

2つの m -out-of- M : G 型から成る システムの信頼度解析

中 道 博

1. は し が き

多数の構成要素から成るシステムにおいて、その構成要素のうちいくつかの作動しない要素があっても、システムとしての機能は支障なく満足に果たされるという状況は現実に数多く存在する。逆に、システムの機能を維持するために予備の要素を多数備えてシステム構成をすることがある。このようなシステムは一般に冗長システムといわれており、特に、 M 個の要素のうち m 個以上が正常に作動しているならば、システムとしては正常に作動しているとすると、このシステムを m -out-of- M : G システムという。

ここで取り扱うシステムは、1つのサブシステムが m -out-of- M : G であり、もう1つのサブシステムが n -out-of- N : G である2つのサブシステムから構成されているシステムである。このシステムのモデルとしては、例えば、大学の計算センターなどでは、複数のラボを持って業務を行っている場合が多い。いま、仮に2つのラボ L_A , L_B を考え、 L_A は M 個、 L_B は N 個のそれぞれ同一機器を備えているとする。それぞれのラボでは少なくとも m 個および n 個の機器が正常に作動していなければ、ラボとしての機能が満足に果たせないとする。もし、稼働可能な機器が m 個ま

たは n 個より少なくなれば、システムとしては本来のラボ機能の遂行から見て一種の故障とみなし、即座にラボで稼働していたすべての機器を停止して、これまでに故障していたすべての機器を、直ちに修理ステーションに送り、修理（または、新品と取り替え）を実施して、修理がすべて完了すれば直ちに元に戻してシステムの稼働を再開させることとする。

この小論では、このようなシステム、すなわち、2つの m -out-of- M : G タイプのサブシステムから構成されるシステムの信頼度を解析する。

なお、単独の m -out-of- M システムに関する研究については数多くある。¹⁻³⁾直列システムでは、特に大規模になればその信頼度は極度に低下し高信頼度がえられないし、逆に、並列システムでは、高信頼度が得られるものの非常に高価なものになる。そこで、新しいシステムとして m -out-of- M システムが注目され、1980年前半から数多くの研究がなされている。これらの文献については、最近 M. T. Chao らにより、 m -out-of- M システム⁴⁾に関する信頼度研究のサーベイを発表しており掲載されている。

2. システムとモデルの性質

システムは2種類のサブシステム S_1 および S_2 で構成されている。 S_1 は M 個の同一要素からなり、また、 S_2 は N 個の同一要素で構成されている。ただし、 S_1 、 S_2 の要素は必ずしも同一でなくてもよい。

全体システムは、 S_1 に属する M 個の要素のうち少なくとも m 個以上が作動しており、かつ、 S_2 に属する N 個の要素のうち少なくとも n 個以上が作動しておれば十分その機能が果たせるものとする。すなわち、 S_1 は m -out-of- M : G システムであり、 m 個が現用、残りの要素が熱予備(hot-standby)として用いられていると考えてよい。また、 S_2 についても n -out-of- N : G システムであり、同様に考えてよい。

S_1 内の $M-m-1$ 個以上の要素の故障に起因するシステム故障をA-故

障 (type-A breakdown) と呼び、また、 S_2 内の $N-n-1$ 個以上の要素の故障によるシステム故障を B-故障 (type-B breakdown) と呼ぶことにする。A-故障または B-故障いずれに起因するシステム故障でも、これが生起すれば直ちに S_1 および S_2 内のこれまでに故障している全ての要素が修理ステーションにまわされ修理される。全部の修理が完了すれば直ちに元にもどされ、システムは再び稼働状態に入る。システムの各構成要素の故障は、それぞれ独立なポアソン過程で生起し、A-故障および B-故障の修理による再生過程はそれぞれ独立に一般分布に従うものとする。また、各故障の発見および修理、回復への切り替え (switching) は確実に行われ、切り替え時間は無視できるものとする。さらに、修理ステーションの窓口は 1 つとする。

