

先物市場分断下における一時的一般均衡

西村 和 志

1. は じ め に

前稿では、Green モデルを多期間先物市場モデルに拡張した。本稿では、むすびに残された Green 流の多期間先物市場モデルでのいくつかの問題点を、明らかにすることを目的とする。これらの課題は、要約すると、第一に、Green モデルにおいて、先物市場で取引される消費財は、その期間内で消耗する (perishable) 財であり、消費財の貯蔵は出来ない。それゆえ、Green のいう [6, pp. 1103-1104] 直物商品と先物商品との間の borrowing and lending は、貨幣のような価値を異時間で比較する際の尺度が存在しないために生じないと考えてよいのではないか。それは、市場均衡において、狭義の Walras 法則が成立し、市場では、直物財は、過不足なく配分されることと、先物契約の債権と債務が相殺することからもしいう。それゆえ、先物取引は、直物取引と独立しているとし、消費者の今期の予算制約式を変更する必要がある。

第二に、先物市場間の「裁定取引」は、上述のように、多期間先物市場モデルで時間比較する尺度としての財が存在しないために、先物市場価格が決定された後、商品利率の期間構成が存在しないことから、おこりえない。この点は、われわれの多期間先物市場モデルを、Hicks [8, Ch. 11] が議論したような予想理論にもとづく利率の期間構成論に展開する

ことができないことを意味する。ともかく、多期間先物市場においても、直物取引と先物取引とが相互に分断された市場であると同様な理由で、先物市場間取引はできない。

以上の課題に答えるために、直物市場と先物市場を市場分断化したモデルで一時的一般均衡を示すことにした。消費者は、このように期間で分断された市場で、先物取引をする場合、各期間内でも、消費者間の貸借ができないから、先物取引は、もし、 $c_{it} > 0$ 買えば、その契約高は、他の消費財 $c_{jt} < 0$ を売ることによって、支払うことになる。したがって、この消費者は、売持ちも買持ちもなく、危険回避者であるから、次期以降の価格変動の不確実性に対して、価格変動リスクを自己清算による方法によって回避している。すなわち、消費者は、同じ期間で他の財の先物市場を通じて掛け繋ぎしていることになる。利子率の期間構成論において、このような市場分断化した理論は、Culbertson [1] によって主張されたが、われわれのモデルは、一時的一般均衡でその主張を実現しているように思われる。

議論の進め方は、前稿をより簡略化して、第3節で消費者の最適解の存在、第4節で市場均衡を示している。

2. モデルの設定

すべての消費者は、 ν 期間の計画期間をもつ。期間1は、現在を、期間2より期間 ν までは、引き続き将来期間を表す。各期間では、消費者にとって利用可能であるが引き続き次ぎの期間まで貯蔵不可能な消費財が、各期間同じに l 種類 ($l \geq 2$) あるとする。 l 種類の消費財の直物市場があり、 l 種類の消費財に対する先物市場は、期間2より期間 ν までであるとする。われわれの考察する問題は、 l 直物市場と各期間分断された $(\nu - 1)l$ 先物市場における均衡の存在を示すことである。その問題の解明のための

諸定義と諸仮定，そして市場均衡の存在証明に必要な [14] の結果を以下で述べる。

消費者は， ν 期間の消費財の賦存量 $e=(e_1, \dots, e_\nu) \in R^d$ をもつ。ここで， $e_i \in R^d_+(i=1, \dots, \nu)$ であり，それぞれ確実に予見できるものとする。

仮定 2.1 $e \gg 0$ とする。

ν 期間の消費財の流列を， $x=(x_1, \dots, x_\nu) \in R^d$ とする。前期までの累積先物契約の流列を， $c^{-1}=(c_1^{-1}, \dots, c_{\nu-1}^{-1}) \in R^{(\nu-1)d}$ とする。計画時の期首に，消費者は負債をもっていないとする。また，累積先物契約のうち，今期に清算をする契約 c_1^{-1} が，市場が開かれる前に清算されているものとする。そのとき，取引費用はかからないものとする。したがって，今期の市場が開かれる前の消費者の賦存量は， $c_1^{-1}+e_1$ である。ここで，清算後，消費者は，支払い不能にはならないものとする。すなわち， $c_1^{-1}+e_1 > 0$ である。

