

ファジィ確率ベクトルの 集合表現について

福田 得 夫

Abstract

本論文では、著者が提案している一種のファジィ確率ベクトルを、ファジィ集合の集合表現を全面的に採用した形で再構築することを試みる。またそれらの若干の性質についても考察する。

1 緒 言

最近著者は、不規則性と曖昧性を共に有するデータは、確率ベクトルで表される不規則データを曖昧に認識することによって得られるものであるという一貫した立場から、その数学的なモデルとしてファジィ確率ベクトルを提案している[1], [2]。本論文では、ファジィ集合間の演算が集合表現を用いると見通しのよい形で定義できることに着目して、ファジィ確率ベクトルを最初からファジィ集合の集合表現を採用した形で再定義することを試みる。

本論文に深く関連した研究分野であるファジィ確率変数 (fuzzy random variable) についてはすでに多くの研究が行われているが、それらは多値論理の立場より導出されたもの[3]~[7]と、対応 (correspondence) ある

いは確率集合 (random set) に関する理論[8], [9]の拡張として導出されたもの[10]~[15]とに大別できる。しかしながら, 不規則現象を曖昧に観測した結果得られるデータであるという一貫した立場に立った研究は少ないようである。

まず第2章では, ファジィ集合の集合表現を全面的に採用した形で, 一般のファジィ集合及びファジィベクトルやファジィ行列の算術演算について考察する。第3章において, 基本的には Kwakernaak[3]によって提案された多値論理にもとづく方法論に従い, ファジィ確率ベクトル及びファジィ確率行列を導入する。また提案したファジィ確率ベクトル及びファジィ確率行列の若干の性質についても第3章において考察する。

2 ファジィベクトルとファジィ行列

本論文では, 空間 X 上の点 x_0 の曖昧識別として得られるファジィ集合を次のように定義する:

$$\tilde{U} = (X, \{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{U}}) \quad (2.1)$$

ここで X は基礎空間, $s_{\tilde{U}}$ は X から主張 (statement) の集合として与えられる議論の対象領域 (universe of discourse) への写像として定義される述語 (predicate) であり, X の各要素 x に対して命題

$$s_{\tilde{U}}(x) = \{x \text{ は } x_0 \text{ に一致する}\} \quad (2.2)$$

を与えるものである。また $\{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は X の部分集合族であり, 各 $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$L_\alpha \tilde{U} \subseteq \tilde{U}_\alpha \subseteq L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U} \quad (2.3)$$

を満たすもので $\tilde{U}$ の集合表現と呼ばれる。(2.3)において, $L_\alpha \tilde{U}$ と $L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}$

はそれぞれ $\tilde{U}$ のレベル α における強カット (strong cut), およびレベル集合 (level set) と呼ばれ, 次のように与えられるものである:

$$\text{各 } \alpha \in [0, 1) \text{ に対して } L_{\alpha} \tilde{U} = \{x \mid (x \in X) \wedge ((\tilde{U})(x) > \alpha)\} \quad (2.4)$$

$$\text{各 } \alpha \in (0, 1] \text{ に対して } L_{\bar{\alpha}} \tilde{U} = \{x \mid (x \in X) \wedge ((\tilde{U})(x) \geq \alpha)\} \quad (2.5)$$

ここで $(\tilde{U})(x)$ は $\tilde{U}$ のメンバーシップ関数 (membership function) であり,

$$(\tilde{U})(x) = t(s_{\tilde{U}}(x)) \quad (2.6)$$

で与えられる。ただし, $t(*)$ は多値論理の意味における $*$ の真理値関数である。曖昧な識別として得られるファジィ集合 $\tilde{U}$ を与えるもととなる (曖昧ではない) 明確な値を持つ X の点 x_0 は $\tilde{U}$ のオリジナルポイント (original point) と呼ばれる。本論文で採用した上述のようなファジィ集合の定義は, Kwakernaak[3]により提案された物を修正したものである。また (2.3) で与えられる集合族を $\tilde{U}$ の集合表現と呼ぶ呼び方も従来の定義法とは若干異なるが, 本質的には同じである (例えば[6], [16]等を参照のこと)。

ファジィ集合の定義 (2.1) から分かるように, すべてのレベル α において同じ強カットおよびレベル集合を待つファジィ集合は多数存在する。そこでファジィ集合の同値性を次のように定義することにする:

定義 2.1 ファジィ集合 $\tilde{U}$ と $\tilde{V}$ は, $\forall \alpha \in (0, 1)$ に対して

$$L_{\alpha} \tilde{U} = L_{\alpha} \tilde{V} \quad \text{および} \quad L_{\bar{\alpha}} \tilde{U} = L_{\bar{\alpha}} \tilde{V} \quad (2.7)$$

を満たすとき同値であるといい, $\tilde{U} = \tilde{V}$ と表現する。¹⁾

1) (2.7) の2つの不平等のうちどちらかが成立する, 他方が成立することを示せるが, ここでは簡単のためにこのように定義した。

また集合族 $\{\tilde{V}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ の各要素が各 $\alpha \in (0, 1)$ において,

$$L_\alpha \tilde{U} \subseteq \tilde{V}_\alpha \subseteq L_{\bar{\alpha}} \tilde{U} \quad (2.8)$$

を満たすとき

$$\begin{aligned} (\tilde{U})(t) &= \sup \{ \alpha \mid (\alpha \in (0, 1)) \wedge (t \in \tilde{U}_\alpha) \} \\ &= \sup \{ \alpha \mid (\alpha \in (0, 1)) \wedge (t \in \tilde{V}_\alpha) \} \\ &= (\tilde{V})(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

であることを示すことができる [6], [16]。ただし $\sup \emptyset = 0$ である。したがって次の命題が得られる：

定理 2.1 2つのファジィ集合 $\tilde{U}$ と $\tilde{V}$ が各 $\alpha \in (0, 1)$ において

$$L_\alpha \tilde{U} \subseteq \tilde{V}_\alpha \subseteq L_{\bar{\alpha}} \tilde{U} \quad (2.10)$$

を満たすならば $\tilde{U} = \tilde{V}$ である。ここで $\{\tilde{V}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は $\tilde{V}$ の集合表現である。

さらに, $\{\alpha_r^+ \mid r = 1, 2, \dots\}$ と $\{\alpha_r^- \mid r = 1, 2, \dots\}$ をそれぞれ

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r^+ \quad (2.11)$$

および

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r^- \quad (2.12)$$

である厳密に単調増加および単調減少する系列であり, また $\alpha_r^+ \in (0, \alpha)$ および $\alpha_r^- \in (\alpha, 1)$ とすると,

$$\text{任意の } \alpha \in [0, 1) \text{ において} \quad L_\alpha \tilde{U} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \tilde{U}_{\alpha_r}, \quad (2.13)$$

と

$$\text{任意の } \alpha \in (0, 1] \text{ において } L_{\alpha} \tilde{U} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \tilde{U}_{\alpha}; \quad (2.14)$$

