

多期間先物市場における一時的一般均衡

西 村 和 志

1. は じ め に

一時的一般均衡論において、Green [4] は、Grandmont の価格予想形成のもとで、直物市場と先物市場の一般均衡の存在を証明した。本稿では、それらの研究をふまえ、西村 [10, 11, 12] でえられた結果をもちいて、彼らの 2 期間モデルを多期間モデルに拡張し、直物市場と多期間先物市場の一般均衡の存在を証明することを目的とする。

本モデルでは、期間 1 において、消費者は、今期に受け渡す先物契約の清算を済ませた後、直物市場において行動の選択をしなければならないと同時に、前期までにかわした累積先物契約を見直し、今期開かれる先物市場において先物契約の行動の選択をしなければならない。

第 2 節では、多期間先物市場のモデルの設定を西村 [12] から要約した。不確実性の仮定は、消費者が、将来期間に行動したときの成果 (consequences) の不確実性と同時に、将来環境の不確実性を表現する将来直物価格の予想を仮定する。将来直物価格の予想は、行動の成果の不確実性と、変換関数によって結合される。これにより、将来直物市場における最適計画は、今期の先物契約高を決定するための直接・間接期待効用関数を導き出すために用いられる。

第 3 節では、直物市場と先物市場における消費者の最適行動が定式化さ

れる。意志決定の解の存在のための必要十分条件がもとめられるが、Green [5] の証明より、Grandmont [4] の証明にしたがった。

第4節では、需要対応についての諸定理、市場均衡の定理は、Green [5] の証明より Grandmont [4] の証明が適用される。

2. モデルの設定

すべての消費者は、 ν 期間の計画期間をもつ。期間1は、現在を、期間2より期間 ν までは、引き続き将来期間を表す。各期間では、消費者にとって利用可能であるが引き続き次の期間まで貯蔵不可能な消費財が、各期間同じに l 種類あるとする。 l 種類の消費財の直物市場があり、 l 種類の消費財に対する先物市場は、期間2より期間 ν までであるとする。われわれの考察する問題は、 $l + (\nu - 1)l$ 市場における均衡の存在を示すことである。その問題の解明のための諸定義と諸仮定、そして市場均衡の存在証明に必要な西村 [12] の結果を要約して以下で述べる。

消費者は、 ν 期間の消費財の賦存量 $e = (e_1, \dots, e_\nu) \in R_+^{\nu l}$ をもつ。ここで、 $e_i \in R_+^l (i = 1, \dots, \nu)$ であり、それぞれ確実に予見できるものとする。計画時の期首に、消費者は負債をもっていないとする。また、前期の先物契約は、今期に清算をする契約のみが、市場が開かれる前に清算されているものとする。そのときの取引費用はかからないものとする。

仮定 2.1 $e \gg 0$ とする。

ν 期間の消費流列を、 $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in R_+^{\nu l}$ とする。前期の累積先物契約の流列を、 $c^{-1} = (c_1^{-1}, \dots, c_{\nu-1}^{-1}) \in R^{(\nu-1)l}$ とする。今期の市場が開かれる前の消費者の賦存量は、支払い不能にはならないものとする。すなわち、 $c_1^{-1} + e_1 > 0$ である。

また、今期の先物市場における先物契約の流列を、 $c=(c_2, \dots, c_\nu) \in R^{(\nu-1)l}$ とする。消費者は、 $c_{it} > 0$ であれば、時点 t の期首に商品 i を受け取り、その契約高を支払う。 $c_{it} < 0$ であれば、その逆である。期間 1 での市場価格ベクトルは、 $p^1=(p_1, q_2, \dots, q_\nu) \in R_+^l/\{0\}$ であり、 p_1 は、今期の消費財の価格ベクトルを表し、 $q=(q_2, \dots, q_\nu)$ は、先物価格ベクトルを表す。各期の直物価格ベクトルは、 $p^2, \dots, p^\nu \in R_+^l/\{0\}$ である。市場価格ベクトル p^1 は、次のように正規化される。

$$p^1 \in \mathcal{A}^1 = \{p^1 \in R_+^l \mid \sum_{i=1}^l p_{1i} + \sum_{t=2}^\nu \sum_{i=1}^l q_{ti} = 1\}.$$

各期の直物価格ベクトルは、次のように正規化される。

$$p^t \in \mathcal{A}^t = \{p^t \in R_+^l \mid \sum_{i=1}^l p_{ti} = 1\}, t=2, \dots, \nu.$$

さて、消費者が、消費流列 $(x_1, \dots, x_\nu)$ を選択する際に、期間 1 の消費行動の成果 (consequences) は確実性下にあり、期間 2 から期間 ν までの将来消費行動の成果は不確実性下にあるとする。消費者の消費流列に対する選好は、von Neumann-Morgenstern の期待効用最大化の仮説をみatus。

消費者の行動および計画の成果の空間は、消費流列の空間 $C=R_+^l$ である。各期間の消費の実現可能な成果の空間 R_+^l で定義されるすべての確率分布の集合を $M(R_+^l)$ とする。直積空間 $M^\nu(R_+^l)$ 上において、消費者は、確率分布を選好するが、その選好は全順序 $\succeq$ によって表される。そこで、次の仮定をおこう。

仮定 2.2 写像 $v: M^\nu(R_+^l) \rightarrow R$ が、任意の $\mu \in M^\nu(R_+^l)$ に対し、 $v(\mu) = \int_C u d\mu$ によって定義される選好 $\succeq$ の表現であるような、連続かつ有界な von Neumann-Morgenstern 効用関数 $u: C \rightarrow R$ が存在する。任意の効用関数 u は、凹かつ単調である。

