

強い衝撃波の漸近安定性

浅倉 史 興

1 序 論

簡単でよく知られた，散逸項のないバーガース (Burgers) 方程式：

$$u_t + uu_x = 0 \quad (1)$$

から出発しよう．この方程式の古典解は，特性曲線に沿って一定の値であるので，特性曲線は

$$x = u(\xi, 0)t + \xi$$

という直線となる．たとえば，初期値として関数

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq -a \\ -\frac{x}{a} & -a \leq x \leq 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

を $t = 0$ で与えると ($a > 0$)，特性曲線 (直線) は

$$x = \begin{cases} t + \xi & x \leq -a \\ -\left(\frac{\xi}{a}\right)t + \xi & -a \leq x \leq 0 \\ \xi & x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

となる。これらの特性曲線は $t < a$ において互いに交わらないので、古典解は

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq t-a \\ -\frac{x}{a-t} & t-a \leq x \leq 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

と表示される。ところが $t=a$ で特性曲線は交わり、解においては

$$u(x, a) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

という不連続性があらわれる。したがって、 u を古典解として $t \geq a$ に延長することはできない。この例では、 $x=t-a$, $x=0$ 上で u は微分可能でないので、「古典解」として扱うのは不適切かもしれないが、初期値として

$$u_0(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{x}{a} \right)$$

をとれば、同様な不連続性があらわれるのは明白であろう。

以上のことにより、解を $t \geq a$ に延長するためには、不連続な解を何らかの意味で許容しなければならないことがわかる。そこで方程式(1)が保存則形：

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0 \quad (6)$$

にあらわせることに注目する；保存則の積分形は

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx + \frac{1}{2} u(x_2, t)^2 - \frac{1}{2} u(x_1, t)^2 = 0 \quad (7)$$

である。たとえば $t \geq a$ において、 u が

強い衝撃波の漸近安定性

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq s(t-a) \\ 0 & x > s(t-a) \end{cases} \quad (8)$$

の形であらわされるとすると、

$$s = \frac{1}{2} \quad (9)$$

と定めれば、保存則 (7) が成立することがわかる。このような積分形の保存則をみたす解を (6) の弱解 (weak solution) といい、保存則形にあらわされる非線形方程式の時間的な大域解としては、今後このような弱解を考えることにする。とくに (8) の形の弱解を衝撃波という。

この例では、解は終局的に一つの衝撃波となることが示されている。さらに、その衝撃波の速度は、初期値の遠方の値 0, 1 のみに依存して定まり、 a には依らないことがわかる。さて

$$u_{\infty}(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{t}{2} \\ 0 & x > \frac{t}{2} \end{cases} \quad (10)$$

と定めると $u_{\infty}(x, t)$ は初期値を

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

とするときの (1) の弱解である。この $u_{\infty}(x, t)$ から出発すると、はじめの初期値 (2) は (11) の a をパラメータとする摂動と考えられる；また、初期値問題の解 (4), (8) は $t \geq a$ においては衝撃波 $u_{\infty}(x, t)$ を a をパラメータとして平行移動したものとなっている。この意味で衝撃波 $u_{\infty}(x, t)$ は摂動に対して漸近安定であるという。

以上の考察を、保存則形にあらわされる非線形方程式系に適用してみよう。 $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を未知関数系、 $F(U) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ をフラックス・ベクトルとするとき、次の形の方程式系を保存則系 (system of

強い衝撃波の漸近安定性

conservation laws) という.

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (12)$$

とくに, ヤコビ行列 $F'(U)$ が n 個の相異なる実固有値 (特性根):

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_n(U)$$

を持つとき, 保存則系は双曲型 (hyperbolic) であるという. この論文では, 各々の特性方向場が真性非線形 (genuinely nonlinear):

$$r_i \cdot \text{grad } \lambda_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

であることを仮定する. ここで $r_i(U)$ は $\lambda_i(U)$ に属する $F'(U)$ の右固有ベクトルである. 真性非線形でない場合は, 衝撃波がこの論文の意味で漸近安定とならないので, この仮定は以下の議論で重要である. 実際の物理モデルの方程式系は, 仮定がみたされない場合が多いように思われるが, 等エントロピー理想気体の方程式系は真性非線形である. このような双曲型保存則系では, 初期値問題が (すくなくとも時間局所的には) Hadamard の意味で適切 (well-posed) であるので, 方程式系 (12) に $t=0$ で初期値:

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad (13)$$

与えることにする. とくに初期データが

$$U_0(x) = \begin{cases} U^- & x < 0 \\ U^+ & x > 0 \end{cases} \quad (14)$$

の形のとき, この初期値問題を Riemann 問題という.

