_t$  は時間選好率  $\rho$  に収束するので、 $\rho$  が正の値である時、 $\prod_{i=1}^n (1 + r_{t+i}) \rightarrow \infty$  は確かに成立する。

次に、連続変数の標準ラムゼイモデルを検討する。離散変数の場合の (4) 式に対応して、 $t_1$  期における限界  $q$  は (7) 式になる。

$$(7) \quad \int_{t_1}^{\infty} \left[ r(t) \exp\left(-\int_{t_1}^t r(s) ds\right) \right] dt$$

この積分は、 $\int_{t_1}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} \left[ -\exp\left(-\int_{t_1}^t r(s) ds\right) \right] \right) dt$  に等しいので、(8) 式が  $t_1$  時点の限界  $q$  を与える。

$$(8) \quad \left[ -\exp\left(-\int_{t_1}^t r(s) ds\right) \right]_{t_1}^{\infty} = 1 - \exp\left(-\int_{t_1}^{\infty} r(s) ds\right)$$

従って、限界  $q$  が 1 に一致する必要十分条件は  $\int_{t_1}^{\infty} r(t) dt \rightarrow \infty$  であることがわかる。やはり、標準ラムゼイモデルでは、均衡過程において実質利子率  $r(t)$  は時間選好率  $\rho$  に収束するので、 $\rho$  が正の値である時、 $\int_{t_1}^{\infty} r(t) dt \rightarrow \infty$  は確かに成立する。それでは、 $r(t)$  がゼロに収束する場合、すなわち時間選好率がゼロの場合、(8) 式の値はどうなるのであろうか。この場合、限界  $q$  はもはや自明ではなくなり、具体的な均衡過程に基づいて計算をおこなわなければならない。その一つの例として、第4章で我々は本来のラムゼイモデルにおける限界  $q$  を計算する。

3) これらの補題は無限和と無限積の変換等にも応用できる。例えば、自然対数の底  $e$  について、

$$e = 3 - \left[ \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{7}{8} \frac{34}{35} \frac{203}{204} \cdots \right] \text{ という無限積表示が得られる。}$$

### 3. 無限計画期間の横断性条件について

標準ラムゼイモデルにおいても本来のラムゼイモデルにおいても、無限計画期間の広義積分を最大化する消費関数（汎関数の極値を与える関数）を得ることを目的としている。最適制御理論（Theory of Optimal Processes）が与える一連の必要条件には、いわゆる「横断性条件（transversality condition）」が含まれるが、最適制御理論の創始者のポントリャーギン（1962）が与えた定理の殆どは有限期間を扱っているため、無限計画期間の問題について横断性条件が必要であるかどうかについて、多くの研究がなされてきた<sup>4)</sup>。なお、横断性条件とは「汎関数の極値を与える関数が終点において満たすべき条件」と一般には解釈されており、以下の二種類の横断性条件が有限計画期間における最適制御理論の結果から成立すると類推されてきた。ここで、 $H(t)$ は最適制御理論を適用する時に導入されるハミルトニアン（Hamiltonian）、 $\lambda(t)$ はハミルトニアンを構成する共役状態変数を示している。 $\rho$ は時間選好率である。

- (A)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$ （現在価値ハミルトニアンでは、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\rho t) \bar{\lambda}(t) = 0$ ）  
 (B)  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$ （現在価値ハミルトニアンでは、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\rho t) \bar{H}(t) = 0$ ）

ただし、これら二種類の条件が何故に「横断性」と呼ばれるのかについては、直観的には明らかではない。変分法（calculus of variations）の歴史をふりかえると、ベルヌーイなどが論じた当初の変分問題は初期条件と終点条件がそれぞれ固定点で与えられていたが、やがて、それらが固定域（時間的に変化しない多様体）で与えられる変分問題がラグランジュ等により考察されるようになった。そして、クネーザー（Kneser, 1900）によって、汎関数の極値を与える曲線（停留曲線）が固定域と交わる（横断する）時に満たすべき条件として一般的な横断性条件が得られた。変分法の形でその結果を記述すると、関数  $G$  を  $G(x, y, kx', ky') = kG(x, y, x', y')$  という同次性を満たす関数として、

$$(9) \quad \int_{s_0}^{s_1} G(x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds$$