が成立することを示すことができる[17]。

以後基礎空間 X は距離空間であるものとする。このとき以下の性質を満たすすべてのファジィ集合の族を $\mathcal{G}(X)$ で表記する：

- (i) $\bigcap_{\alpha \in (0, 1)} \tilde{U}_{\alpha} \neq \emptyset$
- (ii) 各 $\alpha \in (0, 1)$ において $\tilde{U}_{\alpha}$ はコンパクト集合
- (iii) $\text{supp. } \tilde{U} = \text{cl. } \bigcup_{\alpha \in (0, 1)} \tilde{U}_{\alpha} = \text{cl. } L_0 \tilde{U}$ (2.15)

で定義される $\tilde{U}$ のサポートもコンパクト集合

(2.7), (2.13) と (2.14) より, もし $\tilde{U}$ と $\tilde{V}$ が等価, すなわち, $\tilde{U} = \tilde{V}$ であれば, $\text{supp. } \tilde{U} = \text{supp. } \tilde{V}$ であることは明らかである。本論文においては, 以後等価なファジィ集合は同一視することにする。

定理 2.2 $\tilde{U} = (X, \{\tilde{U}_{\alpha} \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{U}})$ を $\mathcal{G}(X)$ に属するファジィ集合とする。また $f: X \rightarrow Y$ を距離空間 X から距離空間 Y への写像とする。そうすると

$$f(\tilde{U}) = (Y, \{f(\tilde{U}_{\alpha}) \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{f(\tilde{U})}) \quad (2.16)$$

は各 $\alpha \in [0, 1)$ において

$$f(L_{\alpha} \tilde{U}) = L_{\alpha} f(\tilde{U}) \quad (2.17)$$

と, 各 $\alpha \in (0, 1]$ において

$$f(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}) \subseteq L_{\tilde{\alpha}} f(\tilde{U}) \quad (2.18)$$

を満たすファジィ集合である。ここで

$$\begin{aligned} s_{f(\tilde{U})}(v) &= \{v \text{ は } f(u_0) \text{ に一致する} \} \quad (u_0 \text{ は } \tilde{U} \text{ のオリジナルポイント}) \\ &= \bigvee_{u \in X} \{(v=f(u)) \wedge (u=u_0)\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

さらに、 f が連続写像であるときには (2.18) での等式が成立する。すなわち、各 $\alpha \in (0, 1]$ に対して

$$f(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}) = L_{\tilde{\alpha}} f(\tilde{U}) \quad (2.20)$$

であり、かつ $\tilde{U}$ は $\mathcal{G}(X)$ に属する。

定理 2. 2 は付録 A で証明する。

$\mathcal{G}(X)$ に属するファジィ集合の集合表現を構成する各集合がコンパクトでかつ凸であるとき、それらのファジィ集合の族を $\mathcal{G}_c(X)$ で表すことにする。また X が n 次元ユークリッド空間 R^n であるとき、 $\mathcal{G}_c(R^n)$ に属するファジィ集合を本論文では (n 次元) ファジィベクトルと呼ぶことにする。このとき

$$d_1(\tilde{U}, \tilde{V}) = \int_0^1 d_H(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}, L_{\tilde{\alpha}} \tilde{V}) d\alpha \quad (2.21)$$

および

$$d_{\infty}(\tilde{U}, \tilde{V}) = \sup_{\alpha \in (0, 1)} d_H(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}, L_{\tilde{\alpha}} \tilde{V}), \quad (2.22)$$

で定義される距離 d_1 または d_{∞} により、 $\mathcal{G}(R^n)$ と $\mathcal{G}_c(R^n)$ は位相空間となることが知られている [11]。ここで d_H は Hausdorff 距離であり

$$d_H(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}, L_{\tilde{\alpha}} \tilde{V}) = \max \left\{ \sup_{u \in L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}} \inf_{v \in L_{\tilde{\alpha}} \tilde{V}} \|u - v\|, \sup_{v \in L_{\tilde{\alpha}} \tilde{V}} \inf_{u \in L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}} \|u - v\| \right\} \quad (2.23)$$

により与えられるものである。

ファジィベクトルの場合と同様に、行列空間 $R^{m \times n}$ を基礎空間とし、 $(m \times n)$ 行列 A_0 をオリジナルポイント（オリジナル行列と呼ぶことにする）とするファジィ集合は

$$\tilde{A} = (R^{m \times n}, \{\tilde{A}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{A}}) \quad (2.24)$$

により定義される。ここで集合表現 $\{\tilde{A}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は、各 $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$L_\alpha \tilde{A} \subseteq \tilde{A}_\alpha \subseteq L_{\tilde{\alpha}} \tilde{A} \quad (2.25)$$

を満たす $(m \times n)$ 行列の族として与えられる。また

$$L_\alpha \tilde{A} = \{A \mid (A \in R^{m \times n}) \wedge ((\tilde{A})(A) > \alpha)\} \quad (2.26)$$

$$L_{\tilde{\alpha}} \tilde{A} = \{A \mid (A \in R^{m \times n}) \wedge ((\tilde{A})(A) \geq \alpha)\} \quad (2.27)$$

$$(\tilde{A})(A) = t(s_{\tilde{A}}(A)) \quad (2.28)$$

および命題 $s_{\tilde{A}}(A)$ は

$$s_{\tilde{A}}(A) = \{A \text{ は } A_0 \text{ に一致する}\} \quad (2.29)$$

で与えられる。(2.24) で示したように、本論文においては $R^{m \times n}$ を基礎空間とするファジィ集合はボールドフェイスの大文字にチルダーを付けたもので表すことにする。またファジィ集合族 $\mathcal{G}(R^{m \times n})$ も $\mathcal{G}(R^n)$ と同様に定義される。 $\mathcal{G}(R^{m \times n})$ に属するファジィ集合をファジィ行列と呼ぶことにする。

3 ファジィ確率ベクトルとファジィ確率行列

3.1 ファジィ確率ベクトル

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を完備な確率空間とする。ここで $\mathcal{A}$ は見本空間 Ω の部分集合から生成された σ 代数であり、 P はアトムを持たない (nonatomic) 確率測度である。今ここで $x_0 \in R^n$ をこの確率空間上で定義された確率ベクトルとする。そして、その値を直接には測定することはできず、 R^n の矩形 $\{W_i \mid i \in J\}$ (J は有限または加算無限の添字集合) の集まりで

$$W_i \cap W_j = \emptyset \quad \text{for } i \neq j$$

および

$$\bigcup_{i \in J} W_i = R^n.$$

を満たすもののいずれに属しているかのみが識別できる状況であるものとする。また $\tilde{I}_i$ を

$$\tilde{I}_i = (R^n, \{\tilde{I}_{i,\alpha} \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{I_i}), \quad (3.1)$$

によって与えられる特別なファジィ集合とする。ただし命題 $s_{I_i}(x)$ は

$$s_{I_i}(x) = \{x \text{ は } W_i \text{ の点 } x_0 \text{ に一致する}\}$$

で、任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して、 $\tilde{I}_{i,\alpha} = W_i$ かつ

$$t(s_{I_i}(x)) = (\tilde{I}_i)(x) = \begin{cases} 1 & x \in W_i \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

である。そうすると、どの矩形内に点 x_0 が存在するかを知ることは (3.1) で与えられるファジィ集合を得ることと同等であることが分かる。以上の考察より写像

$$\tilde{x}: \Omega \rightarrow \{\tilde{I}_i \mid i \in J\}$$

はある種のファジィ確率ベクトル (fuzzy random vector) である²⁾と考えることができる。またこれより集合表現 $\{\tilde{I}_{i,\alpha} \mid \alpha \in (0, 1)\} (i \in J)$ をより一般の集合表現に置き換えるればファジィ確率ベクトルが定義できると思われる。