さて, 上の保存則の積分形をもとに, 次の定義をする.

定義 1.1 局所可積分関数 $U(x, t)$ が初期値問題 (12), (13) の弱解であるとは, 対応 $t \mapsto U(\cdot, t) \in L^1_{loc}(R)$ が連続で, 台が有界な任意のリップシッツ関数 $\phi \in \text{Lip}_c(R \times R_+)$ に対して積分等式:

$$\iint_{R \times R_+} (U \cdot \phi_t + F(U) \cdot \phi_x) dx dt + \int_R U_0(x) \cdot \phi(x, 0) dx = 0 \quad (15)$$

が成立するときである.

一般の真性非線形な双曲型保存則系に対して, 上記の意味での弱解の存在を示したのは, J. Glimm [9] である. Glimm は巧妙な差分スキームによる差分近似解に局所的相互作用量 $Q(\Delta)$ を定義し, 初期データの全変動量が十分に小さいとき, 全相互作用量が有界であること:

$$\sum_{\Delta} Q(\Delta) \leq Q_0 \quad (16)$$

を証明した. この評価により, Glimm 近似解の部分列が弱解に収束する. 一方で Nishida [16] は, 等温気体の方程式系の解を Glimm 差分法を用いて考察し変動量が大きい初期データにたいしても弱解の存在を示した. 以上のことを考え, ここでは Glimm 差分法を用いて作られた解における衝撃波の漸近安定性を論ずる. 初期データ $U_0(x)$ の仮定として:

1. 全変動量は有界である
2. $U^+ = U_0(\infty)$, $U^- = U_0(-\infty)$ としたときの Riemann 問題の解 $U_\infty(x, t)$ は定数領域と衝撃波のみからなる
3. Glimm 差分解の全相互作用量は有界である

をおく. このとき Glimm 差分法によりつくられる解について (仮定 3. より解が存在する), 次の T. P. Liu による弱安定性定理は基本的である; この

強い衝撃波の漸近安定性

定理は、仮定 2. において、衝撃波だけでなく膨張波もあらわれる場合にも成立する。

定理 1.1 (Liu [12]) Riemann 問題の解 $U_\infty(x, t)$ に k -衝撃波があらわれるとき、弱解 $U(x, t)$ においても k -衝撃波が現れ、これらの衝撃波の速度と強さは、 $U_\infty(x, t)$ の衝撃波の速度と強さにそれぞれ一様収束する。さらに、となりあった衝撃波のあいだの領域においては、解の変動量は 0 に減衰する。

この定理においては、初期値が何らかの意味で小さいという条件がないので、強い衝撃波があらわれる場合にも、定理の結論は成立することに注目する。したがって、われわれの課題は収束の速さを求めることである。もっとも速い場合を考察するために、初期値に次の仮定をおく：ある正数 M が存在して

$$U_0(x) = \begin{cases} U_\infty^- & x < -M \\ U_\infty^+ & x > M \end{cases} \quad (17)$$

が成立する。初期値の全変動量が十分に小さいときは Liu [14] により、この仮定のもとで衝撃波の速度と強さは、 $U_\infty(x, t)$ の衝撃波の速度と強さにそれぞれ $t^{-(2-\varepsilon)}$ ($\varepsilon > 0$) のオーダーで収束し、さらに、となりあった衝撃波のあいだの領域においては、解の変動量は 0 に同じオーダーで減衰することが示されている。この場合の証明のポイントは、衝撃波曲線が膨張波曲線に 3 次のオーダーで接触していることである。

2 単一の強い衝撃波の漸近安定性

この節では $U_\infty(x, t)$ が単一の k -衝撃波：

強い衝撃波の漸近安定性

$$U_{\infty}(x, t) = \begin{cases} U_{\infty}^{-} & x < s \\ U_{\infty}^{+} & x > s \end{cases} \quad (18)$$

よりなる場合を考察する. ここで $|U_{\infty}^{+} - U_{\infty}^{-}|$ は必ずしも小さくないとする. I. L. Chern は [6] において, 次の初期値問題:

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad U \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad (19)$$

$$U_0(x) = \begin{cases} U^{-}(x) & x < 0 \\ U^{+}(x) & x > 0 \end{cases} \quad (20)$$

の解の存在と, 近似解の打ち切り誤差解析をした. 存在定理は:

定理 2.1 (Chern [6]) 定数状態 U_{∞}^{-} と U_{∞}^{+} を結ぶ Riemann 問題の解が単一の k -衝撃波より成るとする. 初期値の $U_{\infty}^{\pm}$ からの摂動量:

$$\eta = T. V. (U^{-}(x) - U_{\infty}^{-})|_{x < 0} + T. V. (U^{+}(x) - U_{\infty}^{+})|_{x > 0} \quad (21)$$

が, 十分に小さいとき, 強い k -衝撃波を含む大域的弱解が存在する.

