

〔研究ノート〕

先物市場における予想形成について

西 村 和 志

I. は じ め に

一時的一般均衡論において、Green [3] は、直物市場と先物市場の取引を同時に行う一般均衡の存在を証明した。Stahl II [6] は、制度的組織を導入することにより均衡存在のための、より破産の生じない十分条件をもとめている。本稿では、多期間モデル [5] によって、先物市場の期間構成を作ることを目としておるとともに、Stahl と同様な方向で、中央銀行の発行する債券と貨幣によって、消費者の破産をより生じないようにすることができるよう定式化してみた。本稿のモデルは、[5] のモデルと Green モデルの素直な拡張である。次稿において、本稿のモデルを基礎に、計画された将来の直物消費計画と、現時点での先物取引との関係を分析したいと考える。

II. 定 義 と 記 号

全ての消費者は、 k 期間の計画期間をもつ。期間 1 は、現在を、期間 2 より期間 k までは、引続く将来を表す。各期間では、消費者にとって利用可能であるが引き続く次の期間までは貯蔵不可能な消費財が、 l 種類あるとする。先物市場は、期間 2 より期間 ν までであるが、 $2 \leq \nu < k$ とする。

次に、消費者は、2 種類の金融資産、すなわち、永久債券 (perpetuities) と貨幣 (fiat money) によって貯蓄できる。貨幣は単なる貯蔵手段であり利子はつかないものとする。永久債券は、各期間ごとに、債券 1 単位につき、

その持参人に貨幣 1 単位を支払うものとする。

消費者以外の経済主体として、永久債券の売り買いによって消費者の貨幣保有高を調整する中央銀行があるとする。われわれの考察する問題は、基本的には $l+(\nu-1)l+2$ 市場における均衡の存在を示すことである。本稿では、多期間の価格予想形成の問題と消費者の最適消費・貯蓄計画の決定問題に焦点を合せる。以下、それらの問題の解明のための諸定義と諸仮定を述べる。各消費者にそれらの諸定義と諸仮定は適用されるが、以下、消費者を区別するサフィクスは省略する。

各消費者は、 k 期間の消費財の賦存量 $e=(e_1, e_2, \dots, e_k) \in R_+^k$ と資産の初期ストック $b_0=(b_{00}, m_0) \in R_+^2$ をもつ。ここで、 $e_i \in R_+^1 (i=1, \dots, k)$ であり、それぞれ確実に予見できるとする。また、 $b_{00} \in R_+, m_0 \in R_+$ はそれぞれ期首ストックの永久債券と貨幣を表す。 m_0 には永久債券 b_{00} の利子支払いが含まれている。計画時の期首に、各消費者は負債をもっていないとする。

仮定 1. $e \gg 0, b_0 \gg 0$ とする。

k 期間の消費流列を、 $x=(x_1, \dots, x_k) \in R_+^k$ 、資産ストックの流列を $b=(b_1, \dots, b_k) \in R_+^k$ とする。先物契約の流列を、 $c=(c_2, \dots, c_\nu) \in R^{(\nu-1)l}$ とする。 $c_{it} > 0$ であれば、消費者は時点 t で商品 i を時点 $t+1$ で受けとることを契約する。 $c_{it} < 0$ であればその逆である。

期間 1 での市場価格ベクトルは、 $p^1=(p_1, q_2, \dots, q_\nu, r_1) \in R^{\nu l+2}/\{0\}$ 、 $r_1=(r_{11}, r_{12})$ であり、 p_1 は消費財の価格ベクトルを表し、 $q_2, \dots, q_\nu$ は先物価格ベクトルである。 p^1 は次のように正規化される。

$$p^1 \in \mathcal{A}^{\nu l+2} = \{p^1 \in R_+^{\nu l+2} \mid \sum_{i=1}^l p_{1i} + \sum_{i=2}^\nu \sum_{j=1}^l q_{ij} + \sum_{i=1}^2 r_{1i} = 1\}.$$

消費者の消費-貯蓄計画は、期間 1 において決定されるが、そのときの消費-貯蓄決定を行動 (action) と呼び、 $a_1=(x_1, c_2, \dots, c_\nu, b_1) \in R_+^l \times$

$R^{(v-1)l} \times R_+^2$ で表す. 期間 2 以降の消費—貯蓄決定を計画 (plans) と呼び, 期間 t の計画を $a_t = (x_t, b_t)$, $(t=2, \dots, k)$ とする. 期間 t での計算価格ベクトルは, $p^t = (p_t, r_t) \in R_+^{l+2}$ と表される. さらに, 各 $p^t (t=2, \dots, k)$ は, それぞれ, $p^t \in D^{l+2} = \{p^t \in R_+^{l+2} \mid \sum_{i=1}^l p_{ti} + \sum_{i=1}^2 r_{ti} = 1\}$ と正規化される.

