追手門経営論集，Vol. 7, No. 1,
pp. 67-95, June, 2001
Received April 4, 2001

人の感性に関するデータの統計学的処理のためのプログラムについて*

福　田　得　夫

概　　要

本論文では，アンケート調査などで得られる，人の感性などの本質的に曖昧でかつ個々人によって異なる回答を，曖昧性と不規則性を共に有する一種の「ファジィ確率ベクトル」の実現値として捉え，その統計学的性質を推定する手法をコンピュータプログラムとして実現し，実際のアンケート調査の結果整理に応用することを試みる。

まず，元々曖昧で各個人によって異なる回答を，曖昧性と不規則性を同時に有するファジィ確率ベクトルとして定義すること，また次に，その統計学的モーメントと推定法の導出について概観する。

最後に，提案した曖昧不規則データに対する統計学的処理手法を実現するコンピュータプログラムパッケージを開発し，中高年者の自転車のデザインの好みに関するアンケート調査結果の統計処理を試みる。

キーワード：曖昧確率ベクトル，ファジィ集合の集合表現，曖昧不規則データ

1．ファジィ集合（II型）の集合表現

本論文では，ファジィ集合 $\tilde{U}$ は次の三つ組

＊本研究の一部は文部省科学研究費補助金（基盤研究(C)(2) No. 11680461）の補助を受けた。

$$\tilde{U}(X, \{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{U}}) \tag{1. 1}$$

で定義される。ただしここでXは基礎空間，$s_{\tilde{U}}$ は基礎空間Xから議論空間$\mathcal{P}$への写像$s_{\tilde{U}}$: X→$\mathcal{P}$である述語であり，各$x \in X$に対して次の命題を与える。

$$s_{\tilde{U}}(x) = \{x \text{ は } \tilde{U} \text{ に含まれる}\} \tag{1. 2}$$

また，$\{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は$\forall \alpha \in (0, 1)$ に対して

$$L_\alpha \tilde{U} \subseteq \tilde{U}_\alpha \subseteq L_{\bar{\alpha}} \tilde{U} \tag{1. 3}$$

を満たすXの部分集合属である。ここで，$L_\alpha \tilde{U}$ と $L_{\bar{\alpha}} \tilde{U}$ はそれぞれ $\tilde{U}$ のレベルαでの強カットおよびレベル集合と呼ばれ

$$L_\alpha \tilde{U} = \{x \mid (\tilde{U})(x) > \alpha\} \qquad (\text{各}\alpha \in [0, 1) \text{ に対して})$$

と

$$L_{\bar{\alpha}} \tilde{U} = \{x \mid (\tilde{U})(x) \geq \alpha\} \qquad (\text{各}\alpha \in (0, 1] \text{ に対して})$$

によって与えられる。ただし $(\tilde{U})(x)$ は多値論理における真理値関数

$$(\tilde{U})(x) = t(s_{\tilde{U}}(x))$$

として与えられる $\tilde{U}$ のメンバーシップ関数である。本論文では，(1. 3) を満たす集合属 $\{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ を，ファジィ集合 $\tilde{U}$ に対する集合表現と呼ぶことにする。

ところで，著者は別のタイプのファジィ集合を既に提案しており，そこでは述語は (1. 2) ではなく

$$s_{\tilde{U}}(x) = \{x \text{ は } u_o \text{ に一致する}\} \tag{1. 4}$$

で与えられていた [1, 2, 3]。ただし，上式の u_o はオリジナルポイントと

呼ばれるもので，このような述語によって記述されるファジィ集合はオリジナルポイント u_o を曖昧に識別することのよって得られるものと考えた。それに対して，命題（1.2）を与える述語を持つファジィ集合は，たとえば複雑な現象を言語により曖昧に表現した場合などのように，それ自体が元々曖昧である場合の数学モデルと考えることができる。

上記2つのタイプのファジィ集合を区別するため，述語が（1.4）で与えられるファジィ集合をI型，（1.2）で与えれるファジィ集合をII型と呼ぶことにするが，本論文では主にII型のファジィ集合を取り扱うので，特に混乱の恐れがない限りは型の記述は省略する。

基礎空間 X を距離空間，$\{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ はファジィ集合 $\tilde{U}$ の集合表現とする。このとき，

1．$\bigcap_{\alpha \in (0,1)} \tilde{U}_\alpha \neq \emptyset$,
2．各 $\alpha \in (0, 1)$ に対して $\tilde{U}$ はコンパクト
3．$\mathrm{supp.}\,\tilde{U} = \mathrm{cl.} \bigcup_{\alpha \in (0,1)} \tilde{U}_\alpha$ で定義される $\mathrm{supp.}\,\tilde{U}$ もコンパクト

を満たすファジィ集合の集まりを $\mathbb{G}(\mathrm{X})$ で表すことにする。さらに，$\mathbb{G}(\mathrm{X})$ の要素であるファジィ集合 $\tilde{U}$ の集合表現の各構成要素が凸であるとき，そのような集合の集まりを $\mathbb{G}_c(\mathrm{X})$ で表すことにする。また，基礎空間 X が n-次元ユークリッド空間 R^n であるとき，$\mathbb{G}_c(\mathrm{R}^n)$ の各要素を（n-次元）ファジィベクトルと呼び，$n=1$ のときファジィ数ということにする。以後，ファジィ数またはファジィベクトルは $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ のようにチルダー付のアルファベット小文字で表記する。

2．ファジィ集合間の演算

$f: \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \cdots \times \mathrm{X}_n \to \mathrm{Y}$ を直積距離空間 $\mathrm{X}_i (i=1, 2, \cdots, n)$ から距離空間 Y への写像とする。このとき，写像 f による像 $A_i \in \mathrm{X}_i (i=1, 2, \cdots, n)$ は

Y の部分集合

$$f(A)=\{y\in Y \mid y=f(x_1, \cdots, x_n),\ x_i\in A_i(i=1, 2, \cdots, n)\} \tag{2. 1}$$

で定義される。ここで，$\tilde{U}_i=(X, \{\tilde{U}_{i,\alpha} \mid \alpha\in(0, 1)\}, s_{\tilde{U}_i})$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ がファジィ集合であるとき，命題

$$s_{f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)}(y)=\{y=f(x_1, \cdots, x_n);\ x_i\in\tilde{U}_i(i=1, \cdots, n)\} \tag{2. 2}$$

を考察しよう。そうすると，上記命題は次のような複合命題として表現できる。

$$s_{f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)}(y)=\bigvee_{x_i\in X_i(i=1, \cdots, n)}\left\{(y=f(x_1, \cdots, x_n))\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(s_{\tilde{U}_i}(x_i))\right)\right\}, \tag{2. 3}$$

ここで $s_{\tilde{U}_i}(x_i)$ は（1. 2）で与えられる命題である。したがって，Zadeh [4] によって提案されているファジィ集合の拡張原理の考え方を導入すると，$s_{f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)}(y)$ の真理値は次のように評価するのが妥当であると思われる。

$$t(s_{f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)}(y))=\sup_{x_i\in X_i(i=1, \cdots, n)}\left\{\min_{i=1, \cdots, n}(\tilde{U}_i)(x_i)\ \middle|\ y=f(x_1, \cdots, x_n)\right\} \tag{2. 4}$$