仮定 2. 2 のもとで、さらに、任意の $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\nu) \in M^\nu(R_+^l)$ に対して、期間 1 では、確実性下にあるから、 μ_1 が確率 1 で退化した確率分布をもつとし、消費者は、期間 2 から期間 ν までの将来消費の成果について不確実性に直面しているとする。このとき、西村 [9] によれば、任意の $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\nu) \in M^\nu(R_+^l)$ に対して、写像 $v(\mu)$ は、次の形をもつ。

$$\text{仮定 2. 3} \quad v(\mu) = u_1 + \sum_{i=2}^{\nu} \int_{R_+^l} u_i d\mu_i.$$

仮定 2. 2 および 2. 3 における不確実性の仮定は、消費者が将来期間に行動したときの成果の不確実性を表しているが、将来直物価格の予想に伴う不確実性が、次に仮定される。後者の不確実性は、経済システムを含む将来環境を反映したものである。Grandmont は、外生的予想を仮定した。Grandmont の予想関数は、われわれのモデルでは、非確率変数である現在価格 p^1 に、期間 2 から期間 ν までの将来直物価格の確率分布を対応させる。期間 2 から期間 ν までの将来直物市場価格の確率分布は互いに独立であるとする。各期間の確率分布全体の空間は、次元が同じため $M(\Delta^{(\nu-1)l})$ とする。このとき、消費者の予想市場価格の分布は、現在価格 $p^1 = (p_1, q_2, \dots, q_\nu)$ に対して、次のように定義される。

$$\text{仮定 2. 4} \quad \phi(p^1) = \prod_{i=2}^{\nu} \phi_i(p^1) : \Delta^l \longrightarrow M(\Delta^{(\nu-1)l}).$$

ここで、 $\phi_i(p^1)$ は互いに独立である。また、予想関数 $\phi(p^1)$ は、連続であるとする。

さて、仮定 2. 2 および 2. 3 における、将来期間の消費行動成果の不確実性と、仮定 2. 4 における、将来直物価格の予想に伴う不確実性は、Grandmont 流の変換関数を仮定することによって対応づけられること

を示そう。

消費者の今期の消費行動と将来消費計画は、期間 1 において決定される。期間 1 における市場での取引を決定することを行動 (action) と呼び、 $a_1 = (x_1, c_2, \dots, c_\nu) \in R_+^l \times R^{(\nu-1)l}$ で表す。次に、期間 2 以降の消費行動の決定を計画 (plans) と呼び、期間 $t(t=2, \dots, \nu)$ の計画を、 $a_t = x_t \in R_+^l$ ($t=2, \dots, \nu$) とする。まず、消費者は、期間 1 において価格ベクトル p^1 と賦存量 $e_1 + c_1^{-1}$ を所与として、 $A_1 = R_+^l \times R^{(\nu-1)l}$ の部分集合 $\beta_1(p^1, e_1 + c_1^{-1}) = \{a_1 \in A_1 \mid p^1 \cdot a_1 \leq p^1 \cdot (e_1 + c_1^{-1})\}$ に制約された行動 a_1 を選択する。次に、計画 a_t は、現在価格 p^1 と将来直物価格 p^t を所与として、期間 1 で選択された行動 a_1 、各期間 $i(i=2, \dots, t-1)$ で計画された各計画 a_i と期間 t の賦存量 $c_t + c_t^{-1} + e_t$ に依存する、各 A_t の部分集合 β_t に制約される。これらの部分集合は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \beta_t(p^t, c_t + c_t^{-1} + e_t \mid p^1, a_1, \dots, a_{t-1}) \\ & = \{a_t \in A_t \mid p^t \cdot a_t \leq p^t \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t)\}, t=2, \dots, \nu-1, \\ & \beta_\nu(p^\nu, c_\nu + e_\nu \mid p^1, a_1, \dots, a_{\nu-1}) \\ & = \{a_\nu \in A_\nu \mid p^\nu \cdot a_\nu \leq p^\nu \cdot (c_\nu + e_\nu)\}. \end{aligned}$$

要するに、各将来期間の計画の選択において、現在価格 p^1 と $\beta_1(p^1, e_1 + c_1^{-1})$ に含まれる期間 1 の行動 a_1 を固定した上で、将来直物価格列 $p^2, \dots, p^\nu$ の実現を所与として、計画の空間 $A_2, \dots, A_\nu$ の部分集合である各将来期間の予算制約式 $\beta_2(p^2, c_2 + c_2^{-1} + e_2 \mid p^1, a_1), \dots, \beta_\nu(p^\nu, c_\nu + e_\nu \mid p^1, a_1, \dots, a_{\nu-1})$ にそれぞれ含まれる計画 $a_2, \dots, a_\nu$ が選択される。すなわち、各計画は、将来直物価格 $p^2, \dots, p^\nu$ と将来賦存量 $c_2 + c_2^{-1} + e_2, \dots, c_\nu + e_\nu$ にそれぞれ依存する可測関数 $a_2(p^2, c_2 + c_2^{-1} + e_2) : \mathcal{A}^l \rightarrow A_2 = R_+^l, \dots, a_\nu(p^\nu, c_\nu + e_\nu) : \mathcal{A}^l \rightarrow A_\nu = R_+^l$ によって表される。

消費者は、行動 a_1 を固定した、次の連続な線形写像 γ をもつとし、関数 γ を変換関数ということにする。

仮定 2. 5 $\gamma: a_1 \cdot \prod_{i=2}^{\nu} a_i(\mathcal{I}^i \times R_+^i) \longrightarrow C,$