(9) の極値を求める問題を考える。固定域が曲線  $r(x_1, y_1) = 0$  で与えられ、点  $P$  で停留曲線がこの曲線と交わる場合、 $\delta x_1$  と  $\delta y_1$  を曲線  $r(x_1, y_1) = 0$  の点  $P$  における微分とすると、

$$(10) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x'} G(x, y, x', y') \delta x_1 + \frac{\partial}{\partial y'} G(x, y, x', y') \delta y_1 \right]_P = 0$$

という横断性条件が成立する。これは一種の直交条件であると解釈できる<sup>5)</sup>。

$G(x, y, x', y') = x' G(x, y, 1, \frac{dy}{dx}) = x' g(x, y, \frac{dy}{dx})$  と表記すると、古来の慣習から  $\frac{dy}{dx} = p$  とおいて、

$$\frac{\partial G}{\partial x'} = g - p \frac{\partial g}{\partial p}, \quad \frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{\partial g}{\partial p}$$

4) ポントリャーギンが無限期間を扱っているのは、邦訳「最適制御の数学的理論」の第4章「いろいろな問題」の24節のみであり、状態変数が有限の極限値をとるという制約付きの無限計画期間の広義積分を論じている。

5) Gauss の測地線に関する定理を変分法の原理に拡張することを試みる Kneser (1900) において、直交条件は重要である。Kneser (1900) は Goldstine (1980) が詳しい。ポントリャーギンの最適制御理論においても、共役状態変数のベクトルが固定域を与える多様体の接平面と直交することが横断性条件であると定義される。

となり, 更に  $\frac{\partial r}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} \delta y_1 = 0$  から, (10) 式は以下のように表現できる。

$$(11) \quad \left[ g \frac{\partial r}{\partial y_1} - \frac{\partial g}{\partial p} \left( p \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) \right]_p = 0$$

経済学で最適制御法が適用される典型的な問題は (12) の形をしている。

$$(12) \quad \begin{aligned} & \text{Max} \int_{t_0}^{t_1} F(t, z(t), u(t)) dt \\ & \text{s.t.} \quad \frac{dz}{dt} = f(z, u, t) \end{aligned}$$

(12) に対応するハミルトニアンは,  $H \equiv F(t, z(t), u(t)) + \lambda(t)f(z, u, t)$  で与えられ, 一階の条件から,

$$(13) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

が得られる。制約条件を  $u(t)$  について解いた  $u = h(t, z, z')$  を被積分関数に代入すると,

$$(14) \quad \int_{t_0}^{t_1} F(t, z(t), h(t, z, z')) dt$$

になる。ここで,  $t = s = x(s)$ ,  $z(t) = y(s)$  と対応させ,  $x'(s) = 1$  に留意すると,

$g(x, y, \frac{dy}{dx}) = F(t, z, h(t, z, z'))$  とおくことで (14) 式は (9) 式の形になる。この時,

$u = h(t, z, f)$  を  $u$  で偏微分することにより, (15) 式が成り立つ。

$$(15) \quad \frac{\partial h}{\partial z'} \frac{\partial f}{\partial u} = 1$$

$F(t, z, h(t, z, z'))$  を  $z'$  で偏微分することにより, (16) 式が成り立つ。

$$(16) \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial z'}$$

第一に, 固定域が曲線  $r(x_1, y_1) = t_1 - T = 0$  (固定時刻問題) の横断性条件を求める。(11) 式から, 横断性条件は (17) 式で与えられる。

$$(17) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial z'} \right]_{t=t_1} = 0$$

(13) 式および (15) 式を (17) 式に代入すると, (A) 式の有限期間に対応する  $\lambda(t_1) = 0$  が得られる。

第二に, 固定域が曲線  $r(x_1, y_1) = z_1 - \bar{Z} = 0$  (固定終点問題) の横断性条件を求める。(11) 式から, 横断性条件は (18) 式で与えられる。

$$(18) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{F}{z'} \right]_{t=t_1} = 0$$