ただし，$\sup\emptyset=0$ とした．

定義 2. 1． 写像 f: $X_1\times\cdots\times X_n\to Y$ の一般化として与えられるファジィ関数 $f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)$ は

$$f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)=(Y\{f(\tilde{U}_{1,\alpha}, \cdots, \tilde{U}_{n,\alpha}) \mid \alpha\in(0, 1)\}, s_{f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)}) \tag{2. 5}$$

で定義される。ここで，$s_{f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)}$ は，命題（2. 2）を与える記述であり，$\tilde{U}_{i,\alpha}$ は $\tilde{U}_i$ の集合表現の構成要素である。

ファジィ関数 $f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)$ が次のような関係を満たすことは容易に示すことができる。

$$L_\alpha f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n) \subseteq f(L_\alpha \tilde{U}_1, \cdots, L_\alpha \tilde{U}_n) \subseteq f(\tilde{U}_{1,\alpha}, \cdots, \tilde{U}_{n,\alpha})$$
$$\subseteq f(L_{\overline{\alpha}} \tilde{U}_1, \cdots, L_{\overline{\alpha}} \tilde{U}_n) \subseteq L_{\overline{\alpha}} f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n). \tag{2.6}$$

定理2. 1． $\tilde{U}_i = (X_i, \{\tilde{U}_{i,\alpha} \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{U}i})(i=1, \cdots, n)$ を$\mathbb{G}(X_i)$ の要素であるファジィ集合，また，fを直積距離空間 $X_1 \times \cdots \times X_n$ から距離空間 Y へのファジィ関数とする。このとき，各$\alpha \in [0, 1)$ 対して

$$L_\alpha f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n) = f(L_\alpha \tilde{U}_1, \cdots, L_\alpha \tilde{U}_n) \tag{2.7}$$

が成立する。さらに，fが連続関数であるとき，$f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n)$ は$\mathbb{G}(Y)$ の要素であり，各$\alpha \in (0, 1]$ に対して

$$L_{\overline{\alpha}} f(\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_n) = f(L_{\overline{\alpha}} \tilde{U}_1, \cdots, L_{\overline{\alpha}} \tilde{U}_n) \tag{2.8}$$

を満たす。

定理 2.1 はＩ型のファジィ集合の同等の定理に対する証明と同様にして証明することができる [5]。

$\tilde{x}$をファジィ数とする。そうすると，通常の数 x の平方 x^2 に相当するファジィ集合は

$$\tilde{x}^2 = (R, \{\tilde{x}_\alpha^2 \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{x}^2}) \tag{2.9}$$

によって与られる。ここで，$\tilde{x}_\alpha$ は$\tilde{x}$の集合表現の構成要素で

$$\tilde{x}_\alpha^2 = \{y \mid y = x^2, x \in \tilde{x}_\alpha\} \quad \text{および} \quad s_{\tilde{x}^2}(x) = \{x \in \tilde{x}^2\} \tag{2.10}$$

である。また，定理 2.1 を（2.9）に適用することによって$\tilde{x}^2$はファジィ数，すなわち$\tilde{x}^2 \in \mathbb{G}_c(R)$ であり

$$L_\alpha \tilde{x}^2 = (L_\alpha \tilde{x})^2 \qquad (\text{各 } \alpha \in [0, 1) \text{ に対して}) \tag{2.11a}$$

および

$$L_{\overline{\alpha}} \tilde{x}^2 = (L_{\overline{\alpha}} \tilde{x})^2 \qquad (\text{各 } \alpha \in (0, 1] \text{ に対して}) \tag{2.11b}$$

を示すことができる。

3．ファジィ確率変数

3.1　ファジィ確率変数

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ を確率空間とする。ただし，$\mathfrak{A}$ は Ω の部分集合によって生成された σ–代数であり，P は確率測度である。ファジィ確率変数を定義するために，$\mathfrak{K}_c$ をRの空でない閉区間の族であり，$\mathfrak{B}(\mathfrak{K}_c)$ を，ハウスドロフ距離 [6] による $\mathfrak{K}_c$ の位相に関しての開集合より生成された最小 σ–代数とする。

定義 3.1． ファジィ確率変数$\tilde{x}$は

$$\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{G}_c(\mathrm{R}) \tag{3.1}$$

および

$$\tilde{x}(\omega) = (\mathrm{R}, \{\tilde{x}_\alpha(\omega) \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{x}}) \tag{3.2}$$

で与えられる。ここで $s_{\tilde{x}}$ は，命題

$$s_{\tilde{x}}(x. \omega) = \{x \text{ は} \tilde{x}(\omega) \text{ に含まれる}\} = \{x \in \tilde{x}(\omega)\} \tag{3.3}$$

を与える述語であり，集合表現 $\{\tilde{x}_\alpha \mid \alpha(0, 1)\}$ は Ω から $\mathfrak{K}_c$ への $\mathfrak{A}$–可測なコンパクトで凸である対応により構成される [6]。ファジィ確率変数$\tilde{x}$の可測性は$\forall B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}_C)$ に対して$\tilde{x}_\alpha^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ によって，すなわち関数$\tilde{x}_\alpha$のそれにより与えられる[1]。

1）　I型のファジィ確率変数では，曖昧識別による情報欠落を数学的に表現するために，集合表現の各要素 $\tilde{x}_\alpha$ は $\mathfrak{A}$ のある部分 σ–代数に関して可測と仮定していた。ところがII型のファジィ確率変数では，曖昧性は識別に起因するのではなく，現象自体が元々曖昧であるとした。したがって，I型のときのような部分 σ–代数を導入する必要はない。

$\tilde{x}$をファジィ確率変数とし，各$\alpha \in (0, 1)$と$\xi_\alpha \in \tilde{x}_\alpha$ a.s. に対して，

$$|\xi_\alpha(\omega)| \leq h(\omega) \quad \text{a.s.} \tag{3.4}$$

である確率変数$h(\omega)$が存在し，

$$E\{h^p\} = \int h^p \, dP < \infty \tag{3.5}$$

を満たすものとする。このとき，(3.4) を満たすファジィ確率変数をL^p–有界可積分 (integrably bounded) ということにする．

3.2 ファジィ確率変数の期待値

ファジィ確率変数の統計学的性質を検討するために，$\tilde{x}$をL^1–有限可積分なファジィ確率変数とする。まず最初に，命題

$$s_{E\{\tilde{x}\}}(x) = \{x \text{ は}\tilde{x}\text{の期待値 } E\{\tilde{x}\} \text{ に含まれる}\}. \tag{3.6}$$

を考察する。そうすると，上記命題は次のような複合命題として書き直すことができる。

$$s_{E\{\tilde{x}\}}(x) = \bigvee_{\xi} \{(x = E\{\xi\}) \wedge (\xi \in \tilde{x} \text{ a.s.})\} \tag{3.7}$$

さらに，(3.7) の中の命題 ($\xi \in \tilde{x}$ a.s.) は

$$(\xi \in \tilde{x} \text{ a.s.}) = \bigwedge_{\omega \in \Omega \setminus \mathrm{N}_0} s_{\tilde{x}}(\xi, \omega) \tag{3.8}$$