ここで、各 $a_i(\mathcal{I}^i \times R_+^i)$ は、各期間の価格と賦存量に依存する可測関数 $a_i: \mathcal{I}^i \times R_+^i \longrightarrow A_i$ の値域を表す。

変換関数 γ は、期間 1 の価格と行動の与件と、期間 2, ..., ν の市場価格と予算制約のもとでの計画を選択させることを意味するから、行動と計画の成果は、現在と将来の市場システムの環境に依存するということを仮定することになる。

消費流列の成果の空間 C 上には、全順序 $\succeq$ が定義されているから、行動と計画の成果 $\gamma(a_1, a(p^2, c_2 + c_2^{-1} + e_2), \dots, a_{\nu}(p^{\nu}, c_{\nu} + e_{\nu}))$ は、von Neumann-Morgenstern 効用関数 u によって、次のように表せられる。

$$u(\gamma(a_1, a_2(p^2, c_2 + c_2^{-1} + e_2), \dots, a_{\nu}(p^{\nu}, c_{\nu} + e_{\nu}))) \\ = u_1(x_1) + \sum_{i=2}^{\nu} u_i(a_i(p^i, c_i + c_i^{-1} + e_i)), \text{ ただし, } c_{\nu}^{-1} = 0. \quad 2.1$$

一方、変換関数 γ は、価格 $p^2, \dots, p^{\nu}$ が、仮定 2. 4 により確率変数であるから、確率変数であり、確率変数 γ により成果の空間に定義される確率分布を誘導できる。すべての事象 $S = \prod_{i=1}^{\nu} S_i \subset B(R_+^{\nu})$ に対して、 $\gamma^{-1}(S) = \prod_{i=2}^{\nu} \gamma_i^{-1}(S) \subset B(\mathcal{I}^{(\nu-1)})$ となる。予想関数 $\phi(p^1)$ に対して、各 $\mathcal{I}^i$ 上の確率分布 ϕ_i は、互いに独立性が仮定されているので、任意の p^1 に対して、予想価格確率分布の直積分布 $\prod_{i=2}^{\nu} \phi_i(p^1, \gamma_i^{-1}(S))$ が得られる。この確率分布を

$$\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_{\nu}(\cdot)}(S) = \prod_{i=2}^{\nu} \phi_i(p^1, \gamma_i^{-1}(S)) \quad 2.2$$

と定義する。このようにして、 C 上に確率分布 $\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_{\nu}(\cdot)}$ が、可測写像 γ によって誘導される。しかも、誘導された分布は、予想関数 $\phi(p^1)$ と γ 関数の条件から、 p^1 と a_1 が所与であることを示す。式 2. 1 と 2. 2 を使って、仮定 2. 2 より、

多期間先物市場における一時的一般均衡

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_{(v-1)}^1} u(\gamma(a_1, a_2(p^2, c_2+c_2^{-1}+e_2), \dots, a_v(p^v, c_v+e_v))) d\phi(p^1) \\ &= \int_C u d\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_v(\cdot)} \end{aligned}$$

という関係が、任意の $a_1 \in \beta_1(p^1)$, $a_t(p^t, c_t+c_t^{-1}+e_t) \in \beta_t(p^t, c_t+c_t^{-1}+e_t \mid p^1, a_1, \dots, a_{t-1})$ ($t=2, \dots, v, c_v^{-1}=0$) に対して成り立つ。したがって、仮定 2.3 のもとで、 $\mu_{p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_v(\cdot)}$ の期待効用は、

$$\begin{aligned} v(\mu_{p^1, a_1}) &= u_1 + \sum_{t=2}^v \int u_t d\mu_{t, p^1, a_1, a_2(\cdot), \dots, a_v(\cdot)} \\ &= u_1(x_1) + \sum_{t=2}^v \int u_t(a_t(\cdot, c_t+c_t^{-1}+e_t)) d\phi_t(p^1) \quad 2.3 \end{aligned}$$

と表される。これを、 a_1 と p^1 の条件付き期待効用関数と呼び、 $v(a_1, p^1)$ で表す。

最適行動を求めるために、条件付き誘導分布に対する選好関係は、仮定 2.2 の全順序 $\succeq$ をもちいることができる。Grandmont の意志決定のルールを次のように定める。

今、 p^1 を所与とし、任意の行動 $a_1, a'_1 \in \beta_1(p^1)$ に対して、 $\mu_{p^1, a_1} \succeq \mu_{p^1, a'_1}$ であるならば、そのときにかぎり、 $a_1 \succeq_{p^1} a'_1$ とする。

$\mu_{p^1, a_1} \succeq \mu_{p^1, a'_1}$ であるならば、関係式 2.3 から、 $v(a_1, p^1) \geq v(a'_1, p^1)$ であるから、上述のルールは、 $v(a_1, p^1) \geq v(a'_1, p^1)$ であるならば、そのときにかぎり、 $a_1 \succeq_{p^1} a'_1$ とすると、いいかえてもよい。

3. 消費者の最適解の存在

消費者は、予算制約の集合 $\beta_1(p^1)$, $\beta_2(p^2, c_2+c_2^{-1}+e_2 \mid p^1, a_1)$, $\dots$, $\beta_v(p^v, c_v+e_v \mid p^1, a_1, \dots, a_{v-1})$ のもとで、期間 1 の行動 a_1 の選択と計

