

ラムゼイ問題

渡部 重明

1. ラムゼイ問題とは最適貯蓄計画の問題である。¹⁾ X は単一財であり、消費財にもなりまた投資財にもなり得る財であると考える。農家の小麦のようなものである。今期分に挽いて、それをパンに焼いて消費することも可能であり、また来期の収穫を目ざして畑にまく種として保存することも可能である。来期用の保存分が貯蓄である。消費を C 、貯蓄を S と表わせば、

$$X(t) = C(t) + S(t) \quad (1)$$

である。したがって、最適貯蓄計画の問題は最適消費計画の問題と同値である。

均衡成長を考えるから、貯蓄＝投資である。したがって、減価償却を無視すると

$$\dot{K}(t) = S(t)$$

である。生産関数

$$X = F(K, L)$$

1) Blanchard and Fischer [2], Burmeister and Dobell [3], Phelps [7].

ラムゼイ問題

は一次同次関数であると仮定する。労働 L の成長率は n (一定) である。すなわち,

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

である。

$$x = \frac{X}{L}, \quad k = \frac{K}{L}, \quad c = \frac{C}{L}, \quad s = \frac{S}{L}$$

とし,

$$x = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k)$$

とする。したがって

$$\dot{k} = f(k) - c - nk$$

である。

社会的効用関数 $u = u(c)$ を想定し、割引率を ρ とする。すると、ラムゼイ問題とは

$$\max \int_0^{\infty} u(c) e^{-\rho t} dt$$

$$s. t. \quad \dot{k} = f(k) - c - nk$$

を求める問題である。以下で、いくつかの角度からこの問題の最適条件を解明する。

2. ラムゼイ [8] では $\rho = 0$ の場合を考察している。したがってこの場合

$$\max \int_0^{\infty} u(c) dt$$

$$s. t. \quad \dot{k} = f(k) - c - nk$$

を求める問題となる。 $c = f(k) - nk - \dot{k}$ であるから、

$$u(c) = G(k, \dot{k})$$

と表わせば、

$$\int_0^{\infty} u(c) dt = \int_0^{\infty} G(k, \dot{k}) dt$$

である。最適解の必要条件はオイラー方程式を満たすことであるから、

$$\frac{\partial G}{\partial k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{k}} \right) = 0$$

である。 k で積分すれば

$$G - \dot{k} \frac{\partial G}{\partial \dot{k}} = B \quad (2)$$

である。右辺の B は $\dot{k} = 0$ のときの G の値、すなわち至福状態と考えられる。

$$G(k, \dot{k}) = u[f(k) - nk - \dot{k}]$$

であるから、

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{k}} = -u'$$

である。したがって (2) は

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{G - B}{\frac{\partial G}{\partial \dot{k}}} \\ &= -\frac{G - B}{u'} \quad [\text{ラムゼイ・ルール(1)}] \end{aligned}$$

ラムゼイ問題

となる。すなわち、現実の効用と至福状態の効用のギャップを限界効用の逆数でウェイト付けした大きさの資本蓄積を行えばよいというルールである。

3. 一般的に $\rho > 0$ の場合について考えよう。

$$U(c) = u(c)e^{-\rho t} \quad (3)$$

とし、

$$G(k, \dot{k}) = U[f(k) - nk - \dot{k}]$$

とすれば、

$$\frac{\partial G}{\partial k} = U'(f' - n)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{k}} = -U'$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{k}} \right) = - \frac{dU'}{dt}$$

である。したがって、オイラー方程式より、

$$U'(f' - n) + \frac{dU'}{dt} = 0$$

完全競争市場を仮定すれば、 $f' = r$ (利子率) であるから

$$\frac{\frac{dU'}{dt}}{U'} = -(r - n) \quad [\text{ラムゼイ・ルール(2)}]$$

すなわち、利子率と人口成長率の差に応じて限界効用が減少するように消費すればよい。

2) Solow [9], ch. 5.