より、厳密にファジィ確率ベクトルを定義するために、まず部分 σ 代数 $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ より生成された縮小確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ を定義する。ここで、見本空間 $\tilde{\Omega}$ は同値関係

$$\omega_1 \sim \omega_2 \iff [\forall A \in \mathcal{F}, \omega_1 \in A \Leftrightarrow \omega_2 \in A] \quad (3.2)$$

より得られる Ω の商空間、すなわち、 $\tilde{\Omega} = \Omega / \sim$ である。 $\tilde{\mathcal{A}}$ は

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A} \mid c^{-1}(\tilde{A}) \in \mathcal{A}\} \quad (3.3)$$

で与えられる $\mathcal{A}$ の縮小 σ 代数である。ただし、 $c(\cdot)$ は、 $\omega_1 \sim \omega_2 (\omega_1, \omega_2 \in \Omega)$ のとき

$$c(\omega_1) = c(\omega_2) = \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \quad (3.4)$$

を満たす射影である。また $\tilde{P}$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ 上の確率測度で、各 $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ に対して

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = P(c^{-1}(\tilde{A})) \quad (3.5)$$

で与えられる。さらに $\mathcal{K}_c^n$ を空集合を除く R^n 上のコンパクト凸集合の族、および $\mathcal{B}(\mathcal{K}_c^n)$ を $\mathcal{K}_c^n$ から生成されるボレル集合族、つまり、 $\mathcal{K}_c^n$ の開集合から生成される最小 σ 代数³⁾とする。そうするとファジィ確率ベクトル $\tilde{x}$

2) 本論文では、 n 次元確率変数をスカラーの確率変数と明確に区別するために、確率ベクトルと呼ぶことにする。

3) $\mathcal{K}_c^n$ の位相は (2.23) の Hausdorff 距離 d_H より誘導される。

は次のように定義される：

定義 3. 1 通常の（曖昧ではない）確率ベクトル x_0 の曖昧識別の結果として与えられるファジィ確率ベクトル $\tilde{x}$ は

$$\tilde{x} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathcal{G}_c(R^n) \quad (3.6)$$

で定義される。ここで $\tilde{x}$ の集合表現 $\{\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は $\mathcal{A}$ 可測なコンパクトかつ凸な対応（correspondence）により構成される集合族である [9]。 $\tilde{x}$ の可測性については $\tilde{\Omega}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{X}_c^n)$ への関数 $\tilde{x}_\alpha$ のそれによって与えることにする。つまり、各 $\alpha \in (0, 1)$ と、任意の $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_c^n)$ に対して

$$\tilde{x}_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{A} \quad (3.7)$$

のとき $\tilde{x}_\alpha$ は $\mathcal{A}$ 可測である。

注意： $\tilde{\Omega}$ と R^n の対応（correspondence） $\tilde{x}_\alpha$ はその定義域が $\tilde{\Omega}$ 全体である $\tilde{\Omega}$ と R^n の関係（relation）である。したがって、 $\tilde{x}_\alpha$ は全ての $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ に対して $\tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \neq \emptyset$ を満たす $\tilde{\Omega}$ から R^n の部分集合族への関数と考えられる。さらに、ファジィ確率ベクトルの集合表現の構成要素としては、 $\mathcal{A}$ 可測なコンパクトで凸である対応のみに限定していることに注意を要する。

定理 3. 1 縮小確率空間 $(\tilde{\Omega}, \mathcal{A}, \tilde{P})$ は完備である。

定理 3. 2 ファジィ確率ベクトル $\tilde{x}$ を曖昧識別として与えるオリジナルポイントである確率ベクトル x_0 は、オリジナル確率ベクトルと呼ばれる。

4) 凸であることは必ずしも必要ではないが、議論を不必要に複雑にしないためにそのように仮定した。

またオリジナル確率ベクトルとなりうる全ての確率ベクトルの集合を χ で表すことにする。

ここで注意すべきことは、与えられたファジィ確率ベクトルに対して、同じファジィ確率ベクトルを生成する確率ベクトルが無数にあるという事である。したがって、オリジナル確率ベクトルとなりうる全ての確率ベクトルから真のオリジナル確率ベクトルを識別することは不可能である。

本論文全体を通して次の条件が満たされているものと仮定する。

(A-1) x_0 (真のオリジナル確率ベクトル) $\in \text{supp. } \tilde{x}$ (もちろん $x_0 \in \chi$ である)

(A-2) $\left\{ \xi \left| \left(\xi \in \chi \right) \wedge \left(\xi \in \bigcap_{\alpha \in (0, 1)} \tilde{x}_\alpha \text{ a. s. in } \Omega \right) \right. \right\} \neq \emptyset$

定理 3. 2 次に挙げる 4 つの可測性は同等であることが示される：

- (a) 任意の $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_c^n)$ において $\tilde{x}_\alpha^{-1}(E) \in \tilde{\mathcal{A}}$
- (b) 任意の $G \in \mathcal{B}(R^n)$ において $\tilde{x}_\alpha^\omega(G) = \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \cap G \neq \emptyset\} \in \tilde{\mathcal{A}}$
- (c) 任意の $G \in \mathcal{B}(R^n)$ において $\tilde{x}_\alpha^*(G) = \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \subset G\} \in \tilde{\mathcal{A}}$
- (d) $\text{Gr}(\tilde{x}_\alpha) = \{(\tilde{\omega}, x) \in \tilde{\Omega} \times R^n \mid x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})\} \in \tilde{\mathcal{A}} \times \mathcal{B}(R^n)$

ここで $\tilde{\mathcal{A}} \times \mathcal{B}(R^n)$ は $\tilde{\Omega} \times R^n$ 上の直積 σ 代数、すなわち $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ および $B \in \mathcal{B}(R^n)$ である直積 $\tilde{A} \times B$ の全てを含む最小の σ 代数である。

$\tilde{x}_\alpha$ は $\tilde{\Omega}$ から R^n への対応であるから、 $\tilde{x}_\alpha \circ c$ は Ω から R^n への対応と考えることができる。したがって次の系が成立することは明らかである：

系 3. 1 x_α を $\tilde{x}_\alpha \circ c$ で与えられる対応とする。そうすると次の 4 つの可測性は同等であることを示すことができる：

- (a) 任意の $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_c^n)$ において $x_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{A}$
- (b) 任意の $G \in \mathcal{B}(R^n)$ において $x_\alpha^w(G) = \{\omega \in \Omega \mid x_\alpha(\omega) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$
- (c) 任意の $G \in \mathcal{B}(R^n)$ において $x_\alpha^s(G) = \{\omega \in \Omega \mid x_\alpha(\omega) \subset G\} \in \mathcal{A}$
- (d) $\text{Gr}(x_\alpha) = \{\omega, x\} \in \Omega \times R^n \mid x \in x_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(R^n)$

ここで $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(R^n)$ は $\Omega \times R^n$ 上の直積 σ 代数である。

定理 3. 3 $\tilde{x}$ をファジィ確率ベクトル, $\{\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ をその集合表現とする。このとき