画 $a_2, \dots, a_\nu$ を 2 段階で決定する。第 1 段階は、期間 1 の価格 p^1 と行動 a_1 が所与のとき、予算制約の集合 $\beta_2(p^2, c_2 + c_2^{-1} + e_2 \mid p^1, a_1), \dots, \beta_\nu(p^\nu, c_\nu + e_\nu \mid p^1, a_1, \dots, a_{\nu-1})$ のもとで、期間 2 から期間 ν までの計画を決定する問題が、ラグランジュ未定乗数法によって解かれる。第 2 段階では、第 1 段階の問題の解をもちいて条件付き期待効用関数をもとめ、予算制約の集合 $\beta_1(p^1)$ のもとで、この条件付き期待効用関数を最大とする期間 1 の行動 a_1 をダイナミック・プログラミングによってもとめる。この最大化問題の解の存在のための必要十分条件がもとめられる。また、条件付き期待効用関数の性質ももとめられる。

われわれのモデルは、先物市場の取引を含んでいるので、消費者が期間 2 から期間 ν において破産しないように支払可能条件を仮定する。すなわち、期間 2 において、消費者が支払い可能となるのは、すべての $p^2 \in \text{supp } \phi_2(p^1)$ に対して、 $p^2 \cdot (c_2 + c_2^{-1} + e_2) \geq 0$ となることである。期間 3 以降において、消費者が支払い不能になっても、すなわち破産しても、計画の段階であり、期間 2 において市場で調整されるかもしれないが、本稿では、期間 3 から期間 ν まで支払可能条件を課すことにする。期間 t の支払可能条件は、すべての $p^t \in \text{supp } \phi_t(p^1)$ に対して、

$$p^t \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0, (t=2, \dots, \nu-1)$$

となる。期間 ν においては、累積先物契約残高がなく、新規の先物市場であるから、支払可能条件は、次のようになる。すべての $p^\nu \in \text{supp } \phi_\nu(p^1)$ に対して、

$$p^\nu \cdot (c_\nu + e_\nu) \geq 0$$

となる。

第 1 段階では、もし、将来直物市場価格 p^t が実現すれば、消費者は、消費流列に対する効用関数 $u(x_1, \dots, x_\nu) = u_1(x_1) + \sum_{t=2}^\nu u_t(x_t)$ を最大化

することによって計画 $a = (a_2, \dots, a_\nu)$ を決定する. すなわち, 消費者は次の問題を解く.

問題 3. 1 仮定 2. 1 から 2. 5, および $p^t \gg 0$, $p^t \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0$, $(t=2, \dots, \nu, c_\nu^{-1}=0)$, $a \in R_+^{(\nu-1)l}$ のもとで, 現在消費 x_1 と先物契約 c を所与するとき,

$$\max_{(a_2, \dots, a_\nu)} u_1 + \sum_{t=2}^{\nu} u_t$$

$$\text{subject to } p^t \cdot a_t \leq p^t \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t), t=2, \dots, \nu, c_\nu^{-1}=0.$$

問題 3. 1 は, Weierstrass の定理によって最大値の存在が示される. すなわち, 効用関数 $u(x_1, \dots, x_\nu)$ が, 空でない有界な閉領域 $\beta_1(p^1)$, $\beta_2(p^2, c_2 + c_2^{-1} + e_2 | p^1, a_1)$, $\dots$, $\beta_\nu(p^\nu, c_\nu + e_\nu | p^1, a_1, \dots, a_{\nu-1})$ で定義されていて, 連続であるから, この領域において最大値をとる. 各 u_t は, 凹関数を仮定しているから, 解の存在は, 明らかである. もし, 効用関数 $u(x_1, \dots, x_\nu)$ が連続微分可能であると仮定すれば, 問題 3. 1 は, ラグランジュ未定乗数法によって解れるから, 解を $a_t^*(p^t, c_t)$ とする.

問題 3. 1 の結果から, ある条件のもとで価格パラメーターの指標によって方向づけられた空間から成果の空間に変換する γ 関数は, ここで定義できる. 仮定 2. 5 の γ 関数は, 現在・将来環境 $\Delta^l \times (\Delta^l \times R^l)^{(\nu-1)}$ の空間で定義され, 成果 $C = R_+^l$ に値域をもつ確率変数であるから, この写像は,

$$\Delta^l \times (\Delta^l \times R^l)^{(\nu-1)} \xrightarrow{a^*} R_+^{nl} \xrightarrow{\gamma} R_+^{nl}$$

という関係をもつ. したがって, $\gamma \circ a^*(p^2, \dots, p^\nu, c) = (x_1, a_2^*(p^2, c_2), \dots, a_\nu^*(p^\nu, c_\nu))$ となる. この変換関数 $\gamma \circ a^*$ によって, 消費者の行動と計画の成果に対する直接効用関数 $u(\gamma \circ a^*(p^2, \dots, p^\nu, c))$ は, 式 2. 1 から, 直物 x_1 と先物契約 c の効用が分離されて, $u(\gamma \circ a^*(p^2, \dots, p^\nu,$

$c)) = u_1 + \sum_{t=2}^{\nu} u_t(a_t^*(p', c_t))$ のように和で表される。

次に、式 2. 3 から、 (x_1, c, p^1) の条件付き期待効用関数 v は、支払い可能条件 $p' \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0$, for $p' \in \text{supp } \phi_t(p^1)$, ($t=2, \dots, \nu-1$), $p^\nu \cdot (c_\nu + e_\nu) \geq 0$, for $p^\nu \in \text{supp } \phi_\nu(p^1)$ のもとで、

$$v(x_1, c, p^1) = u_1(x_1) + \sum_{t=2}^{\nu} \int u_t(a_t^*(\cdot, c_t)) d\phi_t(p^1),$$