4. 具体的な形を見よう。(3) より

$$U' = u'(c)e^{-\rho t}$$

$$\frac{dU'}{dt} = u''\dot{c}e^{-\rho t} - \rho u' e^{\rho t}$$

であるから,

$$\frac{\frac{dU'}{dt}}{U'} = \frac{u''\dot{c}}{u'} - \rho$$

ラムゼイ・ルール (2) より

$$\frac{u''\dot{c}}{u'} - \rho = -(r-n)$$

$$-\frac{u''\dot{c}}{u'} = r - \rho - n$$

限界効用の弾力性を η とすれば,

$$\eta \frac{\dot{c}}{c} = r - \rho - n \quad [\text{ラムゼイ・ルール(3)}]$$

5. 最大値原理による分析. ハミルトニアンを H とすれば,

$$H = u(c)e^{-\rho t} + P[f(k) - c - nk]$$

$$\dot{k} = f(k) - c - nk$$

である. 最大値原理により, 最適条件は

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u' e^{-\rho t} - P = 0$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -P[f' - n]$$

$$\dot{k} = f(k) - c - nk$$

ラムゼイ問題

である. $q = Pe^{\rho t}$ とし, $f' = r$ とすれば,

最適条件は

$$u' = q$$

$$\dot{q} = -q(r - \rho - n)$$

$$\dot{k} = f(k) - c - nk$$

である.

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{u'' \dot{c}}{u'} = -\eta \frac{\dot{c}}{c}$$

であるから, これはラムゼイ・ルール (3) と同一内容である.

6. 自励系

$$\dot{c} = \frac{1}{\eta} (f' - \rho - n) c$$

$$\dot{k} = f(k) - c - nk$$

の線形近似式は

$$\dot{c} = \frac{c^* f''(k^*)}{\eta^*} (c - c^*)$$

$$\dot{k} = -(c - c^*) + \rho (k - k^*)$$

である. ただし, $*$ は定常解 ($\dot{c} = 0$, $\dot{k} = 0$) を表わす. すなわち,

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c^* f''(k^*)}{\eta^*} \\ 1 & \rho \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c - c^* \\ k - k^* \end{pmatrix}$$

である. 係数行列の固有値は

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\rho \pm \left(\rho^2 - \frac{4c^* f''(k^*)}{\eta^*} \right)^{1/2} \right]$$

である。したがって、2根は実数で一つは正一つは負である。 $(f'' < 0, \eta^* > 0)$ によって、定常解 (c^*, k^*) は鞍点であることがわかる。

7. 異時点間の限界代替率を考える。二点を $t, s (s > t)$ とする。限界代替率を R とすれば、

$$R(s) = - \frac{dc_s}{dc_t} = \frac{U'(c_t)}{U'(c_s)}, \quad R(t) = 1$$

である。 U は効用関数である。そして、次のような極限を時間選好率と呼ぶ。³⁾

$$\begin{aligned} \text{時間選好率} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{R(s) - R(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{R(s) - 1}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$U(c_t) = e^{-\rho t} u(c_t)$$

の場合は次のようになる。 $(s = t + \Delta t, c_s = c_t + \Delta c)$

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{u'(c_t) e^{-\rho t}}{u'(c_s) e^{-\rho s}} = \frac{u'(c_t) e^{\rho \Delta t}}{u'(c_s)} \\ &= \frac{u'(c_t) (1 + \rho \Delta t)}{u'(c_t) + u''(c_t) \Delta c} \\ R(s) - 1 &= \frac{\rho u'(c_t) \Delta t - u''(c_t) \Delta c}{u'(c_t) + u''(c_t) \Delta c} \end{aligned}$$