証明の概略. 強い衝撃波と弱い波の相互作用により生じる波の評価がポイントである. 話を単純にするために, 強い衝撃波の右側の領域で考えることにする. $k+1$ -波より速い波は, 強い k -波と相互作用を起こさないの
で, 波はそのまま伝播する; 1 -波から k -波までは必ず相互作用を起こす. Chern は j -波が ($1 \leq j \leq k$) 強い衝撃波と相互作用を起こすと, それによ
る l -散乱波 $\alpha_{l,j}$ ($l > j$) が発生し, その大きさが

$$\alpha_{l,j} = O(1)\alpha_j + (2 \text{ 次以上の項})$$

と評価されることを示した. さらに, うえの 2 次以上の項の総和が一様に有界であることを示して, Glimm 近似解の収束を証明した.

強い衝撃波の漸近安定性

Chern 解の漸近安定性は Asakura [4] により証明された。

定理 2.2 初期値が (17) をみたし、さらにうえの (21) における η が十分に小さいとする。このとき、弱解 $U(x, t)$ における強い k -衝撃波の速度と強さは、 $U_\infty(x, t)$ の衝撃波の速度と強さにそれぞれ $t^{-3/2}$ のオーダーで一様収束する。さらに、その衝撃波の外側においては、解の全変動量は $t^{-1/2}$ のオーダーで 0 に減衰する。

証明の概略。 再び強い衝撃波の右側の領域で考えることにする。方程式が双曲系であるので、初期値の $|x| \leq M$ にあるすべての変動部分は、十分に大きな時刻 T までに強い k -衝撃波と相互作用をしてしまう。したがって $t > T$ においては、オーダー 2 の波をのぞき、すべての弱い波は $k+1$ から n -波の方向に伝播する；いいかえれば、強い衝撃波から遠ざかっていく。とくに k と $k+1$ -波のあいだの領域は、航跡領域 (wake region) となる。さて、 n -波の外側と航跡領域のあいだの変動量は $O(1)\eta$ であるので、Riemann 問題の一意性のもとで η を十分小さくすると、航跡領域での値は U_∞^+ に近いことがわかる。このあいだの領域に Liu [13] の議論を用いると、そこでは解の全変動量がオーダー $t^{-1/2}$ で減衰することがわかる。また、弱い波の相互作用により生ずる波の全体は、オーダー $t^{-3/2}$ で減衰し、Riemann 問題の一意性のもとでは、航跡領域においてもオーダー $t^{-3/2}$ で減衰する。これらのことと、衝撃波の大きさと速度はその両側の値の連続関数であることにより、定理の結論が導かれる。

3 二つ以上の強い衝撃波の漸近安定性

解に二つ以上の強い衝撃波が現れる場合は、一般の双曲型保存則系についてほとんど何も知られていない。そこで、われわれはつぎの等温気体の

方程式系に話を限ることとする.

$$u_t + \left(\frac{1}{v}\right)_x = 0, \quad v_t - u_x = 0, \quad (x, t) \in R \times R_+, \quad (22)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq \underline{v} > 0, \quad x \in R. \quad (23)$$

次の Nishida [16] による大域解の存在定理は, 今日では古典の一つである.

定理 3.1 (Nishida[16]) 初期値 $v_0(x)$ と $u_0(x)$ が一様有界でかつ変動量が局所的に有界ならば, 大域的な弱解が存在する.

証明は Glimm 差分法による. [16] では強い波と強い波のあいだの相互作用が考察され, 近似解の全変動量が時間について一様有界であることが, 直接に証明されている. 全相互作用量が一様有界であることは, Liu [12] で言及されており, 実際の証明は Asakura [1] に書かれている. したがって, Liu の弱安定性定理が成立する. 強安定性については, 次の形の定理が Asakura [5] により得られた.