消費者は, ある制約条件のもとで, 彼の行動 $a_1 = (x_1, c_2, \dots, c_v, b_1)$ を選択し, 彼の残り $k-1$ 期間の計画, $a_t = (x_t, b_t)$, $(t=2, \dots, k)$ を決定しなければならない.

次に, 消費者の意志決定過程を定式化しよう. 消費者は, プライス・テーカーであるから, 期間 1 で価格ベクトル $p^1 \in D^{l+2}$ を所与として, $A_1 = R_+^l \times R^{(v-1)l} \times R_+^2$ の部分集合 $\beta_1(p^1) = \{a_1 \in A_1 \mid p^1 \cdot a_1 \leq p^1 \cdot e_1 + r_1 \cdot b_0\}$ に制約された行動 a_1 を選択しなければならない. しかし, われわれのモデルは, 期間 2 から期間 k まで不確実性下にあるため, 将来直物価格 (spot prices) $p^2, \dots, p^k$ が実現するとき, 消費者は計画期間 $k-1$ にわたって, プライス・テーカーとして行動するから, 期間 t で実現する直物価格 p^t を所与とした計画 $a_t \in A_t = R_+^{l+2}$, $(t=2, \dots, k)$ を立てる. かくして, これらの計画は, 現在価格 p^1 と将来直物価格 $p^2, \dots, p^k$ を所与として, 期間 1 で選択された行動 a_1 と期間 2 以降で計画された各 a_t に依存する, 各 A_t の部分集合に制約される. これらの部分集合は, 次のように表される.

$$\beta_2(a_1, p^2) = \{a_2 \in A_2 \mid p^2 \cdot a_2 \leq \max(0, p_2 \cdot (c_2 + e_2) + r_2 \cdot \tilde{b}_1)\},$$

.....

$$\beta_v(a_1, \dots, a_{v-1}, p^v) = \{a_v \in A_v \mid p^v \cdot a_v \leq \max(0, p_v \cdot (c_v + e_v) + r_v \cdot \tilde{b}_{v-1})\},$$

$$\beta_{v+1}(a_1, \dots, a_v, p^{v+1}) = \{a_{v+1} \in A_{v+1} \mid p^{v+1} \cdot a_{v+1} \leq p_{v+1} \cdot e_{v+1} + r_{v+1} \cdot \tilde{b}_v\},$$

.....

$$\beta_k(a_1, \dots, a_{k-1}, p^k) = \{a_k \in A_k \mid p^k \cdot a_k \leq p_k \cdot e_k + r_k \cdot \tilde{b}_{k-1}\}.$$

ここで, $\tilde{b}_1 = (b_1, m_1 + b_1), \dots, \tilde{b}_{k-1} = (b_{k-1}, m_{k-1} + b_{k-1})$ であり, 各第 2 項は利子支払を加算していることを示す.

さて、消費者は、彼の異時間の消費流列 $(x_1, \dots, x_k)$ の決定に際して、外生的不確実性に直面しているから、消費流列の確率分布を選好する。ここで、消費流列 $(x_1, \dots, x_k)$ の実現可能な成果の集合を $C = R_+^k$ とすると、各期間の消費の実現可能な成果の空間上で定義されるすべての確率分布の集合 $M(R_+^k)$ の直積空間 $\prod_{i=1}^k M(R_+^k)$ 上において、消費者の確率分布への選好が、全順序 $\succeq$ によって表わされる。そこで、次の仮定をおく。

仮定2. 写像 $v: \prod_{i=1}^k M(R_+^k) \longrightarrow R$ が、任意の $\mu \in \prod M(R_+^k)$ に対して、 $v(\mu) = \int_C u \, d\mu$ によって定義される選好 $\succeq$ の表現であるような、連続かつ有界な von Neumann-Morgenstern 効用関数 $u: C \longrightarrow R$ が存在する。任意の効用関数 u は凹かつ単調である。

仮定2. は、写像 v の定義域が直積空間となっているため、西村 [5] によれば、さらに次の形をもつようにすることができる。任意の $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \prod_{i=1}^k M(R_+^k)$ に対して、

$$v(\mu) = \sum_{i=1}^k \int_{R_+^k} u_i \, d\mu_i. \quad (1)$$

消費者は、将来環境のみについて不確実性下に直面しているから、期間1は、 μ_1 が確率1で退化した確率分布をもつと仮定すると次の写像を得る。

$$\text{仮定3. } v(\mu) = u_1 + \sum_{i=2}^k \int_{R_+^k} u_i \, d\mu_i. \quad (2)$$