次に，今期の先物市場における先物契約の流列を， $c=(c_2, \dots, c_\nu) \in R^{(\nu-1)d}$ とする。消費者は， $c_{it} > 0$ であれば，時点 t の期首に消費財を受け取る。 $c_{it} < 0$ であれば，その逆である。Green モデルと異なるのは，現在の消費財は貯蔵できないから，先物取引の決済は，決済期日に，自己の賦存量または自己のなした先物取引の売買量で行わなければならないことである。これは，現在の消費財は，先物契約の決済手段とはならないことを意味する。また，貨幣のような金融資産がないために，消費者間の貸借もできない。異なった期間の先物契約も，交換ができない。すなわち，直物市場と先物市場は，市場が完全に分断されていて，さらに，各期間の先物市場も，完全に分断されている。つまり，各期間を通じて，期間と期間をつなぐ共通の財が存在しないからである。

消費者は，このように期間で分断された市場で，先物取引をする場合，

各期間内でも、消費者間の貸借ができないから、先物取引は、もし、 $c_u > 0$ 買えば、その契約高は、他の消費財 $c_y < 0$ を売ることによって、支払うことになる。すなわち、同じ期間の他の先物市場を通じて掛け繋ぎしていることになる。掛け繋ぎについては、次節において、消費者の最適行動に関連して説明する。以上が、本稿での先物市場の定義である。

期間 1 での市場価格ベクトルは、 $p^1 = (p_1, q_2, \dots, q_\nu) \in R_+^L \setminus \{0\}$ であり、 p_1 は、今期の直物市場価格ベクトルを表し、 $q = (q_2, \dots, q_\nu)$ は、先物市場価格ベクトルを表す。各期の直物価格ベクトルは、 $p^2, \dots, p^\nu \in R_+^L \setminus \{0\}$ である。今期の直物市場価格ベクトル p_1 と期間 t の先物市場価格ベクトル $q_t (t=2, \dots, \nu)$ は、次のように正規化される。

$$p_1 \in \Delta^1 = \{p_1 \in R_+^L \mid \sum_{i=1}^I p_{1i} = 1\}.$$

$$q_t \in \Delta^t = \{q_t \in R_+^L \mid \sum_{i=1}^I q_{ti} = 1\}, t=2, \dots, \nu.$$

また、各期の直物価格ベクトルは、次のように正規化される。

$$p^t \in \Delta^t = \{p^t \in R_+^L \mid \sum_{i=1}^I p_i^t = 1\}, t=2, \dots, \nu.$$

消費者の今期の消費行動と将来消費計画は、期間 1 において決定される。期間 1 において、直物市場と先物市場での取引を決定することを行動 (action) と呼び、 $a_1 = (x_1, c_2, \dots, c_\nu) \in R_+^L \times R^{(\nu-1)L}$ で表す。次に、期間 2 以降において、直物市場での取引を決定することを計画 (plans) と呼び、期間 $t (t=2, \dots, \nu)$ の計画を、 $a_t = x_t \in R_+^L (t=2, \dots, \nu)$ とする。

消費者が、直物市場において、消費流列 $(x_1, \dots, x_\nu)$ を選択する際に、期間 1 の消費行動の成果 (consequences) x_1 は確実性下にあり、期間 2 から期間 ν までの将来消費計画の成果 $x_2, \dots, x_\nu$ は不確実性下にあるとする。消費者の消費流列に対する選好は、von Neumann-Morgenstern の期待効用最大化の仮説を満たす。いま、これらの仮定を次のように定式化する。

消費者の行動および計画の成果 (consequences) の空間は、消費流列の空間 $C=R^I$ である。各期間の消費の実現可能な成果の空間 R_+^I で定義されるすべての確率分布の集合を $M(R_+^I)$ とする。直積空間 $M^v(R_+^I)$ 上に於いて、消費者は、確率分布を選好するが、その選好は全順序 $\succeq$ によって表される。そこで、次の仮定をおこう。

仮定 2.2 写像 $v: M^v(R_+^I) \rightarrow R$ が、任意の $\mu \in M^v(R_+^I)$ に対して、 $v(\mu) = \int_C u d\mu$ によって定義される選好 $\succeq$ の表現であるような、連続かつ有界な von Neumann-Morgenstern 効用関数 $u: C \rightarrow R$ が存在する。任意の効用関数 u は、凹かつ厳密に単調である。

仮定 2.2 のもとで、さらに、任意の $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_v) \in M^v(R_+^I)$ に対して、期間 1 では、確実性下にあるから、 μ_1 が確率 1 で退化した確率分布をもつとし、期間 2 から期間 v までの将来消費の成果について不確実性に直面しているとする。このとき、西村 [10] によれば、任意の $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_v) \in M^v(R_+^I)$ に対して、写像 $v(\mu)$ は、次の形をもつ。

$$\text{仮定 2.3} \quad v(\mu) = u_1 + \sum_{t=2}^v \int_{R_+^I} u_t d\mu_t.$$

将来直物価格の予想に伴う不確実性が、次に仮定される。Grandmont [4] は、外生的予想を仮定した。前稿のモデル [14] では、Grandmont の予想関数は、非確率変数である現在価格 p^1 に、期間 2 から期間 v までの将来直物価格の確率分布を対応させている。本稿のモデルでは、期間 1 の市場価格のうち直物市場価格は、将来直物価格の予想に影響しないから、Grandmont 予想関数は、非確率変数である先物市場価格 q に、期間 2 から期間 v までの将来直物価格の確率分布を対応させる。期間 2 から期間 v までの将来直物市場価格の確率分布は互いに独立であるとする。各期間の