と定義できる。 p^1 を所与とした選好関係 $\succeq_{p^1}$ が、条件付き期待効用関数 $v(x_1, c, p^1)$ によって表現される。

以上の結果から、第 2 段階に入ると、期間 1 の価格 p^1 が所与のとき、予算制約の集合 $\beta(p^1)$ のもとで、期間 1 における現在消費 x_1 と先物契約 c を決定する問題は、次のようになる。

問題 3. 2 仮定 2. 1 から仮定 2. 5 のもとで、

$$\begin{aligned} \max_{\{a_t\}} J_\nu &= u_1 + \sum_{t=2}^{\nu} \int u_t(a_t^*(\cdot, c_t)) d\phi_t(p^1), \\ \text{subject to } \beta(p^1) &= \{a_1 \in A_1 \mid p^1 \cdot a_1 \leq p_1 \cdot (c_1^{-1} + e_1)\}, \\ p' \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) &\geq 0, \text{ for } p' \in \text{supp } \phi_t(p^1), \quad (t=2, \dots, \\ \nu-1), \quad p^\nu \cdot (c_\nu + e_\nu) &\geq 0, \text{ for } p^\nu \in \text{supp } \phi_\nu(p^1). \end{aligned}$$

問題 3. 2 は、ダイナミック・プログラミングによって解かれる。各期の変数は l なので、総ステップ数は νl である。ここでは、各期 1 変数とみなしたアルゴリズムを示すことにする。再帰式は、 $\omega_1 = p_1 \cdot (c_1^{-1} + e_1)$, $u_{\nu+1}(a_{\nu+1}^*(\cdot, c_{\nu+1})) = 0$ として、

$$\begin{aligned} v_{\nu-1}(\omega_2) &= \max J_{\nu-1} \\ &= \max \left\{ u_2 + \sum_{t=3}^{\nu} \int u_t(a_t^*(\cdot, c_t)) d\phi_t(p^1) \right\}. \end{aligned}$$

この期待値をとると、

多期間先物市場における一時的一般均衡

$$E[v_{\nu-1}(\omega_2)] = E[\max J_{\nu-1}] \\ = \max \left\{ \sum_{t=2}^{\nu} \int u_t(a_t^*(\cdot, c_t)) d\phi_t(p^1) \right\}$$

と表せるから, $v_{\nu}(\omega_1) = \max J_{\nu} = \max \{u_1 + E[v_{\nu-1}(\omega_2)]\}$ となる. さらに, ステップ t では, $1 \leq t \leq \nu-1$ に対して,

$$v_{\nu-t+1}(\omega_t) = \max_{c_t \leq \omega_t} \{u_t + E[v_{\nu-t}(\omega_{t+1})]\}.$$

$t=\nu$ に対して, $v_1(\omega_{\nu}) = \max u_{\nu}$ と表せる.

2 期間モデルの最大化問題の解の存在は, Green の定理 [5, Theorem 2. 1] によって証明された. 多期間モデルも同様に証明されるが, われわれは, Grandmont [4, Proposition 2, (i)] に従う. その際, 最適解の存在のための必要十分条件が, 次の定理 3. 2 に示されるが, それに用いられる先物価格の相対価格 q_t を正規化して, 次のように表す. $q_t \gg 0$, $t=2, \dots, \nu$ に対して,

$$\bar{q}_t(q_t) = \frac{q_t}{\sum q_{it}} \in \Delta^I.$$

多期間モデルのために, Green の必要十分条件は, 各期間に分割されて,

$$p^1 \gg 0, \bar{q}_t(q_t) \in \text{int co supp } \phi_t(p^1), t=2, \dots, \nu$$

となる. $\Pi_t = \text{int co supp } \phi_t(p^1)$ とおき, 空でないと仮定する.

定理 3. 2 の証明において, 次の対応 $A(p^1)$ がコンパクトであることを示せばよい. 支払可能条件と期間 1 の予算制約式から, 先物契約 c は, 次の 2 つの集合の交わりに含まれなければならない.

$$B(p^1) = \{c \in R^{(\nu-1)I} \mid p' \cdot (c_t + c_t^{-1} + e_t) \geq 0 \\ \text{for all } p' \in \text{supp } \phi_t(p^1), t=2, \dots, \nu\},$$

$$H(x_1, p^1) = \{c \in R^{(v-1)l} \mid q \cdot c \leq p^1 \cdot (c_1^{-1} + e_1 - x_1)\}.$$

行動 (x_1, c) は、現在価格 p^1 を所与として、

$$A(p^1) = \{(x_1, c) \in R^u \mid x_1 \geq 0, c \in B(p^1) \cap H(x_1, p^1)\}$$

に属する。

最後に、条件付き期待効用関数 $v(x_1, c, p^1)$ の性質についての定理は、次の通りである。

定理 3.1 期待効用関数 $v(x_1, c, p^1)$ は、 $(x_1, c) \in A(p^1)$, $p^1 \in \mathcal{A}'$ に対して、(i) 有界、連続、(ii) 凹、厳密に単調である。

証明 Grandmont [3, Proposition 3.1] と証明は基本的に同じだが、多変数の効用関数を基礎においているため、西村 [9, 10] による。

定理 3.2 問題 3.2 における解の存在のための必要十分条件は、

$$p^1 \gg 0,$$

$$\bar{q}(q_t) \in \text{int co supp } \phi_t(p^1), \quad t = 2, \dots, v$$

である。

証明 必要性. もし、ある j 財の価格が $p_j^1 = 0$ ならば、[5. Lemma 2.4] より解は存在しない。今、 $p^1 \gg 0$ かつ $\bar{q}_t(q_t) \in \Pi_t$ と仮定する。 Π_t は、仮定より凸、 $\mathcal{A}'$ において開であるから、分離定理より、 $q_t \cdot \bar{c}_t \leq 0$ をみだし、すべての $p^1 \in \Pi_t$ に対して、 $p^1 \cdot \bar{c}_t \geq 0$ (Π_t のある p^1 に対しては、厳密に等号がなりたつ)、 $\bar{c}_t \neq 0$ なる $\bar{c}_t \in R^l$ が存在する。したがって、任意の行動 $a_1 = (x_1, c) \in A(p^1)$ は、行動 $(x_1, c + \bar{c}) \in A(p^1)$ によって優越