定理 3.2 定数状態 U_∞^- と U_∞^+ を結ぶ Riemann 問題の解が 1-衝撃波 S_1 と 2-衝撃波 S_2 より成り, それらの中間状態が U_M であるとする. このとき Nishida 解に強い 1-衝撃波と 2-衝撃波が現れ, それらの強さと速度は, それぞれ S_1 と S_2 の強さと速度に $t^{-\kappa}$ ($\kappa > 0$) のオーダーで収束する. さらに, 大きな t において $U(x, t) = U_\infty^-$ (または U_∞^+) が強い 1 (または 2)-衝撃波の左側 (または右側) の領域で成立し, これら二つの強い衝撃波のあいだの領域においては $U(x, t)$ は U_M に $t^{-\kappa}$ のオーダーで収束する. ここで κ は, S_1 と S_2 の強さに依存する定数で, それらが大きくなると 0 に近づく (可能性がある).

強い衝撃波の漸近安定性

証明の概略. 等温気体の方程式系の性質により, $0 < \delta < 1$ をみたす定数 δ が存在して Chern の散乱波の評価が

$$|\alpha_{21}| = \delta |\alpha_1| + (2 \text{ 次の項}),$$

$$|\alpha_{12}| = \delta |\alpha_2| + (2 \text{ 次の項})$$

となる; Riemann 不変量の座標平面において, 衝撃波曲線の傾きが 1 より小さいことからこの評価が導かれる. これは, 弱い波が強い衝撃波と相互作用を起こすときに発生する散乱波の大きさが, この弱い波の大きさの δ 倍に減ることを示している. 一方, その散乱波がもう一つの強い衝撃波と相互作用を起こすまでの時間は, これらの強い衝撃波の強さに依存する (弱安定性定理により S_1 と S_2 の強さとしてよい). したがって, 大きな時刻 t において, 弱い波が強い衝撃波とそれまでに何回相互作用をくりかえしたかを数えれば, 弱い波の大きさの減衰のオーダーが得られる.

参 考 文 献

- [1] F. Asakura, Decay of solutions for the equations of isothermal gas dynamics, Japan J. Industrial and Applied Math. Vol. 10, No. 1 (1993), 133–164.
- [2] F. Asakura, Asymptotic behavior of solutions for the equations of isothermal gas dynamics, Otemon Economic Studies, Vol. 24 (1991), 71–88.
- [3] F. Asakura, Asymptotic behavior of solutions for the equations of isothermal gas dynamics II, Otemon Economic Studies, Vol. 26 (1993), 29–51.
- [4] F. Asakura, Asymptotic stability of solutions with a single strong shock wave for hyperbolic systems of conservation laws, to appear Japan J. Industrial and Applied Math. Vol. 11 (1994), No. 2.
- [5] F. Asakura, Asymptotic stability of solutions with strong discontinuities for the equations of isothermal gas dynamics, to appear

- Japan J. Industrial and Applied Math. Vol. 11 (1994), No. 3.
- [6] I. L. Chern, Stability theorem and truncation error analysis for the Glimm scheme and for a front tracking method for flows with strong discontinuities. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 (1989), 815–844.
 - [7] R. Courant and K. O. Friedrichs, *Supersonic Waves and Shock Waves*. Wiley-Interscience New York, 1948.
 - [8] R. J. DiPerna, Decay of solutions of hyperbolic systems of conservation laws with a convex extensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 64 (1977), 1–46.
 - [9] J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 697–715.
 - [10] J. Glimm and P. D. Lax, Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Amer. Math. Soc. Memoir*, No. 101. A. M. S. Providence, 1970.
 - [11] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 537–566.
 - [12] T. P. Liu, Large time behavior of initial and initial-boundary-value problems of general systems of hyperbolic conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 55 (1977), 163–177.
 - [13] T. P. Liu, Decay to N-waves of solutions of general systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 30 (1977), 585–610.
 - [14] T. P. Liu, Linear and nonlinear large time behavior of general systems of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 30 (1977), 767–796.
 - [15] T. P. Liu, Asymptotic behavior of solutions of general system of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Indiana Univ. Math. J.*, 27 (1978), 211–253.
 - [16] T. Nishida, Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system. *Proc. Japan Acad.*, 44 (1968), 642–646.
 - [17] T. Nishida, *Nonlinear Hyperbolic Equations and Related Topics in Fluid Dynamics*. Publ. Math. No. 79–02. Univ. Paris-Sud, 1978.

強い衝撃波の漸近安定性

- [18] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer Verlag New York, 1983.

(平成 6 年 5 月 9 日受理)