- (i) 各 $\alpha \in [0, 1)$ に対して, $L_\alpha \tilde{x}$ は $\mathcal{A}$ 可測な対応である
- (ii) $\{L_\alpha \tilde{x} \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は, $\tilde{x}$ と等価なファジィ確率ベクトルの集合表現である
- (iii) $\text{supp. } \tilde{x}$ は $\mathcal{A}$ 可測な対応である
- (iv) $L_1 \tilde{x}$ は $\mathcal{A}$ 可測な対応である

が成立する。

定理 3. 4 $\tilde{x}$ をファジィ確率ベクトル, $\{\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ をその集合表現とする。このとき各 $\alpha \in (0, 1)$ と各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, $\inf \tilde{x}_{\alpha, i}$ と $\sup \tilde{x}_{\alpha, i}$ は $\mathcal{A}$ 可測な確率変数である。ただし

$$\tilde{x}_{\alpha, i}(\tilde{\omega}) = \{x_i \mid x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}), x = (x_1, \dots, x_n)'\} \quad (3.8)$$

ファジィ確率ベクトル $\tilde{x}$ が 1 次元, すなわちファジィ確率変数であるものとする。このとき, $\inf(\text{supp. } \tilde{x})$ と $\sup(\text{supp. } \tilde{x})$ の $\mathcal{A}$ 可測性を, 定理 3. 3 (iii) の $\text{supp. } \tilde{x}$ の $\mathcal{A}$ 可測性を用いて, 定理 3. 4 の証明と同様の手法

により示すことができる。したがって次の系を得ることができる：

系 3.2 $\tilde{x}$ をファジィ確率変数であるとする。このとき、

- (i) 各 $\alpha \in [0, 1]$ に対して、 $\inf L_\alpha \tilde{x}$ と $\sup L_\alpha \tilde{x}$ は $\mathcal{A}$ 可測な確率変数である
- (ii) 各 $\alpha \in (0, 1]$ に対して、 $\inf L_{\bar{\alpha}} \tilde{x}$ と $\sup L_{\bar{\alpha}} \tilde{x}$ も $\mathcal{A}$ 可測な確率変数である
- (iii) さらに $\inf(\text{supp. } \tilde{x})$ と $\sup(\text{supp. } \tilde{x})$ も $\mathcal{A}$ 可測である

注意：上述の性質は、本論文で提案したファジィ確率ベクトルが Kwakernaak[3]によって提案されたファジィ確率変数の自然な拡張であることを示している[18]。

3.2 曖昧確率行列

$\mathcal{X}^{m \times n}$ を空でない $R^{m \times n}$ のコンパクト部分集合の族とし、 $\mathcal{B}(\mathcal{X}^{m \times n})$ を $\mathcal{X}^{m \times n}$ の Borel 集合族、すなわち $\mathcal{X}^{m \times n}$ の開部分集合から生成される最小 σ 集合とする。ただし、 $\mathcal{X}^{m \times n}$ の位相は

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A'A)} \quad (\lambda_{\max} \text{ は } A'A \text{ の最大固有値}) \quad (3.9)$$

で与えられるマトリックスノルムを用いて定義される Hausdorff 距離

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{A \in A} \inf_{B \in B} \|A - B\|, \sup_{B \in B} \inf_{A \in A} \|A - B\| \right\} \quad (3.10)$$

によって誘導された位相である。よってファジィ確率行列 (fuzzy random matrix) はファジィ確率ベクトルと同様の考え方を用いて次の様に定義できる：

定義 3.3 通常の確率行列 M の曖昧識別として得られるファジィ確率行列は

$$\tilde{M}: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathcal{G}(R^{m \times n}) \quad (3.11)$$

で与えられる。ここで $\{\tilde{M}_\alpha(\tilde{\omega}) \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ 可測でコンパクトな対応によって構成されるものとする。すなわち、任意の $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X}^{m \times n})$ および任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$\tilde{M}_\alpha^{-1}(E) \in \tilde{\mathcal{A}} \quad (3.12)$$

を満たす対応により構成される。

いま $\tilde{x}$ を n 次元ファジィベクトルとする。そうすると通常のベクトル x の演算 xx' のファジィ化されたものとして、次のファジィ行列 $\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}$ を導入できる：

$$\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}' = (R^{n \times n}, \{\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}'}) \quad (3.13)$$

ただし $\{\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は $\tilde{x}$ の集合表現で、 $\tilde{x}_\alpha$ の演算 $\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha$ は

$$\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha = \{W \mid W = xx', x \in \tilde{x}_\alpha\} \quad (3.14)$$

で与えられ、命題 $s_{\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}'}(W)$ は

$$s_{\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}'}(W) = \{W \text{ は行列 } x_0 x'_0 \text{ に一致する}\} \quad (3.15)$$

である。

定理 3.5 $\tilde{x}$ をファジィ確率ベクトル、 $\{\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ はその集合表現であるとする。このとき (3.13) で与えられるファジィ集合はファジィ確率行列である。すなわち $\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}'$ は $\mathcal{G}(R^{n \times n})$ の構成要素であり、各 $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X}^{n \times n})$ および $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$(\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha)^{-1}(E) \in \tilde{\mathcal{A}} \quad (3.16)$$

である。さらに $\tilde{x} \boxplus \tilde{x}'$ は、任意の $\alpha \in [0, 1)$ において

$$L_{\alpha}(\tilde{x} \boxplus \tilde{x}') = (L_{\alpha} \tilde{x}) \boxplus (L_{\alpha} \tilde{x}') \quad (3.17)$$

と、任意の $\alpha \in (0, 1]$ において

$$L_{\alpha}(\tilde{x} \tilde{x}') = (L_{\alpha} \tilde{x}) \boxplus (L_{\alpha} \tilde{x}') \quad (3.18)$$

を満たす。

第3章の定理の証明は付録Bに与えられている。

4 結 言

本論文では不規則現象を人が曖昧に認識することによって得られる一種のファジィ確率ベクトルとファジィ確率行列を、ファジィ集合の集合表現を全面的に採用した形で定義することを提案し、それらの若干の性質について考察を加えた。

ここで、提案したファジィ確率ベクトルの特徴としては次のような点を挙げるができると思われる：

1. ファジィ集合の集合表現を採用したことにより、ファジィベクトル間等の算術が見通しよく行えるようになった。
2. 基本的には Kwakernaak[3]によって提案された多値論理にもとづく方法論に従ってファジィ確率ベクトルを導出しているが、対応の理論を応用することによって、多次元のファジィ確率変数、すなわちファジィ確率ベクトルや、さらにはファジィ確率行列も、自然なかたちで定義できるようになった。
3. ファジィ確率ベクトルの集合表現を対応の集まりで定義したことにより、従来から提案されている他の定義法[11]によるファジィ確率変数との関連を考察する基礎が確立できた。