される。それゆえ、解は存在しない。

十分性。 $p^1 \gg 0$ かつ $\bar{q}_i(q_i) \in \Pi_i$ と仮定すれば、 $q_i \cdot \bar{c}_i \leq 0$ となるすべての $\bar{c}_i \neq 0$ に対して、 $\bar{q}_i(q_i) \cdot \bar{c}_i \leq 0$ であるから、 $p^1 \cdot \bar{c}_i < 0$ となる $p^1 \in \Pi_i$ が存在する。ところが、 $(x_1, \bar{c}) \in A(p^1)$ であるから、すべての $p^1 \in \Pi_i$ に対して、 $p^1 \cdot (\bar{c}_i + c_i^{-1} + e_i) \geq 0$ である。これゆえ、 $A(p^1)$ が、有界であることを示す。もし、 $A(p^1)$ が、有界でなければ、 $A(p^1)$ の点列 $\{a_i^k = (x_i^k, c^k)\}$ で、 $\|a_i^k\| \rightarrow +\infty$ となるものがある。このとき、 $\{a_i^k / \|a_i^k\|\}$ はコンパクトである単位球上の点列である。それゆえ、単位球の任意の点 $\bar{a}_1 = (\bar{x}_1, \bar{c}_1)$ に収束する部分列がある。 $A(p^1)$ は凸であるから $a_i^k / \|a_i^k\| = (1/\|a_i^k\|)a_i^k + (1 - 1/\|a_i^k\|)0 \in A(p^1)$ となり、 $\{a_i^k / \|a_i^k\|\}$ は、 $A(p^1)$ の点列であって、 $A(p^1)$ は閉であるから、 $\bar{a}_1 \in A(p^1)$ 。一方、 $a_i^k \in A(p^1)$ であるから、 $p_1 \cdot x_i^k + q \cdot c^k \leq p_1 \cdot e_1$ より $\|a_i^k\|$ で両辺をわると、 $p_1 \cdot x_i^k / \|a_i^k\| + q \cdot c^k / \|a_i^k\| \leq p_1 \cdot e_1 / \|a_i^k\|$ 。 $\|a_i^k\| \rightarrow +\infty$ であるから、 $k \rightarrow +\infty$ で、 $p_1 \cdot \bar{x}_1 + q \cdot \bar{c} \leq 0$ 。同時に、すべての $p^1 \in \Pi_i$ に対して、 $p^1 \cdot (\bar{c}_i + c_i^{-1} + e_i) / \|a_i^k\| \geq 0$ であるから、 $p^1 \cdot \bar{c}_i \geq 0$ 。これは、 $\bar{c}_i \neq 0$ かつ $q_i \cdot \bar{c}_i \leq 0$ 、すべての $p^1 \in \Pi_i$ に対して、 $p^1 \cdot \bar{c}_i \geq 0$ を意味する。しかし、 $\bar{q}_i(q_i) \in \Pi_i$ という仮定に矛盾する。

$A(p^1)$ は、有界かつ閉であるからコンパクトである。定理 3. 1 より、 v が連続で凹であるから、問題 3. 2 におけるアルゴリズムの各ステップは、解をもつ。

4. 市場均衡

前節では、価格 p^1 に対する最適行動の集合を決定した。ここでは、各価格 p^1 に対して、各消費者の需要対応を定義し、需要対応の性質を示す。さらに、すべての消費者の超過需要対応を定義し、市場均衡の存在を示す。

現在価格 $p^1 = (p_1, q)$ の予想市場価格の分布 $\prod_{i=2}^I \phi_i(p^1)$ に対する条

件は、仮定 2. 4 であったが、それを対応に定義すると、 $\sigma: \mathcal{A}^{\nu} \rightarrow \mathcal{A}^{(\nu-1)l}$ は、

$$\sigma(p^1) = \text{supp } \prod_{i=2}^{\nu} \phi_i(p^1)$$

である。このとき、 $\prod_{i=2}^{\nu} \phi_i(p^1)$ は、確率測度の弱収束の位相で連続、 σ は上半連続であると仮定すれば、 σ は連続対応である [5, Remark 3. 1].

定理 3. 2 で示した消費者の最適解の存在のための必要十分条件を次のように S で表す。

$$S = \{p^1 \in \mathcal{A}^{\nu} \mid p^1 \gg 0, \bar{q}_t(q_t) \in \text{int co supp } \phi_t(p^1), \\ t=2, \dots, \nu\}.$$

S は、凸であると仮定する。 S は、 $\mathcal{A}^{\nu}$ において開集合である [5, Lemma 3. 8].