と表現できる。ただし，N_0は零集合，すなわち$\mathrm{N}_0 \in \mathfrak{A}$かつ$P(\mathrm{N}_0) = 0$で，$s_{\tilde{x}}(\xi, \omega)$は (3.3) で与えられる命題である。したがって，(3.7) は

$$s_{E\{\tilde{x}\}}(x) = \bigvee_{\xi} \left\{(x = E\{\xi\}) \wedge \left(\bigwedge_{\omega \in \Omega \setminus \mathrm{N}_0} s_{\tilde{x}}(\xi, \omega)\right)\right\} \tag{3.9}$$

と表現できることになる。それゆえ，ファジィ集合の拡張原理の概念を適用すれば$s_{E\{\tilde{x}\}}(x)$の真理値は

$$t(s_{E\{\tilde{x}\}}(x))=\sup_{\xi}\left\{\operatorname*{essinf}_{\omega\in\Omega} t(s_{\tilde{x}}(\xi,\ \omega)\ \middle|\ x=E\{\xi\}\right\} \tag{3. 10}$$

と評価するのが妥当であると思われる。ここで，$\mathrm{essinf}_{\omega\in\Omega}\, t(s_{\tilde{x}}(\xi,\ \omega))$ は，

$$t(s_{\tilde{x}}(\xi,\ \omega))=(\tilde{x}(\omega))(\xi)\geq a \quad \text{a.s.}$$

を満たす a の上限である。

ここで，

$$(\mathrm{A})\int \tilde{x}_\alpha\, dP=\left\{x\ \middle|\ x=\int \xi\, dP,\ \xi\in S(\tilde{x}_\alpha)\right\} \tag{3. 11}$$

で定義される Aumann 積分 [7] を導入する。ただし，$\tilde{x}_\alpha$は$\tilde{x}$の集合表現の任意の要素であり，$S(\tilde{x}_\alpha)$ は$\tilde{x}_\alpha$の選択集合，すなわち，

$$S(\tilde{x}_\alpha)=\{\xi\mid \xi(\omega)\in\tilde{x}_\alpha(\omega)\ \text{a.s.}\} \tag{3. 12}$$

である。この Aumann 積分を用いることにより，$\tilde{x}_\alpha$の期待値は

$$E\{\tilde{x}_\alpha\}=(\mathrm{A})\int \tilde{x}_\alpha\, dP \tag{3. 13}$$

で与えられることになる。$\tilde{x}$がL^1–有界可積分であれば，各 $\alpha\in(0,\ 1)$ において$\tilde{x}_\alpha$は可積分，つまり $E\{\tilde{x}_\alpha\}\neq\emptyset$を示すことができる。また，各 $\alpha\in(0,\ 1)$ において

$$\{x\mid t(s_{E\{\tilde{x}\}}(x))>\alpha\}\subseteq E\{\tilde{x}_\alpha\}\subseteq\{x\mid t(s_{E\{\tilde{x}\}}(x))\geq\alpha\} \tag{3. 14}$$

を満たすことを示すことができる。したがって，ファジィ確率変数$\tilde{x}$の期待値は，次のように定義することが妥当であると思われる。

定義 3. 2． ファジィ確率変数$\tilde{x}$はL^1–有界可積分で，$\{\tilde{x}_\alpha\mid\alpha\in(0,\ 1)\}$ をその集合表現とする。そうすると，ファジィ確率変数$\tilde{x}$の期待値は，次のよ

うに与えられる。

$$E\{\tilde{x}\}=(\mathrm{R},\ \{E\{\tilde{x}_\alpha\}\mid\alpha\in(0,1)\},\ s_{E\{\tilde{x}\}}) \tag{3.15}$$

ここで，$s_{E\{\tilde{x}\}}$ は，命題（3.6）を与える述語で，$\{E\{\tilde{x}_\alpha\}\mid\alpha\in(0,1)\}$ は（3.13）で与えられる $E\{\tilde{x}\}$ の集合表現である。

3.3 ファジィ確率変数の分散

$\tilde{x}$をL^2–可積分有限なファジィ確率変数とする。そうすると，命題

$$s_{\mathrm{var}\,\tilde{x}}(x)=\{x\ \text{は}\tilde{x}\text{の分散 var.}\tilde{x}\text{に含まれる}\} \tag{3.16}$$

は，

$$s_{\mathrm{var}\,\tilde{x}}(x)=\bigvee_{\xi}\left\{(x=\mathrm{var}.\,\xi)\wedge\Big(\bigwedge_{\omega\in\Omega\setminus N_0}s_{\tilde{x}}(\xi,\omega)\Big)\right\} \tag{3.17}$$

と書き直すことができる。ここで $s_{\tilde{x}}(\xi,\omega)$ は（3.3）で与えられる命題であり，

$$\mathrm{var}.\,\xi=E\{(\xi-E\{\xi\})^2\} \tag{3.18}$$

である。また，（3.14）と同様に，全ての $\alpha\in(0,1)$ に対して

$$\{M\mid t(s_{\mathrm{var}\,\tilde{x}}(M))>\alpha\}\subseteq\mathrm{var}.\,\tilde{x}_\alpha\subseteq\{M\mid t(s_{\mathrm{var}\,\tilde{x}}(M))\geq\alpha\} \tag{3.19}$$

が成立することを示すことができる。したがって，次のようにファジィ確率変数$\tilde{x}$の分散を定義することができる。

定義 3.3. ファジィ確率変数$\tilde{x}$はL^2–有界可積分で，$\{\tilde{x}_\alpha\mid\alpha\in(0,1)\}$ をその集合表現とする。そうすると，$\tilde{x}$の分散 var.$\tilde{x}$は

$$\mathrm{var}.\,\tilde{x}=(\mathrm{R},\ \{\mathrm{var}.\,\tilde{x}_\alpha\mid\alpha\in(0,1)\},\ s_{\mathrm{var}\,\tilde{x}}) \tag{3.20}$$

で定義される。ここで，$s_{\mathrm{var}.\tilde{x}}$ は命題（3. 16）を与える述語であり，$\{\mathrm{var}.\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は

$$\mathrm{var}.\tilde{x}_\alpha = E\{(\tilde{x}_\alpha \boxminus E\{\tilde{x}_\alpha\})^2\} \tag{3. 21a}$$

および

$$\tilde{x}_\alpha \boxminus E\{\tilde{x}_\alpha\} = \{x \mid x = \xi - E\{\xi\},\ \xi \in \tilde{x}_\alpha\} \tag{3. 21b}$$

で与えられる $\mathrm{var}.\tilde{x}$ の集合表現である。

ところで，（3. 20）のファジィ確率変数の分散はファジィ集合に関する拡張原理を厳密に適用することによって導かれており，（3. 21a）および（3. 21b）を用いて定義されている。しかしながら，（3. 21b）をファジィ確率ベクトルの実現値である曖昧不規則データから推定することは困難であり，したがって（3. 21a）さらには（3. 20）も推定困難である。そこで，次のような擬似分散を定義する。

定義 3. 4． ファジィ確率変数 $\tilde{x}$ は L^2–有界可積分で，$\{\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ をその集合表現とする。そうすると，$\tilde{x}$ の擬似分散 $\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}$ は

$$\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x} = (\mathrm{R},\ \{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\},\ s_{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}}) \tag{3. 22}$$