確率分布全体の空間は、次元が同じため $M(\Delta^{(\nu-1)l})$ とする。このとき、消費者の予想市場価格の分布は、先物市場価格 $q = (q_2, \dots, q_\nu)$ に対して、次のように定義される。

$$\text{仮定 2.4} \quad \phi(q) = \prod_{t=2}^{\nu} \phi_t(q_t) : \Delta^{(\nu-1)l} \longrightarrow M(\Delta^{(\nu-1)l}).$$

ここで、 $\phi_t(q_t)$ は互いに独立である。また、予想関数 $\phi(q)$ は、連続であるとする。 $\phi_t(q_t)$ は、各期間の先物市場も分断されているから、他の期間の先物市場の市場価格と独立していることを表す。

さて、仮定 2.2 および 2.3 における、将来期間の消費行動成果の不確実性と、仮定 2.4 における、将来直物価格の予想に伴う不確実性は、Grandmont の変換関数を仮定することによって、対応づけられる。このために、期間 1 において、消費者が今期の消費行動と将来消費計画を、どのように決定するのか規定しなければならない。

まず、消費者は、期間 1 において価格ベクトル p^1 と賦存量 $e_1 + c_1^{-1}$ を所与として、 $A_1 = R^+ \times R^{(\nu-1)l}$ の部分集合 $\beta_1(p^1, w_1) = \{a_1 \in A_1 \mid p_1 \cdot x_1 \leq p_1 \cdot (e_1 + c_1^{-1}), q_t \cdot c_t = 0, t=2, \dots, \nu\}$ に制約された行動 a_1 を選択する。ここで、 $w_1 = p_1 \cdot (e_1 + c_1^{-1})$ であり、期間 1 の富を表す。 $q_t \cdot c_t = 0 (t=2, \dots, \nu)$ は、消費者が先物取引をするとき、各期で、売買の清算を自己の勘定内でしなければならないことを意味する。各期の市場に 2 財以上消費財がなければ、自己清算はできない。自己清算の条件を次のように仮定する。

$$\text{仮定 2.5} \quad l \geq 2, \quad q_t \cdot c_t = 0 \quad (t=2, \dots, \nu).$$

次に、計画 a_t は、現在価格 p^1 と将来直物価格 p^t を所与として、期間 1 で選択された行動 a_1 、各期間 $i (i=2, \dots, t-1)$ で計画された各計画 a_i

と期間 t の賦存量 $c_t + c_{t-1} + e_t$ に依存する、各 A_t の部分集合 β_t に制約される。今期の直物市場および各期間の先物市場は、市場が分断されている。前稿とちがって、各期の計画は、それぞれ独立に立てられるから、計画を制約する部分集合はその前までの行動と各計画に依存しないので、次のように表される。

$$\beta_t(p^t, w_t) = \{a_t \in A_t \mid p^t \cdot a_t \leq p^t \cdot w_t\}, w_t = p^t \cdot (c_t + c_{t-1} + e_t), t=2, \dots, \nu-1,$$

$$\beta_\nu(p^\nu, w_\nu) = \{a_\nu \in A_\nu \mid p^\nu \cdot a_\nu \leq p^\nu \cdot w_\nu\}, w_\nu = p^\nu \cdot (c_\nu + e_\nu).$$

このようにして、各計画は、将来直物価格 $p^2, \dots, p^\nu$ と将来富 $w_2, \dots, w_\nu$ にそれぞれ依存する可測関数 $a_2(p^2, w_2): \Delta^l \times R_+ \longrightarrow A_2 = R_+^l, \dots, a_\nu(p^\nu, w_\nu): \Delta^l \times R_+ \longrightarrow A_\nu = R_+^l$ によって表される。