3 節で定義した対応 $A(p^1)$ の性質は、次の補題で示される。

補題 4. 1 (i) 対応 $A(p^1)$ は、 $\mathcal{A}^{\nu}$ 上で凸値かつ下半連続であり、閉グラフをもつ。(ii) $A(p^1)$ は、 S 上でコンパクト値かつ上半連続である。

証明 Green [5, Lemma 3. 3] をみよ。

需要対応 $\xi(p^1)$ を次のように定義する。

$$\xi(p^1) = \{(x_1, c) \in A(p^1) \mid v(x_1, c, p^1) \geq v(x'_1, c', p^1) \\ \text{for all } (x'_1, c') \in A(p^1)\}.$$

需要対応 $\xi(p^1)$ の性質は、次の定理で示される。

定理 4. 2 (i) $\xi(p^1)$ は、 S 上で凸かつコンパクト値かつ上半連続である。(ii) すべての $p^1 \in S$ に対して、 $p^1 \cdot \xi(p^1) = p^1 \cdot (c_1^{-1} + e_1)$ 。

証明 Green [5, Theorem 3. 6] をみよ。

以上で、個別需要対応 ξ_i の性質を示したので、市場均衡の存在定理を示すことにする。Green の均衡存在定理 [5, Theorem 4. 11] は、いわゆる Gale-Debreu-Nikaido Lemma から、Debreu [1, Theorem 8] に帰着する線に沿って証明されている。われわれは、Grandmont の [4, Market Equilibrium Lemma 1] に帰着する線に沿って証明する。その相違は、Grandmont の場合、超過需要対応のコンパクト値を必要とする。しかし、定理 4. 2 で個別需要対応 $\xi(p^1)$ のコンパクト値をえているので、Grandmont の市場均衡補題に従うことにする。それでは、以上の目的のために必要な概念を定義しよう。

まず、すべての消費者は、 I 人とする ($i = 1, \dots, I$)。 i 消費者の価格の集合を iS 、個別需要対応を $^i\xi$ とする。個別需要対応がよく定義できる (well-defined) すべての消費者の価格の集合を $P = \bigcap_{i=1}^I ^iS$ とする。総超過需要対応を $\zeta: P \rightarrow R^N$ と表し、

$$\zeta(p^1) = \sum_{i=1}^I ^i\xi(p^1) - (\sum_{i=1}^I ^ie_1, 0)$$

と定義する。

均衡は、すべての i に対して、 $^iz^* \in ^i\xi(p^*)$ かつ $\sum_{i=1}^I ^iz^* = (\sum_{i=1}^I ^ie_1, 0)$ となる $(p^*, ^1z^*, \dots, ^Iz^*) \in A^N \times R^{Nl}$ である。

P は空でないとは仮定される。各 iS は、開かつ凸であるから、 P も開かつ凸である。

各消費者の価格予想は、次の共通予想の条件 (overlapping expectations) をみたさなければ、均衡は存在しない [5, Example 4. 6].

仮定 4. 1 ${}^i\Pi_t = \text{int co supp } {}^i\phi_t(p^1)$, $t = 2, \dots, \nu$ とおくと, $\Pi = \bigcap_{i=1}^I \bigotimes_{t=2}^\nu {}^i\Pi_t$ は空でない.

Green の均衡存在定理 [5, Theorem 4. 11] の必要条件の一つに, ${}^i\xi(p^1)$ の境界条件があるが, Green [5, Lemma 4. 3] において, ${}^i\xi(p^1)$ が, この境界条件をみたすことが示されている. しかし, この境界条件は, Grandmont [4, Proposition 2 (ii)] によって, 次の補題 4. 3 の境界条件にすることができる.

補題 4. 3 $\{p^{1k}\} \subset P$, $p^{1k} \rightarrow p^1$, かつ $p^1 \in \partial P$ とする. 任意の点列 $\{z^k\} \subset {}^i\xi(p^{1k})$ を考える. このとき, すべての $p^1 \in P$ に対して, $p^1 \cdot z^k \rightarrow +\infty$.

証明 $p^{1k} \rightarrow p^1$, かつ $p^1 \in \partial P$, $z^k \in {}^i\xi(p^{1k})$ となる点列 $\{p^{1k}\} \subset P$ と, $p^1 \cdot z^k$ が上に有界な $p^1 \in P$ とがあるとする. このとき, 点列 $\{z^k\}$ は有界である. もし, $\|z^k\| \rightarrow +\infty$ なる部分列があれば, 点列 $\{z^k / \|z^k\|\}$ の収束点 $(\bar{x}_1, \bar{c})$ は, 定理 3. 2 の十分性で示したように, $\bar{c}_i \neq 0$ かつ $\bar{q}_i \cdot \bar{c}_i \leq 0$, すべての $p^1 \in {}^i\Pi_t$ に対して, $p^1 \cdot \bar{c}_i \geq 0$ をみたす. これは, $p^1 \in P$ に矛盾する. したがって, 点列 $\{z^k\}$ は有界であって, $z^k \rightarrow z$ とする. ξ の連続性から, $z \in {}^i\xi(p^1)$. これは, $p^1 \in \partial P$ であるから, ${}^i\xi(p^1)$ が, 定理 3. 2 より空であることと矛盾する.

この経済が均衡するための総超過需要対応 ξ がみたすべき必要条件是, 次のように表される.

多期間先物市場における一時的一般均衡

(1) ξ は, P 上で凸かつコンパクト値かつ上半連続である.

(2) 狭義の Walras 法則

すべての $p^1 \in P$ に対して, $p^1 \cdot \xi(p^1) = p^1 \cdot (c_1^{-1} + e_1)$.

(3) 境界条件

$p^{1k} \rightarrow p^1$, かつ $p^1 \in \partial P$ となる任意の点列 $\{p^{1k}\} \subset P$ と, 任意の点列 $\{z^k\} \subset \xi(p^{1k})$ を考える. このとき, 無限の多くの k に対して $p^1 \cdot z^k > 0$ であるような $p^1 \in P$ がある.

個別需要対応の性質である定理 4.2 と補題 4.3 と仮定 4.1 から, ξ は, 以上の 3 条件をみたす. それゆえ, 次の定理がなりたつ.