で定義される。ここで，$s_{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}}$ は，命題

$$s_{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}}(x) = \left\{x \in E\{(\tilde{x} - E\{\tilde{x}\})^2\}\right\} \tag{3. 23}$$

を与える述語であり，$\{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}$ は

$$\begin{aligned} \mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}_\alpha &= E\{(\tilde{x}_\alpha - E\{\tilde{x}_\alpha\})^2\} \\ &= \left\{x \mid x = E\{\xi\xi'\},\ \xi = \xi_1 - E\{\xi_2\},\ \xi_i \in \tilde{x}_\alpha (i = 1 \text{ and } 2)\right\} \end{aligned} \tag{3. 24}$$

で与えられる集合表現である。

p–var. $\tilde{x}$の定義より，各$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$\mathrm{var.}\,\tilde{x}_\alpha \subseteq \mathrm{p\text{-}var.}\,\tilde{x}_\alpha \tag{3. 25}$$

である意味において

$$\mathrm{var.}\,\tilde{x} \subseteq \mathrm{p\text{-}var.}\,\tilde{x} \tag{3. 26}$$

であることは明らかである。

3. 4 ファジィ確率変数のモーメント推定

$\tilde{x}_i = (\mathrm{R}, \{\tilde{x}_{i,\alpha} \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\tilde{x}_i})$ $(i=1, \cdots, N)$ をL^2–有界可積分なファジィ確率変数列とする。そうすると，期待値$E\{\tilde{x}_1\}$の推定値としてファジィ集合

$$\hat{x}(N) = (\mathrm{R}, \{(\hat{x}(N))_2 \mid \alpha \in (0, 1)\}, s_{\hat{x}(N)}) \tag{3. 27}$$

が発見論的に得られる。ここで，$s_{\hat{x}(N)}$は命題

$$s_{\hat{x}(N)}(v) = \left\{ v \text{ は } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \text{ に含まれる} \right\} \tag{3. 28}$$

を与える述語である。定理2. 1を適用することにより，(3. 27) で与えられるファジィ集合$\hat{x}(N)$はファジィ数であることが分かる。すなわち$\hat{x}(N) \in \mathbb{G}_c(\mathrm{R})$であり，$\hat{x}(N)$の集合表現の各要素は各$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$(\hat{x}(N))_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_{i,\alpha} \tag{3. 29}$$

で与えられる。また$\hat{x}(N)$の強カットおよびレベル集合は，それぞれ

$$L_\alpha \hat{x}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_\alpha \tilde{x}_i \qquad (\text{各 } \alpha \in [0, 1) \text{ に対して}) \tag{3. 30}$$

$$L_{\bar{\alpha}}\hat{\tilde{x}}(N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}L_{\bar{\alpha}}\tilde{x}_i \qquad (\text{各}\ \alpha\in(0,1]\ \text{に対して}) \tag{3.31}$$

で与えられる。したがって，

$$\hat{\tilde{x}}(N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_i \tag{3.32}$$

と表現することは妥当であると思われる。

上記と同様な議論がファジィ確率変数の分散推定についても可能である。

$$\widehat{\text{p-var.}\,\tilde{x}}(N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{x}_i-\hat{\tilde{x}}(N))^2 \tag{3.33}$$

上式のファジィ集合の集合表現は，各 $\alpha\in(0,1)$ に対して

$$(\widehat{\text{p-var.}\,\tilde{x}}(N))_\alpha=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{x}_{i,\alpha}-\widehat{\tilde{x}_\alpha}(N))^2 \tag{3.34}$$

である。また，強カットおよびレベル集合は次のように与えられる。

$$L_\alpha(\widehat{\text{p-var.}\,\tilde{x}}(N))=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(L_\alpha\tilde{x}_i-L_\alpha(\widehat{\tilde{x}_\alpha}(N)))^2 \tag{3.35a}$$

および

$$L_{\bar{\alpha}}(\widehat{\text{p-var.}\,\tilde{x}}(N))=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(L_{\bar{\alpha}}\tilde{x}_i-L_{\bar{\alpha}}(\widehat{\tilde{x}_\alpha}(N)))^2 \tag{3.35b}$$

4．感性データに対する応用とそのプログラムパッケージ

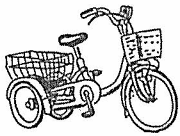
主に中高年者の自転車のデザインに関する好みについて基礎的情報を取得するために行ったアンケート調査結果［8］に対して，本論文で提案したファジィ確率変数を応用して統計学的処理を試みることにした。アンケート調査はある理工系私立大学に在籍する学生の父母を対象に実施され，その結果 1,093 人の父母から回答があった。そのうち，623 人が男性，460 人が女性で 7 名は性別不明であった。回答者の年齢分布を表 4.1 に示す。

9. サイクリングをする場合、どのような自転車に乗りたいかについて答えてください.

(a) どのようなカラー (フレーム) の自転車が好みですか.
1 ブラック　2 ホワイト　3 ピンク　4 イエロー　5 レッド
6 ブルー　7 グリーン　8 オレンジ　9 パープル　10 グレー

(b) 走行灯 (ライト) は
1 発電機 (ダイナモ) 付きのものがよい.　2 電池付きのものがよい.
3 どちらでもよい.

(c) 全体のスタイル (i~vii のそれぞれについて答えて下さい.)

i. 
1 非常に悪い.　2 悪い.　3 少し悪い.
4 少し良い.　5 良い.　6 非常に良い.

ii. 
1 非常に悪い.　2 悪い.　3 少し悪い.
4 少し良い.　5 良い.　6 非常に良い.

iii. 
1 非常に悪い.　2 悪い.　3 少し悪い.
4 少し良い.　5 良い.　6 非常に良い.

iv. 
1 非常に悪い.　2 悪い.　3 少し悪い.
4 少し良い.　5 良い.　6 非常に良い.

図 4.1　アンケート調査項目の一部

アンケート項目は多岐に渡るので，ここではそのうちの一部のみを紹介する。他の項目等詳細については報告書 [8] を参照していただきたい。図 4.1 はそのデザインの好みを尋ねた自転車のイラストであり，その回答結果（問 9 (c) の i から iv）は表 4.2 のようにまとめることができた。表 4.2 の各桁のタイトルである「非常に悪い」,「悪い」, …,「良い」,「非常

表 4.1　年齢の度数分布

年　　齢	度	数	
	男　性	女　性	男女共
30 才未満	54	24	79
30 才以上 35 才未満	2	4	6
35 才以上 40 才未満	4	8	13
40 才以上 45 才未満	28	90	119
45 才以上 50 才未満	162	185	348
50 才以上 55 才未満	231	108	341
55 才以上 60 才未満	93	34	127
60 才以上 65 才未満	32	4	37
65 才以上 70 才未満	9	3	12
70 才以上 75 才未満	5	0	5
75 才以上 80 才未満	5	0	5
80 才以上	1	0	1
50 才以上	376	149	528
合　　計	626	460	1,093

表 4.2　アンケート回答結果度数分布一例（年齢・性別不問）

	非常に悪い	悪い	少し悪い	少し良い	良い	非常に良い	無回答
9(c) i	261	387	223	96	107	10	9
9(c) ii	16	75	174	223	499	87	9
9(c) iii	19	80	195	296	440	53	10
9(c) iv	277	384	249	99	70	4	10