期間 1 において、消費者は、今期の消費行動 a_1 と将来消費計画 $a_2(p^2, w_2), \dots, a_\nu(p^\nu, w_\nu)$ を決定すると、確率変数 $P^2, \dots, P^\nu, W_2, \dots, W_\nu$ に依存した計画は、次期に直物市場が開かれるならば、実現する。つまり、確率変数 $P^2, \dots, P^\nu, W_2, \dots, W_\nu$ の各実現値は、将来消費計画 $a_2, \dots, a_\nu$ の実現値を決めるから、この関係によって、仮定 2.4 における、将来直物価格の予想に伴う不確実性は、仮定 2.2 および 2.3 における、将来期間の消費行動成果の不確実性に対応づけられる。そこで、消費者は、行動 a_1 を固定した、次の連続な線形写像 γ をもつとし、関数 γ を変換関数とすることにする。

$$\text{仮定 2.6} \quad \gamma: a_1 \cdot \prod_{t=2}^{\nu} a_t(\Delta^l \times R_+) \longrightarrow C.$$

ここで、各 $a_t(\Delta^l \times R_+)$ は、各期間の価格に依存する可測関数 $a_t: \Delta^l \times R_+ \longrightarrow A_t$ の値域を表す。

消費流列の成果 C 上には、全順序 $\preceq$ が定義されているから、行動と計画の成果 $\gamma(a_1, a(p^2, w_2), \dots, a_\nu(p^\nu, w_\nu))$ は、von Neumann-Morgenstern 効用関数 u によって、次のように表せられる。

$$\begin{aligned} & u(\gamma(a_1, a_2(p^2, w_2), \dots, a_\nu(p^\nu, w_\nu))) \\ & = u_1(x_1) + \sum_{t=2}^{\nu} u_t(a_t(p^t, w_t)). \end{aligned} \quad 2.1$$

一方、変換関数 γ は、価格 $p^2, \dots, p^\nu$ が、仮定 2.4 により確率変数であるから、確率変数であり、確率変数 γ により予想価格の空間から、成果の空間で定義される確率分布を誘導できる。この確率分布を

$$\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_\nu(\cdot)}(S) = \prod_{t=2}^{\nu} \phi_t(q_t, \gamma_t^{-1}(S)) \quad 2.2$$

と定義する。このようにして、 C 上に確率分布 $\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_\nu(\cdot)}$ が、可測写像 γ によって誘導される。しかも、誘導された分布は、予想関数 $\phi(q)$ と γ 関数の条件から、 p^1 と a_1 が所与であることを示す。式 2.1 と 2.2 を使って、仮定 2.2 より、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}^{(\nu-1)t}} u(\gamma(a_1, a_2(p^2), \dots, a_\nu(p^\nu))) d\phi(q) \\ & = \int_C u du_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_\nu(\cdot)} \end{aligned}$$

という関係が、任意の $a_1 \in \beta_1(p^1, w_1)$, $a_t(p^t, w_t) \in \beta_t(p^t, w_t) (t=2, \dots, \nu)$ に対して成り立つ。仮定 2.3 のもとでは、 $\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_\nu(\cdot)}$ の期待効用は、

$$\begin{aligned} v(\mu_{p^1, a_1}) & = u_1 + \sum_{t=2}^{\nu} \int u_t d\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_\nu(\cdot)} \\ & = u_1(x_1) + \sum_{t=2}^{\nu} \int u_t(a_t(\cdot, w_t)) d\phi_t \end{aligned} \quad 2.3$$

と表される。これを、 a_1 と p^1 の条件付き期待効用関数と呼び、 $v(a_1, p^1)$ で表す。

最適行動を求めるために、条件付き誘導分布に対する選好関係は、仮定 2. 2 の全順序をもちいることができる。関係 2. 3 から、Grandmont の意志決定のルールを次のように定める [14, p. 74].

今、 p^1 を所与とし、任意の行動 $a_1, a'_1 \in \beta_1(p^1, w_1)$ に対して、 $v(a_1, p^1) \geq v(a'_1, p^1)$ であるならば、そのときにかぎり、 $a_1 \succeq_{p^1} a'_1$ とする。

3. 消費者の最適解の存在

消費者は、予算制約の集合 $\beta_1(p^1, w_1), \beta_2(p^2, w_2), \dots, \beta_\nu(p^\nu, w_\nu)$ のもとで、期間 1 の行動 a_1 の選択と計画 $a_2, \dots, a_\nu$ を 2 段階で決定する。前稿 [14] において、第 1 段階は、期間 1 の価格 p^1 と行動 a_1 を所与として、予算制約の集合 $\beta_2, \dots, \beta_\nu$ のもとで、期間 2 から期間 ν までの計画 $a_2, \dots, a_\nu$ を決定する問題が、ラグランジュ未定乗数法によって解かれた。そして、この問題の解 $a_2^*, \dots, a_\nu^*$ を前節で定義した式 2. 3 に代入して、条件付き期待効用関数をもとめ、その性質をえた。それらの結果を要約して示す。

