

〔研究ノート〕

ホモセティック効用関数について

渡 部 重 明

本稿の目的はホモセティック効用関数の特性を吟味し、その諸側面を展望することである。財は2財 x, y とし、財ベクトルを $z=(x, y)$ とする。それらの価格を q, w とし、価格ベクトルを $p=(q, w)$ とする。効用関数を $u=f(x, y)$ とする。定義域は凸錐をなし、各関数の正則性は保証されているものとする。

(I) 定義. f がホモセティックであるとは、

$$f=h(g(x, y))$$

と表わされることである。ただし、 h は単調増加関数であり、 g は1次同次関数である。

次の命題を考える。 K は凸錐とする。

(II) $z_1, z_2 \in K, t > 0,$

$$f(z_1)=f(z_2) \Rightarrow f(tz_1)=f(tz_2)$$

同一効用を与える2つの財ベクトルの財の構成比を不変にしながら、一定比率の拡大あるいは縮小したとき、すなわち、原点を通る各半直線上で対応する効用はそれぞれ等しくなる。

ホモセティック効用関数の直観的なインプリケーションは次の定理にみられる。

定理1. (I)と(II)は同値である。

〔証明〕 (I) $\Rightarrow$ (II). $z_1=(x_1, y_1), z_2=(x_2, y_2)$ とする。 $f(z_1)=f(z_2)=$

u_0 とすると, $u_0 = h(g(z_1)) = h(g(z_2))$ であるから, $g(z_1) = g(z_2) = h^{-1}(u_0)$ である. g は 1 次同次関数であるから,

$$\begin{aligned} f(tz_1) &= h(g(tz_1)) = \\ &= h(tg(z_1)) = h(tg(z_2)) \\ &= h(g(tz_2)) = f(tz_2) \end{aligned}$$

(II) $\Rightarrow$ (I). (Sydsæter [10], Whitaker・McCallum [11])

(1) $f(tz_0) = f(z)$ のとき, $g(z) = t$

として $g(z)$ を定義する. $s > 0$ とすると, $f(tz_0) = f(z)$ と (II) より, $f(stz_0) = f(sz)$ である. すると (1) により, $g(sz) = st = sg(z)$ である. すなわち, g は 1 次同次関数である. 次に, $v > 0$ とし, $h(v) = f(vz_0)$ と定義しよう. すると, h は単調増加関数であり,

$$\begin{aligned} h(g(z)) &= f(g(z)z_0) = \\ &= f(tz_0) = f(z) \end{aligned}$$

である. よって, (I) がなりたつ.

注. $f = h(g)$ であれば, $h^{-1}(f) = g$ であるから, (I) は次のように表現してもよい. すなわち, ホモセティック効用関数とは, 適当な単調変換により 1 次同次関数になることである.

次の命題を考える.

(III) $u = f(x, y)$, $r = x/y$ とするとき,

$$y := \frac{m(u)}{n(r)}$$

と表わされる. ただし, $m(u)$ は u のみの関数で, 単調増加関数である. また, $n(r)$ は r のみの関数である. したがって n は 0 次同次関数である.

支出関数 e は,

$$e(p, \bar{u}) = \min \{p \cdot z \mid u(z) \geq \bar{u}\}$$

と定義される関数である。

$$(IV) \quad e = m(u)\phi(p)$$

と表わされる。ただし、 ϕ は p のみの関数である。すなわち、支出関数は乗法的分離可能関数である。

定理 2. (I), (III), (IV) は同値である。(Sandler・Swimmer [5])

[証明] (I) $\Rightarrow$ (III).

$$u = h(g(x, y)) = h(yg(r, 1))$$

したがって、

$$y = \frac{h^{-1}(u)}{g(r, 1)} = \frac{m(u)}{n(r)}$$

である。ただし、 $m = h^{-1}$, $n(r) = g(r, 1)$ である。

(III) $\Rightarrow$ (IV).

$$\begin{aligned} e &= \min_{(x, y)} \{qx + wy \mid u \geq \bar{u}\} \\ &= \min_{(r, y)} \{y(qr + w) \mid u \geq \bar{u}\} \\ &= m(u) \min_r \left\{ \frac{qr + w}{n(r)} \mid u \geq \bar{u} \right\} \\ &= m(u)\phi(p) \end{aligned}$$

ただし、 $\phi(p)$ は p のみの関数である。

(IV) $\Rightarrow$ (I).

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \max_{(x, y)} \{u \mid m(u)\phi(p) \leq qx + wy\} \\ &= \max \left\{ u \mid m(u) \leq \frac{qx + wy}{\phi(p)} \right\} \end{aligned}$$

そこで, $m(u)=v$ とし, よく知られた双対関係を利用すると,

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \max \left\{ m^{-1}(v) \mid v \leq \frac{qx+wy}{\phi(p)} \right\} \\ &= m^{-1} \left(\min_p \left\{ \frac{gx+wy}{\phi(p)} \mid v \leq \frac{qx+wy}{\phi(p)} \right\} \right)\end{aligned}$$

したがって,

$$g(x, y) = \min_p \left\{ \frac{qx+wy}{\phi(p)} \mid v \leq \frac{qx+wy}{\phi(p)} \right\}$$

とすれば,

$$u = m^{-1}g(x, y) = h(g(x, y))$$

となる. ただし, $h=m^{-1}$ である. そして, 明らかに g は 1 次同次関数である.