したがって、

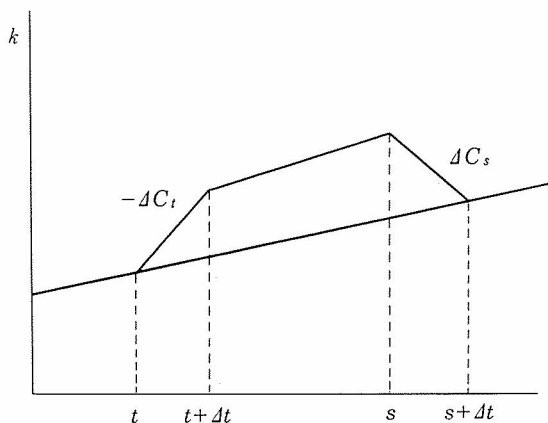
$$\text{時間選好率} = \rho - \left(\frac{u'' c}{u'} \right) \frac{\dot{c}}{c} = \rho + \eta \frac{\dot{c}}{c}$$

3) 宇沢 [12], [15], 今井 [14].

ラムゼイ問題

である。

次に変換率を考える。 t 時点で消費を節約し貯蓄することにより、 s 時点の消費をどれだけ増加させることが出来るかという量である。⁴⁾



瞬時的蓄積率は $(f' - n)$ であるが、変換率を N とすれば、

$$N = 1 + \int_{t+dt}^s [f'(k_v) - n] dv$$

である。したがって、限界変換率は $s \rightarrow t$ により、

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = f'(k_t) - n$$

以上のことより、ラムゼイ・ルール (3) の意味するところは、

$$\text{時間選好率} = \rho + \eta \frac{\dot{c}}{c}$$

$$= f' - n = \text{限界変換率} \quad [\text{ラムゼイ・ルール(4)}]$$

である。すなわち、時間選好率と限界変換率が等しくなるように蓄積するの

4) Blanchard and Fischer [2], Wan [13].

が最適であるということである。また、このことは異時点間の限界代替率と変換率が等しいといっても同じである。

参考文献

- [1] Arrow, K. J. and M. Kurz, Public Investment, The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy. (Johns Hopkins Press, 1970)
- [2] Blanchard, D. J. and S. Fischer, Lectures on Macroeconomics. (MIT Press, 1989)
- [3] Burmeister, E. B. and A. R. Dobell, Mathematical Theory of Economic Growth. (Macmillan, 1970)
佐藤隆三・大住栄治訳, 現代経済成長理論. (勁草書房)
- [4] Cass, D., Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, Review of Economic Studies, 32 (1965), 233-240.
- [5] Chakravarty, S., Capital and Development Planning. (MIT Press, 1969)
- [6] Intriligator, M. D., Mathematical Optimization and Economic Theory. (Prentice-Hall, 1971)
- [7] Phelps, E. S., Golden Rules of Economic Growth. (Norton, 1966)
- [8] Ramsey, F. P., A Mathematical Theory of Saving, Economic Journal, 38 (1928), 543-559. Also in [10] Stiglitz and Uzawa.
- [9] Solow, R. M., Growth Theory. (Oxford University Press, 1970)
福岡正夫訳, 成長理論. (岩波書店)
- [10] Stiglitz, J. E. and H. Uzawa (eds.), Readings in the Modern Theory of Economic Growth. (MIT Press, 1969)
- [11] Tu, P. N. V., Introductory Optimization Dynamics. 2nd Revised and Enlarged ed. (Springer, 1991)
- [12] Uzawa, H., Time Preference and Extension of the Fisher-Hicksian Equation. in "Value and Capital: Fifty Years Later" eds. by L. W. McKenzie and S. Zamagni. (Macmillan, 1991)
- [13] Wan, H. Y., Jr., Optimal Saving Programs under Intertemporally Dependent Preferences, International Economic Review, 11 (1970), 521-547.

ラムゼイ問題

- [14] 今井賢一他, 価格理論Ⅲ. (岩波書店, 1972)
- [15] 宇沢弘文, 経済解析 基礎篇. (岩波書店, 1990)

(平成4年1月30日受理)