3. モデルの解析

〈記号〉

以下の解析で用いる記号および修理時間分布の仮定を次のようにする。

$E(i, j)$: S_1 内の故障要素の数が i 個, S_2 内の故障要素の数が j 個である状態

$P_{i,j}(t)$: 時刻 t でシステムは作動状態にあり, S_1 内の故障要素の数が i 個, S_2 内の故障要素の数が j 個である確率

$Q_A(t), Q_B(t)$: 時刻 t でシステムが A-故障 (B-故障) である確率

$Q_A(x, t), Q_B(x, t)$: 時刻 t でシステムが A-故障 (B-故障) の状態にあり, その修理経過時間が x である確率

λ_i : S_i 内の同一要素の故障率 (一定) ($i=1, 2$)

$\mu_A(x), \mu_B(x)$: A-故障 (B-故障) の修理率

$f_A(x), f_B(x)$: A-故障 (B-故障) の修理時間分布の確率密度関数 (pdf)

$$f_A(x) = \mu_A(x) \exp \left[- \int_0^x \mu_A(\tau) d\tau \right]$$

$$f_B(x) = \mu_B(x) \exp \left[- \int_0^x \mu_B(\tau) d\tau \right]$$

T : システムが, その全ての要素が稼動可能な状態 $E(0, 0)$ から作動し
始め, 初めてシステム故障になるまでの時間

$\phi(t)$: T の確率密度関数 $\phi(t)dt = P\{t \leq T \leq t+dt\}$

$E(T)$: T の確率分布の平均 (MTTF)

$\bar{f}(s) \equiv \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$: $f(x)$ の Laplace 変換

〈定式化〉

時刻 t におけるシステムの状態推移に注意すると, 次のシステム状態方程式系がえられる。

$$(1) \quad \left(\frac{d}{dt} + M\lambda_1 + N\lambda_2 \right) P_{0,0}(t) = \int_0^t \mu_A(x) Q_A(x, t) dx \\ + \int_0^t \mu_B(x) Q_B(x, t) dx$$

$$(2) \quad \left\{ \frac{d}{dt} + (M-i)\lambda_1 + (N-j)\lambda_2 \right\} P_{i,j}(t) \\ = (M-i+1)\lambda_1 P_{i-1,j}(t) + (N-j+1)\lambda_2 P_{i,j-1}(t) \\ (1 \leq i \leq M-m, 1 \leq j \leq N-n)$$

$$(3) \quad \left\{ \frac{d}{dt} + (M-i)\lambda_1 + N\lambda_2 \right\} P_{i,0}(t) = (M-i+1)\lambda_1 P_{i-1,0}(t) \\ (1 \leq i \leq M-m)$$

$$(4) \quad \left\{ \frac{d}{dt} + M\lambda_1 + (N-j)\lambda_2 \right\} P_{0,j}(t) = (N-j+1)\lambda_2 P_{0,j-1}(t) \\ (1 \leq j \leq N-n)$$

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \mu_A(x) \right\} Q_A(x, t) = 0$$

$$(6) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \mu_B(x) \right\} Q_B(x, t) = 0$$

• 境界条件：

$$(7) \quad Q_A(0, t) = m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} P_{M-m, j}(t)$$

$$(8) \quad Q_B(0, t) = n\lambda_2 \sum_{i=0}^{M-m} P_{i, N-n}(t)$$

• 初期条件：

$$(9) \quad P_{0,0}(0) = 1, \quad t = 0 \text{ における他の状態確率は全て } 0.$$

〈状態確率〉

以上の方程式系を解くために、初期条件 (9) のもとで (1)～(8) の t に関する Laplace 変換をとると、

$$(1)' \quad (s + M\lambda_1 + N\lambda_2) \bar{P}_{0,0}(s) = 1 + \int_0^\infty \mu_A(x) \bar{Q}_A(x, s) dx \\ + \int_0^\infty \mu_B(x) \bar{Q}_B(x, s) dx$$