References

- [1] T. Fukuda. On a class of fuzzy random vectors obtained as vague perception of random phenomena. In *Int. Joint Conf. of 4th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems and Int. Fuzzy Eng. Symp. (FUZZ/IEEE/IFES' 95)*, volume II, pages 963 – 970, 1995.
- [2] T. Fukuda. Some properties of a class of fuzzy random vectors. In *The 26th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications*, pages 131 – 136, 1995.
- [3] H. Kwakernaak. Fuzzy random variables-I: definitions and theorems. *Information Sciences*, 15: 1 – 29, 1978.
- [4] H. Kwakernaak. Fuzzy random variables-II: algorithms and examples for the discrete case. *Information Sciences*, 17: 253 – 278, 1979.
- [5] M. Miyakoshi and M. Simbo. A strong law of large numbers for fuzzy random variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 12: 133 – 142, 1984.
- [6] R. Kruse and K.D. Meyer. *Statistics with Vague Data*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [7] S.B. Boswell and M.S. Taylor. A central limit theorem for fuzzy random variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 24: 331 – 344, 1987.
- [8] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. John-Wiley, New York, 1975.
- [9] E. Klein and A.C. Thompson. *Theory of Correspondences*. John Wiley & Sons, Netherlands, 1988.
- [10] E.P. Klement, M.L. Puri, and D.A. Ralescu. Limit theorems for fuzzy random variables. *Proceedings of Royal Society of London*, A 407: 171 – 182, 1986.
- [11] M.L. Puri and D.A. Ralescu. Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, 114: 409 – 422, 1986.
- [12] M.L. Puri and D.A. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, pages 552 – 558, 1983.
- [13] M.L. Puri and D.A. Ralescu. The concept of normality for fuzzy random variables. *The Annals of Probability*, 13 (4): 1373–1379, 1985.
- [14] H. Inoue. A strong law of large numbers for fuzzy random sets.

- Fuzzy Sets and Systems*, 41 : 285 – 291, 1991.
- [15] T. Uemura. A law of large numbers for random sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 59 : 181 – 188, 1993.
- [16] R. Kruse, J. Gebhardt and F. Klawonn. *Foundations of Fuzzy Systems*. John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- [17] T. Fukuda. Basic properties of fuzzy sets. *The Kyoto Gakuen University Review*, 18 : 125 – 164, 1990.
- [18] T. Fukuda. Statistical properties of fuzzy stochastic processes. In F. Kozin and T. Ono, editors, *Systems and Control-Topics in Theory and Applications*, pages 61 – 72. Mita Press, Tokyo, Japan, 1991.

付録 A 第 2 章の定理の証明

定理 2. 2 の証明

(i) 命題 $s_{f(\tilde{U})}$ は

$$\begin{aligned}
 s_{f(\tilde{U})}(v) &= \{v \text{ は } f(u_o) \text{ に一致する}\} \\
 &= \bigvee_{u \in X} \{(u = u_o) \wedge (v = f(u))\} \\
 &= \bigvee_{u \in X} \{s_{\tilde{U}} \wedge (v = f(u))\}
 \end{aligned} \tag{A. 1}$$

と書きかえることができるので,

$$\begin{aligned}
 t(s_{f(\tilde{U})}) &= t\left(\bigvee_{u \in X} \{s_{\tilde{U}} \wedge (v = f(u))\}\right) \\
 &= \sup_{u \in X} \{(\tilde{U})(u) \mid v = f(u)\}
 \end{aligned} \tag{A. 2}$$

となることがわかる。ここで

$$y \in \{v \mid t(s_{f(\tilde{U})}(v)) > \alpha\} \\ = \left\{ v \mid \sup_{u \in X} \{(\tilde{U})(u) \mid v = f(u)\} > \alpha \right\} \quad (\text{A. 3})$$

と仮定すると、(2.8) より、 $y=f(x)$ かつ $x \in L_\alpha \tilde{U} \subseteq \tilde{U}_\alpha$ である X の要素 x があることが分かる。従って、

$$y=f(x) \in \{v \mid v=f(u), \quad u \in L_\alpha \tilde{U}\} \\ \subseteq \{v \mid v=f(u), \quad u \in \tilde{U}_\alpha\} \quad (\text{A. 4})$$

すなわち

$$\{v \mid t(s_{f(\tilde{U})}(v)) > \alpha\} \subseteq f(L_\alpha \tilde{U}) \subseteq f(\tilde{U}_\alpha) \quad (\text{A. 5})$$

が成立することは明らかである。一方、

$$y \in f(\tilde{U}_\alpha) = \{v \mid v=f(u), \quad u \in \tilde{U}_\alpha\} \quad (\text{A. 6})$$

と仮定すると、 $y=f(x)$ かつ $x \in \tilde{U}_\alpha \subseteq L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}$ である X の要素 x があることがわかり、これより

$$y \in \{v \mid v=f(u), \quad u \in \tilde{U}_\alpha\} \\ \subseteq \{v \mid v=f(u), \quad u \in L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}\} \\ = \{v \mid ((\tilde{U})(u) \geq \alpha) \wedge (v=f(u))\} \\ \subseteq \left\{ v \mid \sup_{u \in X} \{(\tilde{U})(u) \mid v=f(u)\} \geq \alpha \right\} \\ = \{v \mid t(s_{f(\tilde{U})}(v)) \geq \alpha\} \quad (\text{A. 7})$$

すなわち

$$f(\tilde{U}_\alpha) \subseteq f(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}) \subseteq \{v \mid t(s_{f(\tilde{U})}(v)) \geq \alpha\} \quad (\text{A. 8})$$

を得ることができる。従って、(A.5) と (A.8) から各 $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$\{v \mid t(s_{f(\tilde{U})}(v)) > \alpha\} \subseteq f(\tilde{U}_\alpha) \subseteq \{v \mid t(s_{f(\tilde{U})}(v)) \geq \alpha\} \quad (\text{A.9})$$

が成立し、これより $\{f(\tilde{U}_\alpha) \mid \alpha \in (0, 1)\}$ が $f(\tilde{U})$ の集合表現であることが分かる。

(ii) (A.5) および $f(\tilde{U})$ のメンバーシップ関数の定義、すなわち

$$\begin{aligned} (f(\tilde{U}))(v) &= t(s_{f(\tilde{U})}(v)) \\ &= t\left(\bigvee_{u \in X} \{(v=f(u)) \wedge (u=u_0)\}\right) \\ &= \sup_{u \in X} \{t((v=f(u)) \wedge (u=u_0))\} \\ &= \sup_{u \in X} \{(\tilde{U})(u) \mid v=f(u)\} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

より、明らかに各 $\alpha \in [0, 1)$ で

$$L_\alpha f(\tilde{U}) \subseteq f(L_\alpha \tilde{U}) \quad (\text{A.11})$$

であることが分かる。一方

$$y \in f(L_\alpha \tilde{U}) = \{v \mid v=f(u), \quad u \in L_\alpha \tilde{U}\} \quad (\text{A.12})$$

と仮定すると、 $y=f(x)$ を満たす $L_\alpha \tilde{U}$ の要素 x が少なくとも一つ存在し、このことより

$$\begin{aligned} y=f(x) &\in \{v \mid v=f(u), \quad u \in L_\alpha \tilde{U}\} \\ &\subseteq \{v \mid ((\tilde{U})(u) > \alpha) \wedge (v=f(u))\} \\ &\subseteq \left\{v \mid \sup_{u \in X} \{(\tilde{U})(u) \mid v=f(u)\} > \alpha\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{v \mid t(s_{f(\tilde{U})}(v)) > \alpha\} \\ &= L_\alpha f(\tilde{U}), \end{aligned} \tag{A.13}$$