(13) 式, (15) 式および (16) 式を (18) 式に代入すると, (B) 式の有限期間に対応する  $H(t_1) = 0$  が得られる。

離散変数の場合については, Weitzman (1973) が, (1) 時間選好率が正, (2) 目的汎関数の広義積分が得られる場合については, 無限計画期間の問題について横断性条件が必要であることを証明した。ただし, Weitzman (1973) によると, Peleg (1970) が彼と異なる証明を既に与えており, それと独立に証明を与えたことになる。連続変数については, Michel (1982) は時間選好率が正と

いう仮定のもと、(B) の横断性条件が必要なことを証明した。(A) の横断性条件については、Benveniste & Scheinkman (1982) が一定の条件のもとでそれが必要なことを示し、近年でも更に一般的な条件を目指して研究が進められている。また、無限計画期間を扱う経済学の問題においては、横断性条件 (A) を数学的に厳密に要求する論法をとらず、「簡単な経済的解釈を用いて、 $t \rightarrow \infty$  のときの終点状態を決定することになる (チャン, 2006)」, つまり実質的には横断性条件 (A) に同値な経済学的な条件のもとで解を得るというアプローチがとられることがある。

#### 4. 本来のラムゼイモデルにおける限界 $q$

本章では、連続変数の本来のラムゼイモデルにおける限界  $q$  を均衡過程に基づいて計算する。時間選好率がゼロであるため、標準ラムゼイモデルのように無限計画期間における効用最大加問題を考察すると、広義積分が発散するケースが出てくる。この困難に対し、Ramsey (1928) は効用の至福点 (Bliss) からの乖離を最小にするように問題を設定した。これが「ラムゼイの工夫 (The Ramsey Device)」であり、(19) の最大化問題の一階の条件は、標準ラムゼイモデルにおける効用最大化の一階の条件と本質的に同一である。

$$(19) \quad \begin{aligned} & \text{Max} \int_0^{\infty} (U(c(t)) - U(\hat{c})) dt \\ & \text{s.t.} \quad \frac{dk}{dt} = f(k) - c(t) - \delta k(t) \end{aligned}$$

なお、 $t$  時点の資本ストックを  $k(t)$ 、消費量を  $c(t)$ 、効用の至福点における消費量を  $\hat{c}$ 、固定資本減耗率を  $\delta$ 、実質利子率を  $r(t)$ 、 $k(t)$  をインプット変数とする生産関数を  $f(\bullet)$ 、 $c(t)$  をインプット変数とする効用関数を  $U(\bullet)$  と表記する。

(19) に対応するハミルトニアンは、 $H \equiv (U(c(t)) - U(\hat{c})) + \lambda(t)(f(k) - c(t) - \delta k(t))$  で与えられ、一階の条件は (20) の通りである。なお、本来のラムゼイモデルは、横断性条件 (A)  $\lambda(\infty) = 0$  が成立しない典型例の一つであり、横断性条件 (B)  $H(\infty) = 0$  のみが成立する。

$$(20) \quad \begin{aligned} & U'(c(t)) - \lambda(t) = 0 \\ & \lambda(t)(f'(k) - \delta) = -\lambda'(t) \end{aligned}$$

実質利子率は第2章で考察したように、資本の限界生産物 (資本のレンタルプライス) から減価償却率を引いた値に相当するとみなす。

$$r_t = f'(k(t)) - \delta$$

すると、(20) の第二式から、

$$\int_{t_1}^{\infty} r(t) dt = \int_{t_1}^{\infty} (f'(k(t)) - \delta) dt = \int_{t_1}^{\infty} \left( -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \right) dt = [-\ln(\lambda(t))]_{t_1}^{\infty}$$

となり、(8) 式で与えられる  $t_1$  時点の限界  $q$  を求めると、

$$(21) \quad 1 - \exp[\ln(\lambda(\infty)) - \ln(\lambda(t_1))]$$

となる。特に、一次同次の生産関数を  $F(K, N)$  とおき ( $K$  は資本,  $N$  は労働人口), 代表的個人モデルの生産量を  $f(k) = F(k, 1)$  とおくと, Shell (1968) によつて  $U(\bullet)$  が恒等関数の場合に  $\lambda(\infty) = 1$  が成立することが示されている。また, 生産関数を  $f(k) = k^\alpha$  と特定化すると, 資本ストックの定