第 2 段階の問題にはいる前に、前稿でもちいていた予算制約の集合を定義しなおさなければならない。Green モデルの先物市場において、消費者は、期間 1 の消費財を売買の清算にもちいるように、予算制約の集合 $\beta_1(p^1, w_1)$ を $\{a_1 \in A_1 \mid p^1 \cdot a_1 \leq p^1 \cdot (c_1^{-1} + e_1)\}$ としていた。しかし、市場均衡では、狭義のワルラス法則が成立するから、貯蔵不可能な財による貸し借りは出来ないことになる。それゆえ、先物市場の取引は、次期の直物市場においても、貯蔵不可能な財による貸し借りは出来ないのので、自己清算による方法が考えられる。もちろん、消費者は、財の受け渡し前の期間に反対売買をすることによっても清算はできるであろう。しかし、この場合その差額は直物財で支払うことになるであろう。本稿では、貯蔵不可

能な財しかない交換経済において、直物市場と先物市場および異期間先物市場の相互の取引は生じないことを示すから、消費者は、反対売買をしないものとする。それでは、消費者が、自己清算による方法によって、先物市場で売買をすると、仮定 2.5 より、予算制約の集合 β_1 は、 $\beta_1(p^1, w_1) = \{a_1 \in A_1 \mid p_1 \cdot x_1 \leq p_1 \cdot (c_1^{-1} + e_1), q_t \cdot c_t = 0, t=2, \dots, \nu\}$ と定義される。ここで、 $q_t \cdot c_t = 0$ は、先物を売れば、必ず、その価値分で先物を買うことを意味する。したがって、この消費者は、売持ちも買持ちもなく、危険回避者であるから、次期以降の価格変動の不確実性に対して、価格変動リスクを自己清算による方法によって回避している。

さて、第 2 段階では、この予算制約の集合 $\beta_1(p^1, w_1)$ のもとで、条件付き期待効用関数を最大とする期間 1 の行動 a_1 をダイナミック・プログラミングによってもとめる。そして、この最大化問題の解の存在のための必要十分条件がもとめられる。

第 1 段階の問題を解くために、消費者が期間 2 から期間 ν において破産しないように支払可能条件を仮定する。すなわち、期間 t の支払可能条件は、すべての $p' \in \text{supp } \phi_t(q_t)$ に対して、

$$p' \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0, (t=2, \dots, \nu-1)$$

とする。期間 ν においては、累積先物契約残高がなく、新規の先物市場であるから、支払可能条件は、次のようになる。すべての $p' \in \text{supp } \phi_\nu(q)$ に対して、 $p' \cdot (c_\nu + e_\nu) \geq 0$ である。これらの支払い可能条件のもとで、もし、将来直物市場価格 p' が実現すれば、消費者は、消費流列に対する効用関数 $u(x_1, \dots, x_\nu) = u_1(x_1) + \sum_{t=2}^\nu u_t(x_t)$ を最大化することによって計画 $a \equiv (x_2, \dots, x_\nu)$ を決定する。すなわち、消費者は次の問題を解く。

問題 3.1 仮定 2.1 および $p' \gg 0$, $p' \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0$, $(t=2, \dots, \nu, c_\nu^{-1} = 0)$, $a \in R_+^{(\nu-1)l}$ のもとで、現在消費 x_1 と支払い可能条件をみたす先

物契約 c を所与とすると、

$$\begin{aligned} \max_{\{x_1, \dots, x_\nu\}} \quad & u_1 + \sum_{t=2}^{\nu} u_t \\ \text{subject to} \quad & p^t \cdot x_t \leq p^t \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t), \quad t=2, \dots, \nu, \quad c_\nu^{-1} = 0. \end{aligned}$$

解 [14] による。

問題 3. 1 の解を $a_t^*(p^t, w_t)$ とすれば、将来直物市場価格 p^t が確率分布 $\phi_t(q_t)$ にしたがって実現すると、解 $a_t^*(p^t, w_t)$ も変動する。この変動を評価するために、仮定 2. 6 の γ 関数により、条件付き期待効用関数 v を定義できる。すなわち、仮定 2. 6 の γ 関数は、 $\gamma \circ a^*(p^2, \dots, p^\nu, c) = (x_1, a_2^*(p^2, w_2), \dots, a_\nu^*(p^\nu, w_\nu))$ となる。この変換関数 $\gamma \circ a^*$ によって、消費者の行動と計画の成果に対する直接効用関数 $u(\gamma \circ a^*(p^2, \dots, p^\nu, c))$ は、式 2. 1 から、直物 x_1 と先物契約 c の効用が分離されて、 $u(\gamma \circ a^*(p^2, \dots, p^\nu, c)) = u_1 + \sum_{t=2}^{\nu} u_t(a_t^*(p^t, w_t))$ のように和で表される。