すなわち各 $\alpha \in [0, 1)$ に対して

$$f(L_\alpha \tilde{U}) \subseteq L_\alpha f(\tilde{U}) \tag{A.14}$$

であることが分かる。従って、(A.11) と (A.14) より、 $\forall \alpha \in [0, 1)$ に対して

$$f(L_\alpha \tilde{U}) = L_\alpha f(\tilde{U}) \tag{A.15}$$

が成立することが分かる。さらに、(A.8) と (A.10) より

$$f(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}) \subseteq L_{\tilde{\alpha}} f(\tilde{U}) \tag{A.16}$$

であることは明らかである。

(iii) (A.16) より分かるように、(2.20) が成立することを示すためには、各 $\alpha \in (0, 1]$ に対して

$$f(L_{\tilde{\alpha}} \tilde{U}) \supseteq L_{\tilde{\alpha}} f(\tilde{U}) \tag{A.17}$$

であることを示せば十分である。 $l_\alpha(v)$ と $m(v)$ をそれぞれ

$$l_\alpha(v) = \{u \in X \mid (v = f(u)) \wedge (u \in L_\alpha \tilde{U})\} \tag{A.18}$$

と

$$m(v) = \{(\tilde{U})(u) \mid (u \in X) \wedge (v = f(u))\} \tag{A.19}$$

で定義するものとする。

ケース I : まず $l_a(v) \neq \emptyset$ と仮定すると, $v=f(x)$ かつ $x \in L_{\tilde{a}} \tilde{U}$ を満たす x があることがわかる。従って, そのような v に対して

$$\begin{aligned} v \in L_{\tilde{a}} f(\tilde{U}) &= \{y \mid (f(\tilde{U}))(y) \geq \alpha\} \\ &= \left\{ y \mid \sup_{u \in X} \{(\tilde{U})(u) \mid y=f(u) \} \geq \alpha \right\} \end{aligned} \quad (\text{A. 20})$$

かつ

$$v \in \{y \mid (y=f(u)) \wedge (u \in L_{\tilde{a}} \tilde{U})\} = f(L_{\tilde{a}} \tilde{U}) \quad (\text{A. 21})$$

であることが分かる。すなわち任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して, (A. 17) が成立する。

ケース II : $l_a(v) = \emptyset$ と仮定する。(A. 19) で与えられる $m(v)$ を用いると, $f(\tilde{U})$ の α レベル集合 $L_{\tilde{a}} f(\tilde{U})$ は

$$L_{\tilde{a}} f(\tilde{U}) = \left\{ y \in Y \mid \sup_{u \in X} m(y) \geq \alpha \right\} \quad (\text{A. 22})$$

と表すことができる。従って $v \in L_{\tilde{a}} f(\tilde{U})$ であれば,

$$\sup_{u \in X} m(v) \geq \alpha \quad (\text{A. 23})$$

であることが分かる。また $l_a(v) = \emptyset$ であるので, すべての $\beta \in m(v)$ に対して $\beta < \alpha$ となる。従って, α は $m(v)$ の集積点であるから,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k^+ = \alpha \quad (\text{A. 24})$$

となる $m(v)$ の厳密に単調増加な系列 $\{\alpha_k^+ \mid k = 1, 2, \dots\}$ が存在することが分かる。また,

$$\alpha_k^+ \in m(v) = \{(\tilde{U})(u) \mid (u \in X) \wedge (v=f(u))\} \quad (\text{A. 25})$$

であるから、 $v=f(x_k)$ で $(\tilde{U})(x_k)=\alpha_k^+$ となる系列 $\{x_k \in X \mid k=1, 2, \dots\}$ が、 $\{\alpha_k^+ \mid k=1, 2, \dots\}$ に対応して存在することが分かる。また、 $\tilde{U} \in \mathcal{G}(X)$ だから $L_{\alpha_k^+} \tilde{U}$ はコンパクトであることを示せる[17]。さらに

$$L_{\alpha_1^+} \tilde{U} \supseteq L_{\alpha_2^+} \tilde{U} \supseteq \dots L_{\alpha_k^+} \tilde{U} \supseteq L_{\alpha_{k+1}^+} \tilde{U} \supseteq \dots \quad (\text{A. 26})$$

であるので、 $\{x_k \mid k=1, 2, \dots\}$ は収束する部分列 $\{x_{k_j} \mid j=1, 2, \dots\}$ を持ち、その収束先を x とすると

$$x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} L_{\alpha_{k_j}^+} \tilde{U} = \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{\alpha_k^+} \tilde{U} = L_{\bar{\alpha}} \tilde{U} \quad (\text{A. 27})$$

となる。ここで (2.14) を使用した。また f を連続写像とすると、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_{k_j}) = x \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = f(x) \quad (\text{A. 28})$$

を得る。従って、全ての $k(=1, 2, \dots)$ に対して、 $f(x_k)=v$ であるから、(A. 27) と (A. 28) から分かるように、 $x(\in L_{\bar{\alpha}} \tilde{U})$ に対しても、 $f(x)=v$ となるが、これは

$$x \in \{u \in X \mid (v=f(u)) \wedge (u \in L_{\bar{\alpha}} \tilde{U})\} = l_{\bar{\alpha}}(v) \quad (\text{A. 29})$$

であることを意味している。ところが (A. 29) は、最初に仮定した $l_{\bar{\alpha}}(v) = \emptyset$ と矛盾する。従ってケース I のみが可能であり、(2.20) が証明されたことになる。

(iv) f は連続写像であると仮定する。そうすると、各 $\alpha \in (0, 1)$ に対して $f(\tilde{U}_{\alpha})$ はコンパクトなファジィ集合であることは明らかである。さらに (2.17) と (2.20) から

$$\bigcap_{\alpha \in (0, 1)} f(\tilde{U}) = L_{\bar{1}} f(\tilde{U}) = f(L_{\bar{1}} \tilde{U}) = f\left(\bigcap_{\alpha \in (0, 1)} \tilde{U}_{\alpha}\right) \neq \emptyset \quad (\text{A. 30})$$

と

$$\begin{aligned} \text{supp. } f(\tilde{U}) &= \text{cl. } \bigcup_{\alpha \in (0, 1)} f(\tilde{U}_{\alpha}) = \text{cl. } L_0 f(\tilde{U}) = \text{cl. } f(L_0 \tilde{U}) \\ &\subseteq \text{cl. } f(\text{cl. } L_0 \tilde{U}) = f(\text{cl. } L_0 \tilde{U}) = f(\text{supp. } \tilde{U}) \end{aligned} \quad (\text{A. 31})$$

であることが分かり、これより $f(\tilde{U}) \in \mathcal{G}(X)$ と結論づけることができる。
ただし (A. 31) の導出にあたって $\text{supp. } \tilde{U}$ のコンパクト性を用いた。

付録 B 第 3 章の定理の証明

定理 3. 1 の証明

$\tilde{\mathcal{A}}$ の要素 $\tilde{A}$ が $\tilde{P}(\tilde{A}) = 0$ を満たすものとする。(3. 3) より明らかに $c^{-1}(\tilde{A}) \in \mathcal{A}$ である。また $\tilde{A}$ の任意の部分集合 $\tilde{B}$ に対して、 $B = c^{-1}(\tilde{B}) \subseteq c^{-1}(\tilde{A})$ で確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ が完備であるから

$$\tilde{P}(\tilde{B}) = P(c^{-1}(\tilde{B})) = P(B) \leq P(A) = P(c^{-1}(\tilde{A})) = \tilde{P}(\tilde{A}) = 0$$