$$(2)' \quad \{s + (M-i)\lambda_1 + (N-j)\lambda_2\} \bar{P}_{i,j}(s) \\ = (M-i+1)\lambda_1 \bar{P}_{i-1,j}(s) + (N-j+1)\lambda_2 \bar{P}_{i,j-1}(s) \\ (1 \leq i \leq M-m, \quad 1 \leq j \leq N-n)$$

$$(3)' \quad \{s + (M-i)\lambda_1 + N\lambda_2\} \bar{P}_{i,0}(s) = (M-i+1)\lambda_1 \bar{P}_{i-1,0}(s) \\ (1 \leq i \leq M-m)$$

$$(4)' \quad \{s + M\lambda_1 + (N-j)\lambda_2\} \bar{P}_{0,j}(s) = (N-j+1)\lambda_2 \bar{P}_{0,j-1}(s) \\ (1 \leq j \leq N-n)$$

$$(5)' \quad \left\{ s + \frac{\partial}{\partial x} + \mu_A(x) \right\} \bar{Q}_A(x, s) = 0$$

$$(6)' \quad \left\{ s + \frac{\partial}{\partial x} + \mu_B(x) \right\} \bar{Q}_B(x, s) = 0$$

$$(7)' \quad \bar{Q}_A(0, s) = m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s)$$

$$(8)' \quad \bar{Q}_B(0, s) = n\lambda_2 \sum_{i=0}^{M-m} \bar{P}_{i, N-n}(s)$$

(1)'～(8)' の連立方程式からシステムの状態確率 (Laplace 変換形) を求める。

先づ, (5)'～(8)' より,

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{Q}_A(x, s) &= \bar{Q}_A(0, s) \exp \left[-sx - \int_0^x \mu_A(\tau) d\tau \right] \\ &= m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s) \exp \left[-sx - \int_0^x \mu_A(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

$$(11) \quad \bar{Q}_B(x, s) = n\lambda_2 \sum_{i=0}^{M-m} \bar{P}_{i, N-n}(s) \exp \left[-sx - \int_0^x \mu_B(\tau) d\tau \right]$$

次に, (3)' および (4)' より,

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{i, 0}(s) &= \frac{(M-i+1)\lambda_1}{s + (M-i)\lambda_1 + N\lambda_2} \bar{P}_{i-1, 0}(s) \\ &= \frac{M-(i-1)}{M-i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s + N\lambda_2}{(M-i)\lambda_1}} \bar{P}_{i-1, 0}(s) \\ &= \frac{M-(i-1)}{M-i} \cdot \frac{1}{g_1(s, i, 0)} \bar{P}_{i-1, 0}(s) \quad (1 \leq i \leq M-m) \end{aligned}$$

$$(13) \quad \bar{P}_{0, j}(s) = \frac{N-(j-1)}{N-j} \cdot \frac{1}{g_2(s, 0, j)} \bar{P}_{0, j-1}(s) \quad (1 \leq j \leq N-n)$$

をうる。ただし, ここで

$$(14) \quad \begin{cases} g_1(s, i, j) \equiv 1 + \frac{s + (N-j)\lambda_2}{(M-i)\lambda_1} \\ g_2(s, i, j) \equiv 1 + \frac{s + (M-i)\lambda_1}{(N-j)\lambda_2} \end{cases}$$

同様に, (2)' より,

$$(15) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{i,j}(s) = & \frac{M-(i-1)}{M-i} \cdot \frac{1}{g_1(s, i, j)} \bar{P}_{i-1,j}(s) \\ & + \frac{N-(j-1)}{N-j} \cdot \frac{1}{g_2(s, i, j)} \bar{P}_{i,j-1}(s) \end{aligned}$$

をえる。

いま, (12) の漸化式より,

$$\begin{aligned} \bar{P}_{i,0}(s) &= \frac{M-(i-1)}{M-i} \cdot \frac{1}{g_1(s, i, 0)} \bar{P}_{i-1,0}(s) \\ \bar{P}_{i-1,0}(s) &= \frac{M-(i-2)}{M-(i-1)} \cdot \frac{1}{g_1(s, i-1, 0)} \bar{P}_{i-2,0}(s) \\ &\vdots \\ \bar{P}_{1,0}(s) &= \frac{M}{M-1} \cdot \frac{1}{g_1(s, 1, 0)} \bar{P}_{0,0}(s) \end{aligned}$$