Ⅲ. 予想形成

消費者は、期間1の行動の選択においてプライス・テーカーであるとともに、各期間の計画の決定においてもプライス・テーカーの行動をとる。しかし、本モデルでは、期間1において、消費者は先物市場の行動の選択

をしなければならない。従来の議論[3, 4, 6]では、期間1での直物市場では、価格形成において、期間2での価格予想への制約が課せられているほか、先物市場では、追加的制約が課せられていた。われわれの一般化した多期間モデルでは、[6]のモデルの条件に言及する必要がある。そこで、すでに[5]で述べていた Grandmont の外生的予想関数を、われわれのモデルに沿って再考することにする。

Grandmont の予想関数は、2期間モデルにおいて、非確率変数である現在価格を所与とした期間2の価格の確率分布を対応させる。[5]のモデルでは、期間2と期間3の将来価格の確率分布は互いに独立であると仮定した。そこで、現在価格 p^1 を所与としたとき、期間2から期間 k までの将来価格の確率分布は互いに独立であると仮定する。各期間の確率分布全体の空間を、次元が同じため $M(D^{(k-1)(l+2)})$ とする。このとき、消費者の予想価格の組は次のように定義される。

$$\phi = \prod_{i=2}^k \phi_i(p^1) : D^{v_l+2} \longrightarrow M(D^{(k-1)(l+2)}),$$

ここで、 $\phi_i(p^1)$ は互いに独立である。

次に、予想関数 ϕ についての仮定を述べる。

- 仮定4. (1) 予想関数 ϕ は連続である。
- (2) すべての $p^1 \in D^{v_l+2}$ に対して、貨幣価格 $r_{i2}(t=2, \dots, k)$ が正となる、 $p^t(t=2, \dots, k)$ のそれぞれの集合に正の確率をつける。
- (3) $\text{int co supp } \phi_t(p^1) \neq \emptyset, (t=2, \dots, v).$

(3)は、 ϕ_t の台集合 (support) の凸閉包 (convex hull) の内部 (interior) が空集合でないことを仮定する。Green のモデルを多期間化すれば、この仮定は、期間2から期間 v までの先物市場に対応する期間の予想価格に対

する規定となる。

最後に、第Ⅱ節で述べた各期間の消費の実現可能な成果の空間上で定義された確率分布の直積空間 $\prod_{t=1}^k M(R_t^+)$ と本節の各期間の確率分布全体の空間 $M(\mathcal{A}^{(k-1)(l+2)})$ との間で、分布同士の対応関係を定義しなければならない。

消費者は、次の連続な線型写像 γ をもつとする。

$$\gamma : a_1(\mathcal{A}^{l+2}) \times \prod_{t=2}^k a_t(\mathcal{A}^{l+2}) \longrightarrow C.$$

ここで、各 $a_t(\mathcal{A}^{l+2})$ は、各期間の価格に依存する可測関数 $a_t : \mathcal{A}^{l+2} \longrightarrow A_t$ の値域を表す。すなわち、 $a_1(\mathcal{A}^{l+2}) \subset A_1$, $a_t(\mathcal{A}^{l+2}) \subset A_t (t=2, \dots, k)$ 。 γ は線型を仮定しているので、価格ベクトル p^1 を所与とすると、選択 $(a_1(p^1), \dots, a_k(p^k))$ が、各期間の価格ベクトル、 $p^2, \dots, p^k$ の実現によってなされるならば、消費流列の成果 $(x_1, \dots, x_k)$ が得られることを意味する。

この可測写像 γ を用いて、 C 上に確率分布を次のように誘導する。すべての事象 $S = \prod_{t=1}^k S_t \in B(R_t^+)$ に対して、 $\gamma^{-1}(S) = \prod_{t=1}^k \gamma_t^{-1}(S_t) \in B(\mathcal{A}^{(k-1)(l+2)})$ となるから、任意の p^1 に対して、予想価格確率分布の直積分布 $\prod_{t=2}^k \phi_t(p^1, \gamma_t^{-1}(S_t))$ が得られる。この誘導された確率分布を $\mu_{a_1(p^1), \dots, a_k(p^k)}$ とすれば、

$$\mu_{a_1(p^1), \dots, a_k(p^k)}(S) = \prod_{t=2}^k \phi_t(p^1, \gamma_t^{-1}(S_t))$$

と定義される。仮定3より、 $\mu_{a_1, \dots, a_k}$ の期待効用は、

$$u_1 + \sum_{t=2}^k \int_{R_t^+} u_t d\mu_{a_1, \dots, a_k} = u_1 + \sum_{t=2}^k \int_{\mathcal{A}^{l+2}} u_t d\phi_t \quad (3)$$