に良い」をファジィ確率変数$\tilde{x}$の実現値の述語から得られる命題と考えると，同表はファジィ確率変数$\tilde{x}$の実現値を集めたものと考えることができる。すなわち，ファジィ確率変数$\tilde{x}$はある確率分布にしたがって各 $i=0, 1, \cdots, 5$ に対して

$$\tilde{x}(\omega)=\tilde{x}(i)=(\mathrm{R}, \{\tilde{x}_\alpha(i) \mid \alpha\in(0, 1)\}, s_{\tilde{x}(i)}) \tag{4.1}$$

のいずれかを実現値として持つことになる。ただしここで，各述語は

$s_{\tilde{x}(0)}(x)=\{x\in$「非常に悪い」$\}$,

$s_{\tilde{x}(1)}(x)=\{x\in$「悪い」$\}$,

$s_{\tilde{x}(2)}(x)=\{x\in$「少し悪い」$\}$,

$s_{\tilde{x}(3)}(x)=\{x\in$「少し良い」$\}$,

$s_{\tilde{x}(4)}(x)=\{x\in$「良い」$\}$,

$s_{\tilde{x}(5)}(x)=\{x\in$「非常に良い」$\}$.

の命題を与えることになる。

「極度に悪い」から「究極的に良い」までを区間［0, 1］によって正規化し，$\tilde{x}(i)$ の実現値のメンバーシップ関数を次のように仮定する。

$$(\tilde{x}(i))(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\{(5\pi)(x-0.2i)\}+1}{2} & (0.2(i-1)<x<0.2(i+1)\text{のとき})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \tag{4. 2}$$

ただし，$i=1$(悪い)，2(少し悪い)，3(少し良い) および 4(良い) である。また，$i=0$(非常に悪) と $i=5$(非常に良い) に対しては

$$(\tilde{x}(0))(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(5\pi x)+1}{2} & (0<x<0.2\text{ のとき})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \tag{4. 3}$$

および

$$(\tilde{x}(5))(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\{(5\pi)(x-1)\}+1}{2} & (0.8<x<1\text{ のとき})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \tag{4. 4}$$

とした。$\tilde{x}(i)$ の実現値のメンバーシップ関数の形状は図 4. 2 に示した。したがって，$\tilde{x}(i)$ を集合表現すると，各要素 $\tilde{x}_\alpha(i)$ は $i=1,\ \cdots,\ 4$ に対しては

$$\tilde{x}_\alpha(i)=\left[\frac{1}{5}i-\frac{1}{5\pi}\cos^{-1}(2\alpha-1),\ \frac{1}{5}i+\frac{1}{5\pi}\cos^{-1}(2\alpha-1)\right] \tag{4. 5a}$$

と，$i=0$ および $i=5$ に対しては

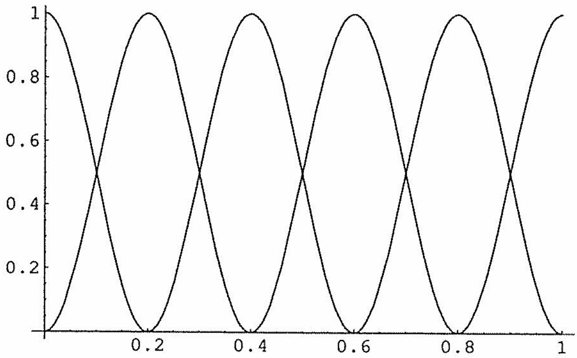


図 4. 2　ファジィ確率変数 $\tilde{x}$ の実現値のメンバーシップ関数

$$\tilde{x}_\alpha(0)=\left[0,\ \frac{1}{5\pi}\cos^{-1}(2\alpha-1)\right] \tag{4.5b}$$

$$\tilde{x}_\alpha(5)=\left[1-\frac{1}{5\pi}\cos^{-1}(2\alpha-1),\ 0\right] \tag{4.5c}$$

となる。

以上の設定の下で（3. 32）と（3. 33）および表 4. 2 で与えられるファジィデータを用いて，その平均と分散を推定することにし，そのためのコンピュータプログラムパッケージを試作した。その際，ファジィ数の集合表現をプログラム上で表現するために次のようにした。すなわち，0～1 のレベルを等間隔で数十に分割し，各レベルでのレベル集合を集めたものを近似的な集合表現とした。実際のプログラムパッケージの開発にあたっては，パーソナルコンピュータ（CPU Pentium Ⅱ 450 MHz× 2，メモリ 512 MB，使用 OS Linux v.2.2）上で，いわゆるフリーソフトウェアの C＋＋である GNU G＋＋(egcs–2.91.66) を開発言語として採用した。また，プログラムの一部は文献 [9, 10] で示したプログラムパッケージを修正したものを再利用した。さらに，数値実験結果を可視化（図形化）するために，Linux 用 Mathematica（v.3.0）を用いた。付録 A および B に

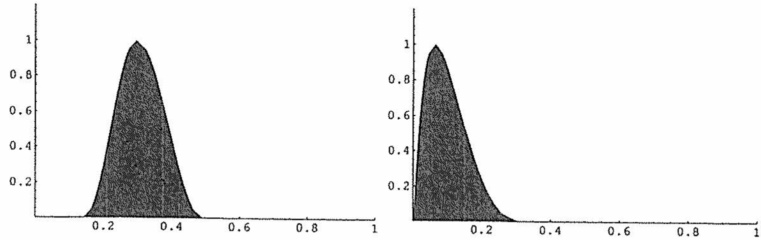


図 4. 3　9(c) i の $\hat{x}(N)$（左）と $\widehat{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}}(N)$（右）のメンバーシップ関数

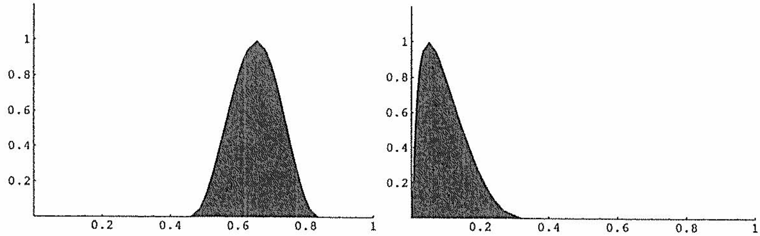


図 4. 4　9(c) ii の $\hat{x}(N)$（左）と $\widehat{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}}(N)$（右）のメンバーシップ関数

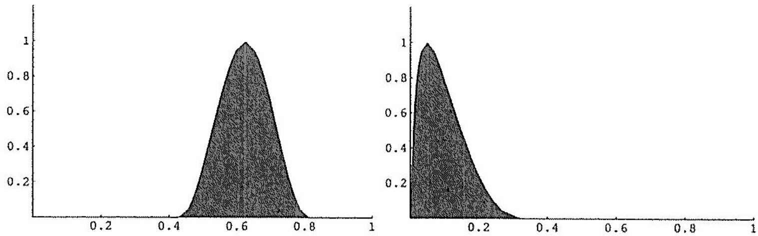


図 4. 5　9(c) iii の $\hat{x}(N)$（左）と $\widehat{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}}(N)$（右）のメンバーシップ関数