次に、式 2. 3 から、 (x_1, c, p^1) の条件付き期待効用関数 v は、支払い可能条件 $p^t \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0$, for $p^t \in \text{supp } \phi_t(q_t)$, ($t=2, \dots, \nu-1$), $p^\nu \cdot (c_\nu + e_\nu) \geq 0$, for $p^\nu \in \text{supp } \phi_\nu(q_\nu)$ のもとで、

$$v(x_1, c, p^1) = u_1(x_1) + \sum_{t=2}^{\nu} \int u_t(a_t^*(\cdot, w_t)) d\phi_t(q_t)$$

と定義できる。条件付き期待効用関数 $v(x_1, c, p^1)$ の性質についての定理は、次の通りである。

定理 3. 1 期待効用関数 $v(x_1, c, p^1)$ は、(i) $(x_1, c) \in A(p^1)$, $p^1 \in A^\nu$ に対して、有界、連続、(ii) $(x_1, c) \in A$ に対して、凹、厳密に単調である。

証明 [10, 11] による。

以上の結果から，第 2 段階に入ると，期間 1 の価格 p^1 が所与のとき，予算制約の集合 $\beta(p^1, w_1)$ のもとで，期間 1 における現在消費 x_1 と先物契約 c を決定する問題は，次のようになる。

問題 3. 2 仮定 2. 1 から仮定 2. 6 のもとで，

$$\begin{aligned} \max_{\{a_t\}} J_\nu &= u_1 + \sum_{t=2}^{\nu} \int u_t(a_t^*(\cdot, c_t)) d\phi_t(q_t), \\ \text{subject to } \beta(p^1, w_1) &= \{a_1 \in A_1 \mid p_1 \cdot x_1 \leq w_1, q_t \cdot c_t = 0, t = \\ &2, \dots, \nu\}, p^t \cdot (c_t + c_{t-1} + e_t) \geq 0, \text{ for } p^t \in \text{supp } \phi_t(q_t), (t=2, \\ &\dots, \nu-1), p^\nu \cdot (c_\nu + e_\nu) \geq 0, \text{ for } p^\nu \in \text{supp } \phi_\nu(q_\nu). \end{aligned}$$

解 問題 3. 2 は，ダイナミック・プログラミングによって解かれる [14, 3 節]。しかし，そのアルゴリズムにおいて，自己清算の条件 $q_t \cdot c_t = 0$ が，各期のステップにあり，他の期間と独立していることと，各期の条件付き期待効用関数 $\int u_t(a_t^*(\cdot, w_t)) d\phi_t(q_t)$ もその期間のみの変数 c_t によって最大化すればよいので，前稿の問題 3. 2 より解法は，容易になった。そして，期間 1 の消費行動は，従来の一般均衡論の範囲で解の存在を示せる。

残された問題は，各期間のステップで解が存在するかを示さなければならない。次の定理 3. 2 によって，それが示されるが，その前に，証明に必要な条件および記号を定義しよう。まず，最適解の存在のための必要十分条件は，Green の必要十分条件である。それに用いられる先物価格の相対価格 q_t は，すでに各期間ごとに正規化されているもので，Green の必要十分条件は，

$$p^1 \gg 0, \quad q_t \in \text{int co supp } \phi_t(q_t), \quad t=2, \dots, \nu$$

となる。 $\Pi_t = \text{int co supp } \phi_t(q_t)$ とおき，空でないと仮定する。

定理 3. 2 の証明において、次の対応 $A(p^1)$ がコンパクトであることを示せばよい。支払可能条件と期間 1 の予算制約式から、先物契約 c は、次の 2 つの集合の交わりに含まなければならない。

$$B(q) = \{c \in R^{(v-1)L} \mid p^t \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0 \\ \text{for all } p^t \in \text{supp } \phi_t(q_t), t=2, \dots, v\}$$

$$H(q) = \{c \in R^{(v-1)L} \mid q_t \cdot c_t = 0, t=2, \dots, v\}$$

$$\Gamma(p_1) = \{x_1 \in R_+^L \mid x_1 \geq 0, p_1 \cdot x_1 \leq p_1 \cdot (c_1^{-1} + e_1)\}$$

行動 (x_1, c) は、現在価格 p^1 を所与として、

$$A(p^1) = \{(x_1, c) \in R_+^L \times R^{(v-1)L} \mid (x_1, c) \in \Gamma(p_1) \otimes \\ (B(q) \cap H(q))\}$$