と表される。ここで、 $u_t = u_t(\gamma(a_1(p^1), a_2^0, \dots, a_{t-1}^0, a_t(p^t), a_{t+1}^0, \dots, a_k^0))$ であり、 $a_2^0, \dots, a_{t-1}^0, a_{t+1}^0, \dots, a_k^0$ は市場で価格が決定されるまで固

定される。

IV. 消費者の意志決定

消費者は、予算制約の集合 $\beta_1(p^1), \dots, \beta_k(a_1, \dots, a_{k-1}, p^k)$ のもとで、期間 1 の行動 a_1 の選択と計画 $a_2, \dots, a_k$ を決定する。われわれのモデルは、先物市場の取引を含んでいるもので、期間 1 における制約条件は、次のように、破産しないように修正される。

$$\beta_1(p^1) = \{a_1 \in A_1 \mid p^1 \cdot a_1 \leq p^1 \cdot e_1 + r_1 \cdot b_0,$$

$$p^t \cdot (c_t + e_t) + r_t \cdot \bar{b}_{t-1} \geq 0, \text{ for all } p^t \in \text{supp } \phi_t(p^1) (t=2, \dots, \nu)\}.$$

そこで、問題は、仮定 1, 2, 3, 4 のもとで次の通りである。

$$\max_{\{a_1, \dots, a_k\}} u_1 + \sum_{t=2}^k \int_{A^{t+2}} u_t d\phi_t \quad (4)$$

subject to $\beta_1(p^1), \dots, \beta_k(a_1, \dots, a_{k-1}, p^k)$.

問題(4)は後向きダイナミック・プログラミングによって次のように解かれる。

期間 k において、消費者は行動 a_1 と計画 $a_2, \dots, a_{k-1}$ をとり、期間 k の価格ベクトル $p^k \in A^{k+2}$ に直面する。それゆえ、問題(4)は次のようになる。

$$\max_{\{a_k\}} u_1 + \sum_{t=2}^{k-1} \int_{A^{t+2}} u_t d\phi_t + u_k \quad (5)$$

subject to $\beta_k(a_1, \dots, a_{k-1}, p^k)$.

仮定 1, 2, 3, 4 のもとでは、問題(5)の解が存在し、その解 $a_k^*(p^k)$ を最適計画と呼ぶ。効用関数 u_k に a_k^* を代入して、 $u_k^*(a_1, p^1, p^k) = u_k(\gamma(p^1, a_1, \dots, a_k^*))$ を得る。次に、期間 $k-1$ では、

$$\max_{\{a_{k-1}\}} u_1 + \sum_{i=2}^{k-2} \int_{\mathcal{A}} u_i d\psi_i + u_{k-1} \quad (6)$$

subject to $\beta_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-2}, p^{k-1})$, という問題を解き, その解を $a_{k-1}^*(p^{k-1})$ とする. 期間 $k-3$ についても, 同様な手順で, 最適計画 $a_{k-3}^*, \dots, a_2^*$ を順次求めて, 期間 1 での問題を次のように得る.

$$\max_{\{a_1\}} u_1 + \sum_{i=2}^k \int_{\mathcal{A}} u_i^*(a_1, p^1, \cdot) d\psi_i(p^1)$$

subject to $\beta_1(p^1)$.

以上のように, 先物市場を導入した一時的一般均衡モデルにおける主体的均衡を求める解法を示すことができた.

参 考 文 献

1. J. M. Grandmont, On the short run equilibrium in a monetary economy, in J. Dréze (ed.) "Allocation under Uncertainty, Equilibrium and Optimality," Macmillan & Co., London, 1974, pp. 213-228.
2. ———, Temporary general equilibrium theory, in K. J. Arrow and M. D. Intriligator (eds.) "Handbook of Mathematical Economics, vol. II," North-Holland, Amsterdam, 1982.
3. J. R. Green, Temporary general equilibrium in a sequential trading model with spot and futures transactions, *Econometrica* 41 (1973), pp. 1103-1123.
4. P. J. Hammond, Overlapping expectations and Hart's conditions for equilibrium in a securities model, *J. Econ. Theory* 31 (1983), pp. 170-175.
5. 西村和志, 多計画期間をもつ貨幣経済における一時的一般均衡, 追手門学院大学20周年記念論集 経済学部篇, 昭和62年3月15日, pp. 157-169.
6. D. O. Stahl, II, Bankruptcies in temporary equilibrium forward markets with and without institutional restrictions, *Rev. Econ. Stud.* 52 (1985), 459-471.

(昭和63年7月13日受理)