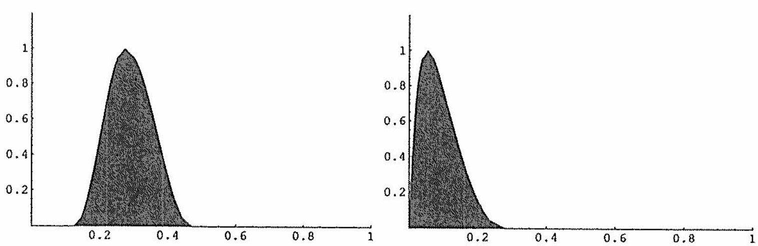


図 4. 6　9(c) iv の $\hat{x}(N)$（左）と $\widehat{\mathrm{p\text{-}var}.\tilde{x}}(N)$（右）のメンバーシップ関数

それぞれのプログラムを示す（再利用部分を除く）。図 4.3～図 4.6 に得られた推定値の集合表現から再構成したメンバーシップ関数の形状を示した。

5. 結　　言

本論文では，人の感性などの本質的に曖昧でかつ，個々人によって異なる回答を曖昧性と不規則性を共に有する一種の「ファジィ確率ベクトル」の実現値として捉え，その平均値や分散をファジィ理論と確率論を用いて導出し，それらを推定する手法をコンピュータプログラムとして実現することを試みた。また，自転車のデザインに関する好みについての実際のアンケート調査の統計処理を試みた。

現在のところは最も簡単な平均値と分散の推定値を求めることにとどまっているが，今後の課題としては，各アンケート回答間の相関や，得られた結果の解釈についてより深く考察する必要がある。また，第3節で定義した期待値や分散およびそれらの推定量の統計学的性質の数理的・数値的検討は現在鋭意検討中であり追って報告する予定である。

参 考 文 献

[1] T. Fukuda. On fuzzy random vectors as vague perceptions of random phenomena and their statistical moments. In *The Proceedings of 35 th IEEE CDC*, pp. 2719 – 2724, 1996.

[2] T. Fukuda. Fuzzy random data obtained as vague perceptions of random phenomena. In T. Katayama and S. Sugimoto, editors, *Statistical Methods in Control and Signal Processing*, pp. 303 – 330. Marcel Dekker, Inc., 1997.

[3] 福田得夫. ある種のファジィ確率ベクトルについての一考察. 日本ファジィ学会誌, 10(3): 499 – 505, 1998.

[4] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variables and its application in approximate reasoning, parts 1, 2 and 3. *Information Sciences*, 8 and 9 : 199 – 249, 301 – 357, 43 – 80, respectively, 1975, 76.

[5] T. Fukuda. On basic arithmetic operations for fuzzy sets obtained as vague perceptions of crisp phenomena. 追手門経営論集, 4(2) : 133 – 161, 1998.

[6] E. Klein and A. C. Thompson. *Theory of Correspondences*. John Wiley & Sons, Netherlands, 1988.

[7] R. J. Aumann. Integrals of set–valued functions. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, 12 : 1 – 12, 1965.

[8] 砂原善文，澤田照夫 et al. 人間工学的見地からの中高年者用自転車設計に関する研究. Technical report, 岡山理科大学工学部機械工学教室サイクルデザイン研究会, 1993.

[9] 福田得夫. ファジィベクトルの二項演算用プログラムパッケージの開発. 追手門経済論集, 29(2) : 72 – 109, 1995.

[10] 福田得夫. 曖昧不規則データを用いた1階自己回帰モデルのパラメータ推定に関するシミュレーション実験研究. 追手門経営論集, 6(1) : 53 – 75, 2000.

付録 A C++ プログラム

A.1 回答分布集計用プログラム

```
//                    ** 各回答の分布 **
#include <stdio.h>
#include <string.h>

// *********************************************************************
int main(){
// *********************************************************************
  FILE *input_file, *output_file;
  char input_file_name[40], output_file_name[40];
  int  i, j, data[35], tdist[35][11], mdist[35][11];
  int  fdist[35][11], dist5[35][11];

  strcpy(input_file_name,  "whole.data");
  strcpy(output_file_name, "distribution.data");

  for(i=0;i<=34;i++)for(j=0;j<=10;j++){
    tdist[i][j]=0;
    mdist[i][j]=0;
    fdist[i][j]=0;
    dist5[i][j]=0;
  }

  if((input_file= fopen(input_file_name, "r"))==NULL){
    perror("File read error");
    return 1;
  }
  if((output_file= fopen(output_file_name, "w"))==NULL){
    perror("File write error");
    return 1;
  }
  fprintf(output_file,"data output to %s \n", output_file_name);
  while(fscanf(input_file,"%4d", &data[0])!=EOF){
    for(i=1;i<=34;i++) fscanf(input_file,"%3d",&data[i]);
    for(i=3;i<=33;i++) for(j=0;j<=10;j++)
      if(data[i]==j) tdist[i][j]= tdist[i][j]+1;
    if(data[2]==1){
      for(i=3;i<=33;i++) for(j=0;j<=10;j++)
if(data[i]==j) mdist[i][j]= mdist[i][j]+1;
    }
    if(data[2]==2){
      for(i=3;i<=33;i++) for(j=0;j<=10;j++)
if(data[i]==j) fdist[i][j]= fdist[i][j]+1;
    }
    if(data[1]>=50){
      for(i=3;i<=33;i++) for(j=0;j<=10;j++)
if(data[i]==j) dist5[i][j]= dist5[i][j]+1;
    }
  }
  for(i=3;i<=33;i++) {
    fprintf(output_file,"\nproblem number= %d\n", i);
```

```
      fprintf(output_file, "              ");
      for(j=1;j<=10;j++) fprintf(output_file,"%6d",j);
      fprintf(output_file,"  no ans.\n");
      fprintf(output_file, "total         ");
      for(j=1;j<=10;j++) fprintf(output_file,"%6d",tdist[i][j]);
      fprintf(output_file,"%6d \n", tdist[i][0]);
      fprintf(output_file, "male          ");
      for(j=1;j<=10;j++) fprintf(output_file,"%6d",mdist[i][j]);
      fprintf(output_file,"%6d \n", mdist[i][0]);
      fprintf(output_file, "female        ");
      for(j=1;j<=10;j++) fprintf(output_file,"%6d",fdist[i][j]);
      fprintf(output_file,"%6d \n", fdist[i][0]);
      fprintf(output_file, "more_than_50 ");
      for(j=1;j<=10;j++) fprintf(output_file,"%6d",dist5[i][j]);
      fprintf(output_file,"%6d \n", dist5[i][0]);
    }
    fclose(input_file);
    fclose(output_file);
    return 0;
  }
```