これより,

$$(16) \quad \bar{P}_{i,0}(s) = \frac{M}{M-i} \left(1 / \prod_{k=1}^i g_1(s, k, 0) \right) \bar{P}_{0,0}(s) \quad (1 \leq i \leq M-m)$$

同様に, (13) の漸化式より,

$$(17) \quad \bar{P}_{0,j}(s) = \frac{N}{N-j} \left(1 / \prod_{k=1}^j g_2(s, 0, k) \right) \bar{P}_{0,0}(s) \quad (1 \leq j \leq N-n)$$

をえる。

特に, $i=M-m$, $j=N-n$ のとき,

$$(18) \quad \bar{P}_{M-m,0}(s) = \frac{M}{m} \left(1 / \prod_{k=1}^{M-m} g_1(s, k, 0) \right) \bar{P}_{0,0}(s)$$

$$(19) \quad \bar{P}_{0, N-n}(s) = \frac{N}{n} \left(1 / \prod_{k=1}^{N-n} g_2(s, 0, k) \right) \bar{P}_{0,0}(s)$$

また, (15) より,

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{M-m, j}(s) = & \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{g_1(s, M-m, j)} \bar{P}_{M-m-1, j}(s) \\ & + \frac{N-(j-1)}{N-j} \cdot \frac{1}{g_2(s, M-m, j)} \bar{P}_{M-m, j-1}(s) \end{aligned}$$

$$(1 \leq j \leq N-n)$$

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{i, N-n}(s) = & \frac{M-(i-1)}{M} \cdot \frac{1}{g_1(s, i, N-n)} \bar{P}_{i-1, N-n}(s) \\ & + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{g_2(s, i, N-n)} \bar{P}_{i, N-n-1}(s) \end{aligned}$$

$$(1 \leq i \leq M-m)$$

この (20), (21) の漸化式を順次適用すると, $\bar{P}_{M-m, j}(s)$ および $\bar{P}_{i, N-n}(s)$ は (18), (19) のみで表わすことができ, 結局 $\bar{P}_{0,0}(s)$ だけで表わされる。

したがって, ここで,

$$(22) \quad \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s) \equiv A(s) \bar{P}_{0,0}(s) \\ \sum_{i=0}^{M-m} \bar{P}_{i, N-n}(s) \equiv B(s) \bar{P}_{0,0}(s) \end{cases}$$

とすると, (18), (19) を基にして $\bar{P}_{0,0}(s)$ の係数 $A(s)$, $B(s)$ を求めることができる。

一方, $\bar{P}_{0,0}(s)$ は (7)', (8)' を (1)' に代入して,

$$(23) \quad (s + M\lambda_1 + N\lambda_2) \bar{P}_{0,0}(s) = 1 + m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s) \cdot \int_0^\infty \mu_A(x) \exp \left[-sx - \int_0^x \mu_A(\tau) d\tau \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 & +n\lambda_2 \sum_{i=0}^{M-m} \bar{P}_{i, N-n}(s) \int_0^\infty \mu_B(x) \exp \left[-sx - \int_0^x \mu_B(\tau) d\tau \right] dx \\
 & = 1 + m\lambda_1 \bar{f}_A(s) \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s) + n\lambda_2 \bar{f}_B(s) \sum_{i=0}^{M-m} \bar{P}_{i, N-n}(s)
 \end{aligned}$$

したがって、いま、(22) の $A(s)$, $B(s)$ を用いて、

$$(24) \quad K(s) \equiv (s + M\lambda_1 + N\lambda_2) - m\lambda_1 \bar{f}_A(s)A(s) - n\lambda_2 \bar{f}_B(s)B(s)$$