となる。したがって $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ もまた完備な確率空間となる。

定理 3. 2 の証明

定理 3. 2 を証明するためには以下の補題を必要とする [9] :

補題 B. 1 次の 2 つの主張は等価である :

- (a) 任意の $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_\alpha^n)$ に対して $\tilde{x}_\alpha^{-1}(E) \in \tilde{\mathcal{A}}$
- (b)' 任意の R^n の開部分集合 B に対して $\tilde{x}_\alpha^w(B) \in \tilde{\mathcal{A}}$

補題 B. 2 R^n の任意の開部分集合 B に対して, $\tilde{x}_\alpha^w(B)$ を $\tilde{\mathcal{A}}$ の構成要素とする。このとき

$$(d) \quad \text{Gr}(\tilde{x}_\alpha) \in \tilde{\mathcal{A}} \times \mathcal{B}(R^n)$$

補題 B. 3 $\text{Gr}(\tilde{x}_\alpha)$ が $\tilde{\mathcal{A}} \times \mathcal{B}(R^n)$ 可測であるとする。このとき,

$$(c) \quad \text{任意の Borel 集合 } G \in \mathcal{B}(R^n) \text{ に対して } \tilde{x}_\alpha^s(G) \in \tilde{\mathcal{A}}$$

(定理 3. 2 の証明)

(a) $\rightarrow$ (d) と (d) $\rightarrow$ (c) : 補題 B. 1, B. 2 および B. 3 から容易に導くことができる。

(c) $\rightarrow$ (b) : B を $\mathcal{B}(R^n)$ の任意の要素とする。そうすると, B^c も $\mathcal{B}(R^n)$ の要素となる。従って, $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{x}_\alpha^s(B^c) \in \tilde{\mathcal{A}}$ 。さらに

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \setminus \tilde{x}_\alpha^s(B^c) &= \tilde{\Omega} \setminus \tilde{x}_\alpha^s(R^n \setminus B) \\ &= \tilde{\Omega} \setminus \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \subset R^n \setminus B\} \\ &= \tilde{\Omega} \setminus \{\tilde{\omega} \mid \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \cap B = \emptyset\} \\ &= \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \cap B \neq \emptyset\} \\ &= \tilde{x}_\alpha^w(B) \end{aligned} \tag{B. 1}$$

を得ることができ, これは

$$\tilde{x}_\alpha^w(B) \in \tilde{\mathcal{A}}$$

を意味する。

(b) $\rightarrow$ (a) : R^n の任意の開集合 G は明らかに $\mathcal{B}(R^n)$ の要素である。このことは (b) $\rightarrow$ (b)' を意味する。従って, 補題 B. 1 から (b) $\rightarrow$ (b)' $\rightarrow$ (a)

であることが分かる。

定理 3. 3 の証明

(i) $\{\alpha_r^- \mid r = 1, 2, \dots\}$ は (2. 11) で与えられるように $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r^- = \alpha$ かつ各 r に対して $\alpha_r^- \in (\alpha, 1)$ である厳密に単調減少する系列とする。このとき (2. 13) から

$$L_\alpha \tilde{x} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \tilde{x}_{\alpha_r^-}(\tilde{\omega}) \quad (\text{B. 2})$$

となる。また $\tilde{x}_{\alpha_r^-}(\tilde{\omega})$ は $\mathcal{A}$ 可測であるので、 R^n の任意の Borel 集合 A に対して

$$\begin{aligned} (L_\alpha \tilde{x})^c(A) &= \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid L_\alpha \tilde{x}(\tilde{\omega}) \subset A\} \\ &= \left\{ \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \bigcup_{r=1}^{\infty} \tilde{x}_{\alpha_r^-}(\tilde{\omega}) \subset A \right\} \\ &= \bigcap_{r=1}^{\infty} \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_{\alpha_r^-}(\tilde{\omega}) \subset A\} \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (\text{B. 3})$$

となる。従って、定理 3. 2 を用いることにより、 $L_\alpha \tilde{x}$ は $\mathcal{A}$ 可測であることが分かる。

(ii) $\{\alpha_r^+ \mid r = 1, 2, \dots\}$ は (2. 12) で与えられるように $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r^+ = \alpha$ かつ各 r に対して $\alpha_r^+ \in (0, \alpha)$ である厳密に単調増加する系列とする。このとき (2. 14) から

$$L_\alpha \tilde{x} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \tilde{x}_{\alpha_r^+}(\tilde{\omega}) \quad (\text{B. 4})$$

となり、 $\tilde{x}_{\alpha_r^+}$ がコンパクトかつ凸であることから $L_\alpha \tilde{x}$ もそうであることが分かる。 $\tilde{x}_{\alpha_r^+}(\tilde{\omega})$ は $\mathcal{A}$ 可測で、 $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ に対して $\tilde{x}_{\alpha_1^+}(\tilde{\omega}) \supseteq \tilde{x}_{\alpha_2^+}(\tilde{\omega}) \supseteq \dots$ であるから、任意の $A \in \mathcal{B}(R^n)$ において

$$\begin{aligned}
 (L_{\tilde{a}} \tilde{x})^w(A) &= \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid L_{\tilde{a}} \tilde{x}(\tilde{\omega}) \cap A \neq \emptyset\} \\
 &= \left\{ \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \bigcap_{r=1}^{\infty} (\tilde{x}_{a_r}(\tilde{\omega}) \cap A) \neq \emptyset \right\} \\
 &= \bigcap_{r=1}^{\infty} \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_{a_r}(\tilde{\omega}) \cap A \neq \emptyset\} \in \mathcal{A} \quad (\text{B. 5})
 \end{aligned}$$

が成立する。従って $(L_{\tilde{a}} \tilde{x})^w(A) \in \mathcal{A}$ であることがわかり、これより $L_{\tilde{a}} \tilde{x}$ は $\mathcal{A}$ 可測であることが定理 3. 2 より分かる。

(iii) R^n の任意の閉集合 A に対して

$$\begin{aligned}
 (\text{supp. } \tilde{x})^s(A) &= (\text{cl. } L_0 \tilde{x})^s(A) \\
 &= \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \text{cl. } L_0 \tilde{x}(\tilde{\omega}) \subset A\} \\
 &= \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid L_0 \tilde{x}(\tilde{\omega}) \subset A\} \\
 &= (L_0 \tilde{x})^s(A) \quad (\text{B. 6})
 \end{aligned}$$

である。また、(i)と同様な手順によって $(L_0 \tilde{x})^s(A) \in \mathcal{A}$ であることが分かる。従って、任意の R^n の閉部分集合 A に対して

$$(\text{supp. } \tilde{x})^s(A) \in \mathcal{A} \quad (\text{B. 7})$$

であることが分かる。さらに、

$$\tilde{\Omega} \setminus (\text{supp. } \tilde{x})^s(A) = (\text{supp. } \tilde{x})^w(R^n \setminus A) = (\text{supp. } \tilde{x})^w(A^c) \quad (\text{B. 8})$$