常状態を  $\hat{k}$  と表記すれば,  $\hat{c} = (\hat{k})^\alpha - \delta\hat{k}$  かつ  $\alpha(\hat{k})^{\alpha-1} = \delta$  であり, (20) の第一式から,

$$\lambda(\infty) = U^{-1} \left( (\delta/\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \delta(\delta/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)$$

となる。いずれの場合も, (21) 式から  $t_1$  時点の限界  $q$  は 1 を下回ることがわかる。

## 5. おわりに

時間選好率がゼロ, もしくは利子率がゼロに収束する時, 「各期限界収益の割引現在価値」で定義される限界  $q$  は, 中央計画モデルのもとで投資調整費用が存在しない場合においても, それが 1 に一致しないことを我々は示した。ところで, 新古典派の偉大な経済学者は, 利子率がゼロに収束するケースの限界  $q$  をどのように回避していたのであろうか。もちろん, 時間選好率を正にとり, もしくは利子率が正の値に収束すると仮定すれば, 限界  $q$  の計算に問題は生じない。しかし, Abel (1980) や Hayashi (1982) 等は更に注意深く限界  $q$  を定義している。彼らは, 利潤を最大化する投資関数を得る問題における現在価値ハミルトニアンに共役状態変数を投資財の現在価格で除したものを限界  $q$  と定義し, 更に (A) の横断性条件を課している。横断性条件 (A) を課することにより, 利子率の関数  $r(t)$  を無限期間にわたって積分した値が  $\infty$  に発散することが実質的に必要となる。 $r(t)$  の積分が発散するという条件は「 $r(t)$  が正の値に収束するという条件」よりも弱く, 第 2 章で証明したように投資調整費用がない場合に限界  $q$  の値が 1 となるための必要十分条件となっている。

最後に, 近年では利子率の長期的な低下傾向が観察されており, 利子率がゼロに収束する場合について, 本論文のように限定された条件ではなく, より一般的な条件での研究が将来的に必要とされる可能性があると思われる。

## 参考文献

齊藤誠, 1996, 『新しいマクロ経済学』, 有斐閣。

Abel, Andrew B. (1980), “Empirical Investment Equations: An Integrative Framework”, Brunner, Karl and Allan Meltzer, editors, *On the State of Macroeconomics*, volume 12 of the Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, pp.39-91.

Benveniste, L.M. and Scheinkman, J.A. (1982), “Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case”, *Journal of Economic Theory*, 27(1), pp.1-19.

Cass, David (1965), “Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation”, *Review of Economic Studies*, 32 (3), pp.233-240.

Chiang, Alpha C. (1992), *Elements of Dynamic Optimization*, London: McGraw-Hill (小田・仙波・高森・平澤訳 『動学的最適化の基礎』 2006, シーエービー出版)

Goldstine, Herman H. (1980), *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, New York : Springer-Verlag.

Hayashi, Fumio (1982), “Tobin’s Marginal and Average  $q$ : A Neoclassical Interpretation,” *Econometrica*, 50(1), pp.213-224.

Lucas, Robert E. (1967), “Adjustment Costs and the Theory of Supply”, *Journal of Political Economy*, 75(4), pp.321-334.

- Michel, Phillippe (1982), “On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems”, *Econometrica*, 50(4), pp. 975-985.
- Pontryagin, L.S. (1962), *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York: Interscience. (関根智明訳『最適過程の数学的理論』1967, 文一総合出版)
- Ramsey, Frank (1928), “A Mathematical Theory of Saving”, *Economic Journal*, Vol. 38, No. 152, pp.543-559.
- Shell, Karl (1969), “Applications of Pontryagin’s Maximum Principle to Economics,” in H. W. Kuhn and G.P.Szego, eds., *Mathematical Systems Theory and Economics*, Vol.1, Springer-Verlag, New York, pp.241-292.
- Tobin, James (1969), “A General Equilibrium Approach to Monetary Theory”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 1, pp.15-29.
- Tobin, James & Brainard, William (1990), “On Crotty’s Critique of q-Theory,” *Journal of Post Keynesian Economics*, 12(4), pp.543-549.
- Weitzman, Martin L. (1973), “Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models”, *Management Science*, 19(7), pp.783-789.