とすると、(23) より $\bar{P}_{0,0}(s)$ は

$$(25) \quad \bar{P}_{0,0}(s) = K(s)^{-1}$$

で求まる。

これにより、システムが作動状態にある全ての状態確率の Laplace 変換形 $\bar{P}_{i,j}(s)$ がすべて求まる。

〈MTTF と定常アベイラビリティ〉

次に、時刻 $t=0$ でシステムが $E(0, 0)$ の状態から作動し始め、初めて故障するまでの時間 T の確率分布を考える。

いま、 T の確率密度関数を $\phi(t)$ すなわち、

$$P\{t \leq T \leq t+dt\} = \phi(t)dt \quad \text{とすると、}$$

$$(26) \quad \phi(t) = m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} P_{M-m, j}(t) + n\lambda_2 \sum_{i=0}^{M-m} P_{i, N-n}(t)$$

である。

この Laplace 変換形は、(22) を用いて、

$$\begin{aligned}
 (27) \quad \bar{\phi}(s) & = m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s) + n\lambda_2 \sum_{i=0}^{M-m} \bar{P}_{i, N-n}(s) \\
 & = \{m\lambda_1 A(s) + n\lambda_2 B(s)\} \bar{P}_{0,0}(s)
 \end{aligned}$$

となる。

したがって、システムが初めて故障を起こすまでの平均時間 MTTF (Mean Time to Failure) は、

$$(28) \quad E(T) = -\frac{1}{ds} \bar{\phi}(s) \Big|_{s=0}$$

として求まる。

また、定常状態におけるシステムのアベイラビリティ (Availability) $P(\infty)$ は次のようにして求めることができる。

$$(29) \quad Q_A(t) \equiv \int_0^\infty Q_A(x, t) dx, \quad Q_B(t) \equiv \int_0^\infty Q_B(x, t) dx$$

とすると、 $Q_A(t)$ は時刻 t において S_1 の要素の故障により生起したシステム故障 (A-故障) 状態にあり、また、同様に $Q_B(t)$ は B-故障にある状態確率を表わしている。

(29) の Laplace 変換をとると、(10)、(11) および (22) より、

$$\begin{aligned} (30) \quad \bar{Q}_A(s) &= \int_0^\infty \bar{Q}_A(x, s) dx \\ &= m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s) \int_0^\infty \exp \left[-sx - \int_0^x \mu_A(\tau) d\tau \right] dx \\ &= m\lambda_1 \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{M-m, j}(s) \cdot \frac{1}{s} (1 - \bar{f}_A(s)) \\ &= m\lambda_1 A(s) (1 - \bar{f}_A(s)) \bar{P}_{0,0}(s) / s \end{aligned}$$

同様に、

$$(31) \quad \bar{Q}_B(s) = n\lambda_2 B(s) (1 - \bar{f}_B(s)) \bar{P}_{0,0}(s) / s$$

時刻 t におけるシステムの状態は、互いに排反的な作動状態、A-故障および B-故障の状態のいずれかにある。

したがって、次の関係式が成立する。

$$(32) \quad \sum_{i=0}^{M-m} \sum_{j=0}^{N-n} P_{i,j}(t) + Q_A(t) + Q_B(t) = 1$$

Laplace 変換形では,

$$(33) \quad \sum_{i=0}^{M-m} \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{i,j}(s) + \bar{Q}_A(s) + \bar{Q}_B(s) = \frac{1}{s}$$

いま, $\bar{P}(s) \equiv \sum_{i=0}^{M-m} \sum_{j=0}^{N-n} \bar{P}_{i,j}(s)$ とすると,

$$(34) \quad \begin{aligned} \bar{P}(s) &= \frac{1}{s} - \{\bar{Q}_A(s) + \bar{Q}_B(s)\} \\ &= \frac{1}{s} [1 - \{m\lambda_1 A(s)(1 - \bar{f}_A(s)) \\ &\quad + n\lambda_2 B(s)(1 - \bar{f}_B(s))\} \bar{P}_{0,0}(s)] \end{aligned}$$