であることが示せるから、 R^n の任意の開集合 B に対して

$$(\text{supp. } \tilde{x})^s(B) \in \mathcal{A} \quad (\text{B. 9})$$

であることが分かる。よって補題 B. 1 より $\text{supp. } \tilde{x}$ は $\mathcal{A}$ 可測な対応であることが分かる。

(iv) $\alpha = 1$ に対しても (B.4) であるので, $L_1 \tilde{x}(\tilde{\omega})$ の $\mathcal{A}$ 可測性を(ii)と同様の手法によって示すことができる。

定理 3.4 の証明

R^n の開集合 A を

$$A = \{x \in R^n \mid x_i < c; x_i \text{ は } x = (x_1, \dots, x_n)' \text{ の } i \text{ 番目の要素}\} \quad (\text{B.10})$$

によって定義する。 $\tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})$ はコンパクトであるので, $x = (x_1, \dots, x_n)'$ の各要素 $x_i (i=1, 2, \dots)$ は

$$\begin{aligned} \inf \tilde{x}_{\alpha, i}(\tilde{\omega}) &= \inf \{x_i \mid x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})\} \\ &= \min \{x_i \mid x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})\} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

および

$$\begin{aligned} \sup \tilde{x}_{\alpha, i}(\tilde{\omega}) &= \sup \{x_i \mid x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})\} \\ &= \max \{x_i \mid x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})\}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

を満たす。従って

$$\begin{aligned} \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \inf \tilde{x}_{\alpha, i}(\tilde{\omega}) < c\} &= \left\{ \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \min_{x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})} x_i < c \right\} \\ &= \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \cap A \neq \emptyset\} \\ &= \tilde{x}_\alpha^w(A) \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

かつ

$$\begin{aligned} \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \sup \tilde{x}_{\alpha, i}(\tilde{\omega}) < c\} &= \left\{ \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \max_{x \in \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega})} x_i < c \right\} \\ &= \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x}_\alpha(\tilde{\omega}) \subset A\} \\ &= \tilde{x}_\alpha^s(A) \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

であることが、 $\tilde{x}_\alpha$ が $\mathcal{A}$ 可測であることと、定理 3. 2 で示された 4 つの可測性の同等性より導出できる。

定理 3. 5 の証明

(i) 最初に $\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha$ は $\mathcal{X}_c^n$ から $\mathcal{X}^{n \times n}$ への連続写像であることを示す。 $\mathcal{X}_c^n$ の任意の 2 点 $\tilde{x}_\alpha$ と $\tilde{y}_\alpha$ に対して、 $\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha$ と $\tilde{y}_\alpha \boxtimes \tilde{y}'_\alpha$ の間の距離は

$$A \in \tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha = \{W \mid W = xx', x \in \tilde{x}_\alpha\} \Rightarrow A = aa', a \in \tilde{x}_\alpha \quad (\text{B. 15})$$

および

$$B \in \tilde{y}_\alpha \boxtimes \tilde{y}'_\alpha = \{W \mid W = yy', y \in \tilde{y}_\alpha\} \Rightarrow B = bb', b \in \tilde{y}_\alpha \quad (\text{B. 16})$$

であるから、

$$\begin{aligned} d_H(\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha, \tilde{y}_\alpha \boxtimes \tilde{y}'_\alpha) \\ = \max \left\{ \sup_{A \in \tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha} \inf_{B \in \tilde{y}_\alpha \boxtimes \tilde{y}'_\alpha} \|A - B\|, \sup_{B \in \tilde{y}_\alpha \boxtimes \tilde{y}'_\alpha} \inf_{A \in \tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha} \|A - B\| \right\} \\ = \max \left\{ \sup_{a \in \tilde{x}_\alpha} \inf_{b \in \tilde{y}_\alpha} \|aa' - bb'\|, \sup_{b \in \tilde{y}_\alpha} \inf_{a \in \tilde{x}_\alpha} \|aa' - bb'\| \right\} \end{aligned} \quad (\text{B. 17})$$

で与えられる。 $\tilde{x}_\alpha$ と $\tilde{y}_\alpha$ は R^n の空でないコンパクト集合であるから

$$\sup_{a \in \tilde{x}_\alpha} \|a\| \leq \frac{M}{2} \quad \text{と} \quad \sup_{b \in \tilde{y}_\alpha} \|b\| \leq \frac{M}{2} \quad (\text{B. 18})$$

を満たす M が存在することが分かる。さらに

$$\begin{aligned} \|aa' - bb'\| &= \|aa' - ab' + ab' - bb'\| \\ &\leq \|aa' - ab'\| + \|ab' - bb'\| \\ &\leq \|a\| \|a - b\| + \|b\| \|a - b\| \\ &= (\|a\| + \|b\|) \|a - b\| \end{aligned} \quad (\text{B. 19})$$

であるから, (B. 18) と (B. 19) より

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \tilde{x}_\alpha} \inf_{b \in \tilde{y}_\alpha} \|aa' - bb'\| &\leq \sup_{a \in \tilde{x}_\alpha} \inf_{b \in \tilde{y}_\alpha} (\|a\| + \|b\|) \|a - b\| \\ &\leq M \sup_{a \in \tilde{x}_\alpha} \inf_{b \in \tilde{y}_\alpha} \|a - b\| \end{aligned} \quad (\text{B. 20})$$

かつ

$$\begin{aligned} \sup_{b \in \tilde{y}_\alpha} \inf_{a \in \tilde{x}_\alpha} \|aa' - bb'\| &\leq \sup_{b \in \tilde{y}_\alpha} \inf_{a \in \tilde{x}_\alpha} (\|a\| + \|b\|) \|a - b\| \\ &\leq M \sup_{b \in \tilde{y}_\alpha} \inf_{a \in \tilde{x}_\alpha} \|a - b\| \end{aligned} \quad (\text{B. 21})$$

となる。(B. 20) と (B. 21) を (B. 17) に代入することによって

$$d_H(\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \boxtimes \tilde{y}_\alpha) \leq M d_H(\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha) \quad (\text{B. 22})$$

を得る。従って $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon/M$ とすると, $d_H(\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha) < \delta$ であれば

$$d_H(\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha, \tilde{y}_\alpha \boxtimes \tilde{y}'_\alpha) < \varepsilon \quad (\text{B. 23})$$

であることが分かる。すなわち $\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha$ は $\mathcal{X}_c^n$ の任意の点 $\tilde{x}_\alpha$ に関して連続であることが分かる。また定理 2. 2 を写像 $f(\tilde{x}) = \tilde{x} \boxtimes \tilde{x}'$ に適用することにより, $\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}'$ は $\mathcal{B}(R^{n \times n})$ の要素であり, (3. 17) と (3. 18) が成立することが分かる。

(ii) E を可測空間 $(\mathcal{X}^{n \times n}, \mathcal{B}(\mathcal{X}^{n \times n}))$ における開部分集合とする。 $\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha$ は $\tilde{x}_\alpha$ の連続写像であるから

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}_\alpha)^{-1}(E) &= \{\tilde{x}_\alpha \mid \tilde{x}_\alpha \in \mathcal{X}_c^n, \tilde{x}_\alpha \boxtimes \tilde{x}'_\alpha \in E\} \\ &\in \mathcal{B}(\mathcal{X}_c^n) \end{aligned} \quad (\text{B. 24})$$

が成立する。従って (3.16) が成り立つことが分かる。