に属する。

定理 3. 2 問題 3. 2 における解の存在のための必要十分条件は、

$$p^1 \gg 0,$$

$$q_t \in \text{int co supp } \phi_t(q_t), t=2, \dots, v$$

である。

証明 必要性. もし、ある j 財の価格が $p_{ji} = 0$ ならば、[6, Lemma 2. 4] より解は存在しない。今、 $p^1 \gg 0$ かつ $q_t \in \Pi_t$ と仮定する。 Π_t は、仮定より凸、 Δ^t において開であるから、分離定理より、 $q_t \cdot \bar{c}_t = 0$ をみだし、すべての $p^t \in \Pi_t$ に対して、 $p^t \cdot \bar{c}_t \geq 0$ (Π_t のある p^t に対しては、厳密に等号がなりたつ)、 $\bar{c}_t \neq 0$ なる $\bar{c}_t \in R^L$ が存在する。したがって、 (x_1, c)

$\in A(p^1)$ を最適行動とすれば、行動 $(x_1, c + \bar{c}) \in A(p^1)$ は、 u の厳密な単調性によって、すべての $p^1 \gg 0$, $p^1 \in \Pi_t$ に対して、 $u_t(a_t^*(p^1, c_t)) \leq u_t(a_t^*(p^1, c_t + \bar{c}))$ をみたすから、 (x_1, c) が、最適行動であることに矛盾する。それゆえ、解は存在しない。

十分性. [14] の定理 3. 2 における十分性の証明に従う。

4. 市 場 均 衡

本節では、価格ベクトル p^1 に対して、消費者の需要対応を定義し、需要対応の性質を示す。本稿では、先物取引の制約条件を変更したため、需要対応の性質の証明をそれに合わせなければならない。さらに、すべての消費者の超過需要対応を定義し、市場均衡の存在を示す。この結果は、前稿と同様であるので簡単に示す。

現在価格 $p^1 = (p_1, q)$ の予想市場価格の分布 $\Pi_{t=2}^\nu \phi_t(q_t)$ に対する条件は、仮定 2. 4 であったが、それを対応 σ で定義すると、 $\sigma: \Delta^{(\nu-1)l} \rightarrow \Delta^{(\nu-1)l}$ は、

$$\sigma(q) = \text{supp } \Pi_{t=2}^\nu \phi_t(q_t)$$

である。このとき、 $\Pi_{t=2}^\nu \phi_t(q_t)$ が確率測度の弱収束の位相で連続、 σ が上半連続であると仮定すれば、 σ は連続対応である [6, Remark 3. 1]。定理 3. 2 で示した消費者の最適解の存在のための必要十分条件を次のように S で示す。

$$S = \{p^1 \in \Delta^\nu \mid p^1 \gg 0, q_t \in \text{int co supp } \phi_t(q_t), t=2, \dots, \nu\}.$$

S は、凸であると仮定すれば、 Δ^ν において開集合である [6, Lemma 3. 8]。3 節で定義した対応 $A(p^1)$ の性質は、次の補題 [6, Lemma 3. 3] で示される。

補題 4.1 (i) 対応 $A(p^1)$ は, Δ^N 上で凸値かつ閉グラフをもつ.
 (ii) $A(p^1)$ は, S 上でコンパクト値かつ上半連続である.

証明 (i) $A(\cdot)$ は, Δ^N 上で凸値であることは明らかである. $A(\cdot)$ が, 閉グラフをもつことは, $\Gamma(p_1)$ が閉グラフであり, $B(q) \cap H(q)$ が σ の下半連続性 [6, Remark 3.1] によって閉グラフであるが示されるのでわかる. (ii) $A(\cdot)$ が, S 上でコンパクト値であることは, 定理 3.2 からわかる. これゆえ, $A(p^1)$ は, S 上でコンパクト値であり, 閉写像であるから, S 上で上半連続である.

需要対応 $\xi(p^1)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \xi(p^1) = \{ (x_1, c) \in A(p^1) \mid v(x_1, c, p^1) \geq v(x'_1, c', p^1) \\ \text{for all } (x'_1, c') \in A(p^1) \}. \end{aligned}$$

需要対応 $\xi(p^1)$ の性質は, 次の定理で示される.

定理 4.2 (i) $\xi(p^1)$ は, S 上で凸かつコンパクト値かつ上半連続である. (ii) すべての $p^1 \in S$ に対して, $p^1 \cdot \xi(p^1) = p_1 \cdot (c_1^{-1} + e_1)$

証明 Green [6, Theorem 3.6] をみよ.