この $\bar{P}(s)$ は時刻 t でシステムが作動状態にいる確率 $P(t)$ の Laplace 変換形である。もし, $P(t)$ に定常状態での解 $P(\infty)$ が存在するならば, Laplace 変換の性質より,

$$(35) \quad P(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{P}(s)$$

で求めることができる。

(24), (34) より,

$$(36) \quad P(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + M\lambda_1 + N\lambda_2) - (m\lambda_1 A(s) + n\lambda_2 B(s))}{K(s)}.$$

〈例〉

ケース 1. (簡単モデル例): $M=N=2$, $m=n=1$ の場合

(12), (13), (15) より,

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1,0}(s) &= \frac{2}{g_1(s, 1, 0)} \bar{P}_{0,0}(s), \quad \bar{P}_{0,1}(s) = \frac{2}{g_2(s, 0, 1)} \bar{P}_{0,0}(s) \\ \bar{P}_{1,1}(s) &= \frac{2}{g_1(s, 1, 1)} \bar{P}_{0,1}(s) + \frac{2}{g_2(s, 1, 1)} \bar{P}_{1,0}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{4}{g_1(s, 1, 1)g_2(s, 0, 1)} + \frac{4}{g_1(s, 1, 0)g_2(s, 1, 1)} \right\} \bar{P}_{0,0}(s) \\
A(s) &= \frac{2}{g_1(s, 1, 0)} \left\{ 1 + \frac{2}{g_2(s, 1, 1)} \right\} + \frac{4}{g_1(s, 1, 1)g_2(s, 0, 1)} \\
B(s) &= \frac{2}{g_2(s, 0, 1)} \left\{ 1 + \frac{2}{g_1(s, 1, 1)} \right\} + \frac{4}{g_1(s, 1, 0)g_2(s, 1, 1)} \\
H(s) &\equiv \lambda_1 A(s) + \lambda_2 B(s) \text{ とおく,}
\end{aligned}$$

ここで、システムの故障状態から $E(0, 0)$ への復帰する確率を 0, すなわち、 $\mu_A(x) = \mu_B(x) = 0$ とすると、 $\bar{P}_{0,0}(s) = 1/(s + 2\lambda_1 + 2\lambda_2)$ である。

この条件のもとで、 $\bar{\phi}(s)$ は (27) より、 $\bar{\phi}(s) = H(s)\bar{P}_{0,0}(s)$ である。したがって、 $E(T) = -\bar{\phi}'(s)|_{s=0}$ として MTTF が求まる。

いま、 $H(s)$ に関して、少し計算を加えて次の結果を得る。

$$H(0) = \lambda_1 A(0) + \lambda_2 B(0) = 2(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$H'(0) = \lambda_1 A'(0) + \lambda_2 B'(0)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ \frac{\lambda_1(\lambda_1 + 3\lambda_2)}{\lambda_1 + 2\lambda_2} + \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1 + \lambda_2} \right\}$$

したがって、 $\bar{\phi}'(s) = H'(s)\bar{P}_{0,0}(s) + H(s)\bar{P}'_{0,0}(s)$ より、

$$\bar{\phi}'(0) = -\frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \left[1 + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ \frac{\lambda_1(\lambda_1 + 3\lambda_2)}{\lambda_1 + 2\lambda_2} + \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1 + \lambda_2} \right\} \right]$$

これより、MTTF は次式でえられる。

$$E(T) = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \left[1 + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ \frac{\lambda_1(\lambda_1 + 3\lambda_2)}{\lambda_1 + 2\lambda_2} + \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1 + \lambda_2} \right\} \right]$$

なお、この結果は Natarajan の Model で、 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ とした場合の結果と一致する。