A.2 平均値推定のためのプログラム

```
// ** 各質問の平均値推定 **
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <iostream.h>
#include "f_num.h"

// ** *******************************************************************
int main(){
// *******************************************************************
  int             i, pnumber, k, number;
  double          width;
  FILE           *input_file, *output_file;
  FuzzyNumbers    Data[20], Mean;
  int             frequency[11], total;
  char            input_file_name[40], output_file_name[40];
  char            work[100];

  strcpy(input_file_name, "distribution.data");
  if((input_file= fopen(input_file_name, "r"))==NULL){
    perror("File readd error");
  }

  strcpy(output_file_name, "mean_bell.data");
  if((output_file= fopen(output_file_name, "w"))==NULL){
    perror("File write error");
  }
```

```
  fprintf(output_file,"results of fuzzy estimates \n\n");

  fgets(work,80,input_file);
  fgets(work,80,input_file);
  for(pnumber=3;pnumber<=33;pnumber++){
    fgets(work,80,input_file);
    printf("%s", work); fprintf(output_file, "%s", work);

    for(k=1; k<=4;k++){
      fgets(work,100,input_file);
      fgets(work,13,input_file);
      for(i=1;i<=10;i++) fscanf(input_file,"%6d", &frequency[i]);
      fscanf(input_file,"%6d", &frequency[0]);
      number=10;
      while(frequency[number]==0) number--;
      switch (pnumber){
      case 7:
for(i=1;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(50.0+double(i-1)*5.0, 5.0);
Data[number].PutRBell(75.0, 5.0, 5.0);
break;
      case 8:
for(i=1;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(50.0+double(i-1)*5.0, 5.0);
Data[number].PutRBell(75.0, 5.0, 5.0);
break;
      case 9:
for(i=1;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(double(i+1), 1.0);
Data[number].PutRBell(11.0,1.0, 3.0);
break;
      default:
width= 1.0/double(number-1);
Data[1].PutRBell(0.0, 0.0, width);
for(i=2;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(double(i-1)*width, width);
Data[number].PutLBell(1.0, width, 0.0);
      break;
      }
    total= 0;
    Mean.PutCrispValue(0.0);
    for(i=1;i<=number;i++){
      Mean= Mean + frequency[i]*Data[i];
      total= total+frequency[i];
    }
    Mean= (1.0/total)*Mean;
    printf("class: %13s,\t number of answers= %4d", work, total);
    Mean.Show();
    fprintf(output_file,
    "class: %13s \nnumber of columns=  %d  number of answers= %4d\n",
    work, number, total);
    Mean.WriteToFile(output_file);
    printf("\n");
    fprintf(output_file,"\n");
  }
  fgets(work,80,input_file);
  fgets(work,80,input_file);
```

```
  printf("\n");
  fprintf(output_file,"\n");
}
fclose(input_file);
fclose(output_file);
}
```

A.3 分散推定のためのプログラム

```
// ** 各質問の分散推定 **
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <iostream.h>
#include "f_num.h"

// ** ******************************************************************
int main(){
// *******************************************************************
  int           i, pnumber, k, number;
  double        width;
  FILE         *input_file, *output_file;
  FuzzyNumbers  Data[20], Mean, Var, Temp;
  int           frequency[11], total;
  char          input_file_name[40], output_file_name[40];
  char          work[100];

  strcpy(input_file_name, "distribution.data");
  if((input_file= fopen(input_file_name, "r"))==NULL){
    perror("File readd error");
  }

  strcpy(output_file_name, "var_bell.data");
  if((output_file= fopen(output_file_name, "w"))==NULL){
    perror("File write error");
  }

  fprintf(output_file,"results of fuzzy estimates \n\n");

  fgets(work,80,input_file);
  fgets(work,80,input_file);
  for(pnumber=3;pnumber<=33;pnumber++){
    fgets(work,80,input_file);
    printf("%s", work); fprintf(output_file, "%s", work);

    for(k=1; k<=4;k++){
      fgets(work,100,input_file);
      fgets(work,13,input_file);
      for(i=1;i<=10;i++) fscanf(input_file,"%6d", &frequency[i]);
      fscanf(input_file,"%6d", &frequency[0]);
      number=10;
```

```
        while(frequency[number]==0) number--;
        switch (pnumber){
        case 7:
for(i=1;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(50.0+double(i-1)*5.0, 5.0);
Data[number].PutRBell(75.0, 5.0, 5.0);
break;
        case 8:
for(i=1;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(50.0+double(i-1)*5.0, 5.0);
Data[number].PutRBell(75.0, 5.0, 5.0);
break;
        case 9:
for(i=1;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(double(i+1), 1.0);
Data[number].PutRBell(11.0,1.0, 3.0);
break;
        default:
width= 1.0/double(number-1);
Data[1].PutRBell(0.0, 0.0, width);
for(i=2;i<=number-1;i++) Data[i].PutBell(double(i-1)*width, width);
Data[number].PutLBell(1.0, width, 0.0);
        break;
        }
      total= 0;
      Mean.PutCrispValue(0.0);
      Temp.PutCrispValue(0.0);
      Var.PutCrispValue(0.0);
      for(i=1;i<=number;i++){
        Mean= Mean + frequency[i]*Data[i];
        total= total+frequency[i];
      }
      Mean= (1.0/total)*Mean;
      for(i=1;i<=number;i++){
        Temp= Data[i] - Mean;
        Temp.Square();
        Var= Var + frequency[i]*Temp;
      }
      Var= (1.0/total)*Var;
      printf("class: %13s,\t number of answers= %4d", work, total);
      Var.Show();
      fprintf(output_file,
      "class: %13s \nnumber of columns=  %d  number of answers= %4d\n",
      work, number, total);
      //    Mean.WriteToFile(output_file);
      Var.WriteToFile(output_file);
      printf("\n");
      fprintf(output_file,"\n");
    }
    fgets(work,80,input_file);
    fgets(work,80,input_file);

    printf("\n");
    fprintf(output_file,"\n");
    }
    fclose(input_file);
    fclose(output_file);
```

```
}
```

A.4 ファジィ数演算用プロラム (一部)

ヘッダーファイル (f_num.h) の一部

```
/*
    ARITHMETIC OPERATIONS FOR FUZZY NUMBERS
*/
#include <stdio.h>
#include <fstream.h>
#define max(a,b)        (((a) > (b)) ? (a) : (b))
#define min(a,b)        (((a) < (b)) ? (a) : (b))
#define FUZZY_SETS            1
#define NUMBER_OF_LEVELS     20
#define WIDTH                 5
#define EPS               1.0e-4
#define PI                3.14159
/*         ****** Relations among Classes *******
    Points
                 -- Intervals
                |
    CrispSets --|-- Rectangles
                |
                 -- Circles

                 -- FuzzyNumbers
    FuzzySets --|
                |                  -- Pyramids
                 -- FuzzyVectors --|
                                   -- Bells
*/
```