定理 4.4 (Grandmont の市場均衡補題) もし, ξ が, P 上で凸かつコンパクト値かつ上半連続であり, 狭義の Walras 法則と境界条件をみたすならば, $0 \in \xi(p^*)$ なる $p^* \in P$ が存在する.

証明 Grandmont [4, Lemma 1] を見よ.

これにより, 次の定理をえる.

定理 4.5 各消費者が, 仮定 2.1 から 2.5 をみたすとき, 市場均衡のための必要十分条件は, $\Pi = \bigcap_{i=1}^I \bigotimes_{t=2}^T \Pi_t$ が空でないことである.

5. む す び に

本稿では, Green モデルを多期間先物市場モデルに拡張した. むすびにかえて, Green 流の多期間先物市場モデルでの問題点をのべることにする. これらの課題は, 次稿にて取り上げることにする.

Green モデルでは、空売りが無制限であっても、市場均衡するためには、先物市場価格の指値が、消費者の将来予想直物価格に対応していること、消費者間の将来予想直物価格の台集合 (support) が共通でなければならないことが必要十分条件である。これらは、定理 3. 2 と定理 4. 5 で明らかである。前者については、Grandmont は、次のように説明している。

“Indeed, when $q_1/|q_1|$ does not belong to Π , the agent believes that unlimited profitable arbitrage is possible, and thus $\zeta(s_1)$ is empty. When $q_1/|q_1|$ belongs to Π , any attempt to make a profit on forward markets involves the possibility of a loss with a positive subjective probability.” [4, p. 891]

Grandmont のいう “arbitrage” は、“speculate” と思われる。それは別として、われわれのモデルでは、先物市場間の「裁定取引」も行えるのであるが、必要十分条件のため、先物市場間取引によって、市場均衡が存在しなくなるおそれはない。しかも、一見、消費者の今期の予算制約式に、先物市場取引の上限が定められているようであるので、期間数が増加すると各期の取引が制限されるだろう。この点、Green は、市場取引の実際について次のようにのべている。

“We shall study a system in which trades in all commodities, both present and future, are possible at the initial date, and all future commodities are again tradeable in the future. However, we do not consider financial assets of the Grandmont type. Borrowing and lending may occur, nevertheless, by trading commodities deliverable in the future against present ones.”

[5, pp. 1103–1104]

また, Green は, 計画期間の賦存量について, 次のようにのべている.

“It is allowable for an individual to sell contracts for a commodity in excess of his endowment, but he must be prepared to purchase enough of this commodity at time 2 to fulfill his obligations.” [5, p. 1105]

以上の引用から, まず, 直物商品と先物商品との間の borrowing and lending については, 狭義の Walras 法則と先物契約の債権と債務の相殺のためおこりそうにない. また, 第2の引用文から先物契約は, 直物取引と独立しているように見える. したがって, 消費者の今期の予算制約式は, 変更する必要があるかもしれない.

最後に, 消費者間の将来予想直物価格の台集合 (support) が共通でなければならないことが, 均衡のための必要十分条件となっている. このことについて, Green は, 条件としてのべる以外何もいっていないが, 価格予想形成の立場からは, 少し問題があるように思われる. Grandmont は, これについて, “there must exist some partial agreement between the agents’ expectations concerning future spot prices” [4, p. 889] といっている. この partial agreement が, どのように形成されるのかは, これまでの一般均衡論のわくでは定式化が困難のように思われる.

参 考 文 献

1. G. Debreu, Existence of competitive equilibrium, in K. J. Arrow and M. D. Intriligator (eds.) “Handbook of Mathematical Economics, vol. II,” North-Holland, Amsterdam, 1982.
2. J. M. Grandmont, Continuity properties of von Neumann–Morgenstern

- utility, *J. Econ. Theory* 4 (1972), pp. 45–57.
3. _____, On the short run equilibrium in a monetary economy, in J. Drèze (ed.) "Allocation under Uncertainty, Equilibrium, and Optimality," Macmillan & Co., London, 1974, pp. 213–228.
 4. _____, Temporary general equilibrium theory, in K. J. Arrow and M. D. Intriligator (eds.) "Handbook of Mathematical Economics, vol. II," North-Holland, Amsterdam, 1982.
 5. J. R. Green, Temporary general equilibrium in sequential trading model with spot and futures transactions, *Econometrica* 41 (1973), pp. 1103–1123.
 6. _____, Preexisting contracts and temporary and general equilibrium, in M. Balch, D. MacFaddent, and S. W. Yu (eds.) "Essays on Economic Behavior under Uncertainty, Contributions to Economic Analysis," North-Holland, Amsterdam, 1974, pp. 263–286.
 7. J. R. Hicks, "Value and Capital," 2nd edn., Clarendon Press, Oxford, 1946.
 8. P. R. Halmos, "Measure Theory," Van Nostrand, Princeton, N. J., 1951.
 9. K. Nishimura, Multivariate von Neumann–Morgenstern Utility and its Additive Representation, *Otemon Economic Studies* 16 (1983), pp. 1–14.
 10. _____, 多計画期間をもつ貨幣経済における一時的一般均衡, 追手門学院大学 20 周年記念論集 経済学部篇, 1987, pp. 157–169.
 11. _____, 先物市場における予想形成について, 追手門経済論集, 第 XXIII 巻第 1 号 (1988), pp. 211–218.
 12. _____, 多期間先物市場における価格予想形成について, 追手門経済論集, 第 XXV 巻第 3 号 (1990), pp. 74–99.

(平成 5 年 2 月 15 日受理)