以上で, 個別需要対応 ξ の性質を示したので, 市場均衡の存在定理を示すことにする. まず, すべての消費者は, I 人とする ($i=1, \dots, I$). i 消費者の価格ベクトルの集合を iS , 個別需要対応を ${}^i\xi$ とする. 個別需要対応がよく定義できる (well-defined) すべての消費者の価格ベクトルの集合を $P = \bigcap_{i=1}^I {}^iS$ とする. P は空でないと仮定される. 各 iS は, 開かつ凸であるから, P も開かつ凸である. 総超過需要対応を $\xi: P \rightarrow R^N$ と表し,

$$\zeta(p^1) = \sum_{i=1}^I \zeta^i(p^1) - (\sum_{i=1}^I e_i, 0)$$

と定義する.

均衡は, すべての i に対して, $z^* \in \zeta^i(p^*)$ かつ $\sum_{i=1}^I z^* = (\sum_{i=1}^I e_i, 0)$ となる $(p^*, z^*, \dots, z^*) \in \Delta^N \times R^{NI}$ である.

各消費者の価格予想は, 次の共通予想の条件 (overlapping expectations) をみたさなければ, 均衡は存在しない [6, Example 4.6].

仮定 4.1 $\Pi_t = \text{int co supp } \phi_t(q_t), t=2, \dots, N$ とおくと, $\Pi = \cap_{t=1}^N \otimes_{t=2}^N \Pi_t$ は空でない.

この経済が均衡するための総超過需要対応 ζ がみたすべき必要条件は, 次のように表される.

(1) ζ は, P 上で凸かつコンパクト値かつ上半連続である.

(2) 狭義の Walras 法則

すべての $p^1 \in P$ に対して, $p^1 \cdot \zeta(p^1) = 0$.

(3) 境界条件

$p^{1k} \rightarrow p^1$, かつ $p^1 \in \partial P$ となる任意の点列 $\{p^{1k}\} \subset P$ と任意の点列 $\{z^k\} \subset \zeta(p^{1k})$ を考える. このとき, 無限の多くの k に対して $\bar{p}^1 \cdot z^k > 0$ であるような $\bar{p}^1 \in P$ がある.

個別需要対応の性質である定理 4.2 と補題 4.3 と仮定 4.1 [14, 4 節] から, ζ は, 以上の 3 条件をみたす. それゆえ, Grandmont の市場均衡補題がなりたつ [5, Lemma 1]. これにより, 次の定理をえる.

定理 4.3 各消費者が、仮定 2.1 から 2.6 をみたすとき、市場均衡のための必要十分条件は、 $\Pi = \cap_{t=1}^T \otimes_{t=2}^T \Pi_t$ が空でないことである。

参 考 文 献

1. J. M. Culbertson, The Term Structure of Interest Rates, Quarterly Journal of Economics 71 (1957), pp. 485 - 517.
2. G. Debreu, Existence of competitive equilibrium, in K. J. Arrow and M. D. Intriligator (eds.) "Handbook of Mathematical Economics, vol. II," North-Holland, Amsterdam, 1982.
3. J. M. Grandmont, Continuity properties of von Neumann-Morgenstern utility, J. Econ. Theory 4 (1972), pp. 45 - 57.
4. _____, On the short run equilibrium in a monetary economy, in J. Drèze (ed.) "Allocation under Uncertainty, Equilibrium, and Optimality," Macmillan & Co., London, 1974, pp. 213 - 228.
5. _____, Temporary general equilibrium theory, in K. J. Arrow and M. D. Intriligator (eds.) "Handbook of Mathematical Economics, vol. II," North-Holland, Amsterdam, 1982.
6. J. R. Green, Temporary general equilibrium in sequential trading model with spot and futures transactions, Econometrica 41 (1973), pp. 1103 - 1123.
7. _____, Preexisting contracts and temporary and general equilibrium, in M. Balch, D. MacFadden, and S. W. Yu (eds.) "Essays on Economic Behavior under Uncertainty, Contributions to Economic Analysis," North-Holland, Amsterdam, 1974, pp. 263 - 286.
8. J. R. Hicks, "Value and Capital," 2nd edn., Clarendon Press, Oxford, 1946.
9. P. R. Halmos, "Measure Theory," Van Nostrand, Princeton, N. J., 1951.
10. K. Nishimura, Multivariate von Neumann-Morgenstern Utility and its Additive Representation, Otemon Economic Studies 16 (1983), pp. 1 - 14.
11. _____, 多計画期間をもつ貨幣経済における一時的一般均衡, 追手門学院大学 20 周年記念論集 経済学部篇, 1987, pp. 157 - 169.

12. _____, 先物市場における予想形成について, 追手門経済論集, 第XXIII巻第1号(1988), pp. 211-218.
13. _____, 多期間先物市場における価格予想形成について, 追手門経済論集, 第XXV巻第3号(1990), pp. 74-99.
14. _____, 多期間先物市場における一時的一般均衡, 追手門経済論集, 第XXVIII巻第1号(1993), pp. 68-87.

(1995年3月6日受理)