この間省略

```
// ***********************************************************
class FuzzyNumbers:public FuzzySets{
// ***********************************************************
protected:

    Intervals LevelSets[NUMBER_OF_LEVELS+1];

public:

// Constructor  #1
    FuzzyNumbers();
// Constructor  #2
    FuzzyNumbers(double Number);
// Constructor  #3
    FuzzyNumbers(double apex, double left_half, double right_half);
// Constructor  #4
    FuzzyNumbers(FuzzyNumbers &OtheFuzzyNumber);
```

```
//  Destructor
    virtual ~FuzzyNumbers(){}

    virtual Intervals GetLevelSet(int i);
    virtual void   PutLevelSet(int i, Intervals U);
    virtual void   PutTriangle(double apex, double left, double right);
    virtual void   PutBell(double apex, double half_width);
    virtual void   PutLBell(double apex, double Lwidth, double Rwidth);
    virtual void   PutRBell(double apex, double Lwidth, double Rwidth);
    virtual void   PutTrapezoid(double left, double u_left,
                                  double u_right, double right);
    virtual void   PutCrispValue(double Number);
    virtual void   Show();
    virtual void   WriteToFile(FILE *stream);
    virtual void   ReadFromFile(FILE *stream);
    virtual void   Square();
    virtual FuzzyNumbers  Sqrt();

// Operator Overloading

    friend FuzzyNumbers operator +(FuzzyNumbers U, FuzzyNumbers V);
    friend FuzzyNumbers operator -(FuzzyNumbers U, FuzzyNumbers V);
    friend FuzzyNumbers operator -(FuzzyNumbers U);
    friend FuzzyNumbers operator *(FuzzyNumbers U, FuzzyNumbers V);
    //    friend FuzzyNumbers operator *(double u, FuzzyNumbers V);
    friend FuzzyNumbers operator /(FuzzyNumbers U, FuzzyNumbers V);
    //    friend FuzzyNumbers operator /(double u, FuzzyNumbers V);
};
```

以 下 省 略

プログラム本体 (f_num.cc) の一部

プログラム先頭からここまで省略

```
// ##############################################################
// Class Fuzzy_Numbers
// ##############################################################
```

省 略

```
// ************************************************************
void FuzzyNumbers::PutBell(double apex, double half_width){
// ************************************************************
  double alpha, b, minimum, maximum;
  if(half_width <= 0.0){
    printf("half_width should be positive.");
    exit(EXIT_FAILURE);
  }
  b= PI/half_width;
  for(int i=0;i<= NUMBER_OF_LEVELS;i++){
    alpha= double(i)/double(NUMBER_OF_LEVELS);
    minimum= -acos(2.0*alpha-1.0)/b+apex;
    maximum=  acos(2.0*alpha-1.0)/b+apex;
```

```
    LevelSets[i].PutMinimum(minimum);
    LevelSets[i].PutMaximum(maximum);
  }
}

// ************************************************************
void FuzzyNumbers::PutLBell(double apex,
                                  double Lwidth, double Rwidth){
// ************************************************************
  double alpha, b, minimum, maximum;
  if(Lwidth <= 0.0){
    printf("Left width should be positive.");
    exit(EXIT_FAILURE);
  }
  if(Rwidth < 0.0){
    printf("Right width should be non-negative.");
    exit(EXIT_FAILURE);
  }
  b= PI/Lwidth;
  maximum=  apex+Rwidth;
  for(int i=0;i<= NUMBER_OF_LEVELS;i++){
    alpha= double(i)/double(NUMBER_OF_LEVELS);
    minimum= -acos(2.0*alpha-1.0)/b+apex;
    LevelSets[i].PutMinimum(minimum);
    LevelSets[i].PutMaximum(maximum);
  }
}

// ************************************************************
void FuzzyNumbers::PutRBell(double apex,
                                  double Lwidth, double Rwidth){
// ************************************************************
  double alpha, b, minimum, maximum;
  if(Lwidth <0.0){
    printf("Left width should be non-negative.");
    exit(EXIT_FAILURE);
  }
  if(Rwidth <= 0.0){
    printf("Right width should be positive.");
    exit(EXIT_FAILURE);
  }
  b= PI/Rwidth;
  minimum= apex-Lwidth;
  for(int i=0;i<= NUMBER_OF_LEVELS;i++){
    alpha= double(i)/double(NUMBER_OF_LEVELS);
    maximum=  acos(2.0*alpha-1.0)/b+apex;
    LevelSets[i].PutMinimum(minimum);
    LevelSets[i].PutMaximum(maximum);
  }
}
```

以 下 省 略

付録 B Mathematica プログラム

B.1 平均の推定値メンバーシップ関数描写用プログラム

```
In[44]:=NumberOfLevels=21;
In[45]:=temp1=Table[{Number,Number,Number},{i,0,20}];
In[46]:=inline=OpenRead["mean_bell.data"];
In[47]:=DataName=Read[inline,String];
In[48]:=graphdata={};
In[49]:=Do[Skip[inline,String];
           Skip[inline,Word,2];
           ProblemNumber=Read[inline,Word];
           Do[Skip[inline,Word];
              Class=Read[inline,Word];
              Skip[inline,Word,3];
              NumberOfColumns=Read[inline,Number];
              Skip[inline,Word,3];
              NumberOfData=Read[inline,Number];
              data=Read[inline,temp1];
              temp2=Table[{data[[i]][[2]],data[[i]][[1]]},
                    {i,1,NumberOfLevels}];
              temp3=Table[{data[[NumberOfLevels+1-i]][[3]],
                    data[[NumberOfLevels+1-i]][[1]]},
                    {i,1,NumberOfLevels}];
              temp4=Join[temp2,temp3];
              Switch[k,
                7, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                             PlotRange->{{50,75},{0,1.2}}],
                8, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                             PlotRange->{{50,75},{0,1.2}}],
                9, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                             PlotRange->{{0,12},{0,1.2}}],
                _, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                             PlotRange->{{0,1},{0,1.2}}]]
                AppendTo[graphdata,g];
             Show[g,AxesLabel->{"Anser","Level"},
                    PlotLabel->{ProblemNumber,"Class="Class}];
          ,{j,1,4}];
        ,{k,3,33}]
In[50]:=(* Show[graphdata[[45]]]; *)
In[51]:=Close[inline];
```

B.2 擬似分散の推定値メンバーシップ関数描写用プログラム

```
In[65]:=NumberOfLevels=21;
In[66]:=temp1=Table[{Number,Number,Number},{i,0,20}];
In[67]:=inline=OpenRead["var_bell.data"];
In[68]:=DataName=Read[inline,String];
In[69]:=graphdata={};
In[70]:=Do[Skip[inline,String];
           Skip[inline,Word,2];
           ProblemNumber=Read[inline,Word];
           Do[Skip[inline,Word];
```

```
                    Class=Read[inline,Word];
                    Skip[inline,Word,3];
                    NumberOfColumns=Read[inline,Number];
                    Skip[inline,Word,3];
                    NumberOfData=Read[inline,Number];
                    data=Read[inline,temp1];
                    temp2=Table[{data[[i]][[2]],data[[i]][[1]]},
                          {i,1,NumberOfLevels}];
                    temp3=Table[{data[[NumberOfLevels+1-i]][[3]],
                          data[[NumberOfLevels+1-i]][[1]]},
                          {i,1,NumberOfLevels}];
                    temp4=Join[temp2,temp3];
                    Switch[k,
                      7, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                                    PlotRange->{{0,300},{0,1.2}}],
                      8, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                                    PlotRange->{{0,300},{0,1.2}}],
                      9, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                                    PlotRange->{{0,12},{0,1.2}}],
                      _, g=Graphics[Polygon[temp4],Axes->True,
                                    PlotRange->{{0,1},{0,1.2}}]]
                      AppendTo[graphdata,g];
                   Show[g,AxesLabel->{"Anser","Level"},
                         PlotLabel->{ProblemNumber,"Class="Class}];
                ,{j,1,4}];
              ,{k,3,33}]
In[71]:=(* Show[graphdata[[45]]] *)
In[72]:=Close[inline];
```