注. (I) と (IV) の同値性は, Shephard [6] により, ホモセティック関数の基本的性質として指摘されたものである.

スルツキー方程式に関して次の補助定理がなりたつ.

補助定理. (i), (ii), (iii) は同値である.

(V) (i) 所得弾力性は一定である.

(ii) 所得弾力性は 1 である.

(iii) 交差効果は対称である.

[証明] (i) $\Rightarrow$ (ii). p を一定とし予算式 $qx+wy=M$ の両辺を M で微分すると,

$$q \frac{\partial x}{\partial M} + w \frac{\partial y}{\partial M} = 1$$

したがって,

$$(2) \quad \frac{qx}{M} \cdot \frac{M}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial M} + \frac{wy}{M} \cdot \frac{M}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial M} = 1$$

$$\therefore k_x \varepsilon_{xM} + k_y \varepsilon_{yM} = 1$$

ただし, k はシェアであり, $k_x + k_y = 1$ である. 故に, $\varepsilon_{xM} = \varepsilon_{yM} = \varepsilon$ ならば, $\varepsilon = 1$ である.

(ii) $\Rightarrow$ (i) は自明である.

(i) $\Rightarrow$ (iii). 交差効果は,

$$\frac{\partial x}{\partial w} = s_{xw} - y \frac{\partial x}{\partial M}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = s_{yq} - x \frac{\partial y}{\partial M}$$

である. 正則な需要関数に対して, $s_{xw} = s_{yq}$ である. よって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial y}{\partial q} &\Leftrightarrow y \frac{\partial x}{\partial M} = x \frac{\partial y}{\partial M} \\ &\Leftrightarrow \frac{M}{x} \frac{\partial x}{\partial M} = \frac{M}{y} \frac{\partial y}{\partial M} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_{xM} = \varepsilon_{yM} \end{aligned}$$

次の命題を考える.

(VI) 限界代替率は 0 次同次関数である.

定理 3. (I) と (VI) は同値である.

証明に関しては, Førsund [1], Lau [3], Sandler・Swimmer [5] 参照.

(VI) は限界代替率が $r = x/y$ のみに依存することを意味する. すなわち, 原点を通る半直線で限界代替率が一定であることを意味する. したがって, (V) と (VI) が同値な命題であることは明らかであろう.

規模の弾力性とは, $u = f(z)$ に対して

$$(3) \quad \eta(z) = \left. \frac{\partial \log f(tz)}{\partial \log t} \right|_{t=1}$$

$$= \frac{f_1x + f_2y}{u}$$

と定義される.

次の命題を考える.

(Ⅶ) η は u のみの関数である.

定理 4. (Ⅰ) と (Ⅶ) は同値である.

証明に関しては, Førsund [1], Sandler・Swimmer [5] 参照.

(3) は,

$$(4) \quad f_1x + f_2y = \eta u$$

なる関係式を表わしている. もし, η が定数ならば (4) は同次関数に関するオイラー方程式である. すなわち, (4) はオイラー方程式を一般化した関係式を表わす方程式である. したがって, 定理 4 は, (4) の一般的な解がホモセティック関数であることを意味する.

以上により, (Ⅰ) — (Ⅶ) はすべて同値な命題であることがわかる.

そして各命題はホモセティック関数の特徴的な側面を表現している.

参 考 文 献

- [1] Førsund, F. R., The Homothetic Production Function, Swed. J. of Economics, 1975, 234-244.
- [2] Hanoch, G., The Elasticity of Scale and the Shape of Average Costs, American Economic Review, 65, 1975, 492-497.
- [3] Lau, L. J., Duality and the Structure of Utility Functions, Journal of Economic Theory, 1, 1970, 374-396.
- [4] Pol, J. E. F., A Note on the Generalized Production Functions, R. E. S., 40, 1973, 139-140.
- [5] Sandler, T. and A. Swimmer, The Properties and Generation of Homothetic Production Functions: A Synthesis, Journal of Economic Theory, 18, 1978, 349-361.
- [6] Shephard, R. W., Cost and Production Functions, Princeton University Press, 1953. Reprinted as "Lecture Notes in Economics and Mathematical System 194", Springer, 1981.

- [7] Shephard, R.W., Theory of Cost and Production Functions, Princeton University Press, 1970.
- [8] Silberberg, E., The Structure of Economics, McGraw-Hill, 1978.
- [9] Simmons, P.J., Choice and Demand, Macmillan, 1974.
- [10] Sydsæter, K., Topics in Mathematical Analysis for Economists, Academic Press, 1981.
- [11] Whitaker, J.K. and B.T. McCallum, On Homotheticity of Production Functions, Western Journal of Economics, 9, 1971, 57-63.