ケース 2. (特殊なモデル例): $N = 1, n = 1$ の場合

このケースでは、一般モデルでの (17) $\bar{P}_{0,i}(s)$ は存在せず、作動状態での状態確率は $\bar{P}_{i,0}(s)$ のみである。したがって、(16) より

$$\bar{P}_{i,0}(s) = \frac{M}{M-i} \left(\prod_{k=1}^i g_1(s, k, 0) \right)^{-1} \bar{P}_{0,0}(s) \quad (1 \leq i \leq M-m)$$

$$\text{特に, } \bar{P}_{M-m,0}(s) = \frac{M}{m} \left(\prod_{k=1}^{M-m} g_1(s, k, 0) \right)^{-1} \bar{P}_{0,0}(s)$$

これより,

$$\begin{aligned} K(s) &\equiv (s + M\lambda_1 + \lambda_2) - M\lambda_1 \left(\prod_{k=1}^{M-m} g_1(s, k, 0) \right)^{-1} \bar{f}_A(s) \\ &\quad - \lambda_2 \sum_{i=0}^{M-m} \frac{M}{M-i} \left(\prod_{k=1}^i g_1(s, k, 0) \right)^{-1} \bar{f}_B(s) \end{aligned}$$

ここで, $g_1(s, k, 0) \equiv g(s, M-k)$ $k=0, 1, 2, \dots, M-1$ とおき,
 $\prod_{k=1}^i g_1(s, k, 0) \equiv h_1(s, i)$, $\prod_{k=1}^i g(s, k) \equiv h(s, i)$ とすると,

$$h_1(s, i) = h(s, M-1)/h(s, M-i-1)$$

が成立つ。ただし, $h_1(s, 0) \equiv 1$ とする。

したがって,

$$s + M\lambda_1 + \lambda_2 = M\lambda_1 g(s, M) = M\lambda_1 h(s, M)/h(s, M-1)$$

に注意して,

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{M\lambda_1}{h(s, M-1)} \left\{ h(s, M) - h(s, m-1) \bar{f}_A(s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{i=0}^{M-m} \frac{h(s, M-i-1)}{M-i} \bar{f}_B(s) \right\} \\ &= \frac{M\lambda_1}{h(s, M-1)} \cdot L(s) \end{aligned}$$

ただし,

$$L(s) \equiv h(s, M) - h(s, m-1)\bar{f}_A(s) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{i=0}^{M-m} \frac{h(s, M-i-1)}{M-i} \bar{f}_B(s)$$

これより、システムの状態確率の Laplace 変換形は、

$$\begin{cases} \bar{P}_{0,0}(s) = \frac{h(s, M-1)}{M\lambda_1 L(s)} \\ \bar{P}_{i,0}(s) = \frac{h(s, M-i-1)}{(M-i)\lambda_1 L(s)} \quad (1 \leq i \leq M-m) \end{cases}$$

として求まり、また、定常状態でのアベイラビリティ $P(\infty)$ は、

$$P(\infty) = \frac{h(0, M) - h(0, m-1)}{\lambda_2 L'(0)}$$

として求まる。

これらの結果は、中道の Model で、 $\sum_{k=1}^N \lambda_i \bar{f}_{k,i}(s) \equiv \lambda_2 \bar{f}_B(s)$ とした結果と一致している。

参 考 文 献

- 1) D. G. Linton : Reliability Analysis of the k -out-of- n : F System, IEEE Trans. Rel., Vol. R-28, No. 2, 1974
- 2) R. E. Barlow, K. D. Heidtmann : Computing k -out-of- n system reliability, IEEE Trans. Rel. Vol. R-33, 1984
- 3) T. Risse : On the evaluation of the reliability of k -out-of- n systems; IEEE Trans. Rel. Vol. R-36, 1987
- 4) M. T. Chao, J. C. Fu, M. V. Koutras : Survey of Reliability Studies of Consecutive- k -out-of- n : F & Related Systems, IEEE Trans. Rel. Vol. 44, 1995
- 5) R. Natarajan : Assignment of Priority in Improving System reliability, IEEE Trans. Rel. Vol. R-16, 1967
- 6) 中道 博 : m -out-of- M : G システムを含む直並列混合システムの信頼度解析, 追手門経済・経営研究 No. 1, 1994