

不確実性下における時間選好論

西 村 和 志

I. は じ め に

不確実性下における個人の意志決定論は、von Neumann-Morgenstern 効用理論を契機として様々な分野で発展してきた。しかし、それらの理論に次元性をもたせた多変数 von Neumann-Morgenstern 効用理論は、その理論的基礎が明確に形成されることなく推移してきたように思われる。筆者は、その一つの試みとして [3] において 2 変数 von Neumann-Morgenstern 効用関数が存在するための必要十分条件を求めた。そして、その後の研究の結果、ほぼ Grandmont の必要十分条件によって存在が証明されることがわかった。その詳細な結果は、Journal of Economic Theory に投稿中であるが、今回は、それらの結果と研究の際整理できた正の一次変換に対して一意的であるという von Neumann-Morgenstern 効用関数の性質を利用して、先に発表した不確実性下における時間選好論 [3] を書き直すことを本稿の目的としたい。

II. 定 義 と 記 号

本稿で用いられる定義はすべて [3] で述べた “II. DEFINITIONS AND NOTATIONS” と “IV. MATHEMATICAL APPENDIX” に従っている。

Ⅲ. 多変数 von Neumann-Morgenstern

効用とその加法的分解

不確実性下における時間選好理論を述べる前に、本節では、必要な基礎定理を紹介する。それらの証明は、本稿とは別の機会に発表する予定であるが、ほぼ Grandmont の必要十分条件によって証明されることがわかっている。ただし、正の一次変換に対して一意的であることの証明は、本稿で述べることとする。

以下の定理に対して、必要十分条件を条件の形で表わす。まず、連続な Bernoulli 指標の存在を示す。

条件 1. 任意の $p^0 \in P$ に対して、集合 $\{p \in P | p \stackrel{i}{\succeq} p^0\}$ と $\{p \in P | p^0 \stackrel{i}{\succeq} p\}$ は、 P で閉じている。

定理 1. $\{Y_i\}_{i=1, \dots, n}$ を可分距離空間の族とする。 $\stackrel{i}{\succeq}$ を直積空間 $\prod_{i=1}^n M(Y_i)$ の部分空間 P 上で定義された完全半順序とする。条件 1 は、 $\stackrel{i}{\succeq}$ について順序保存的な、 P 上で定義された実数値連続関数 h の存在のための必要十分条件である。

次に、 $\prod_{i=1}^n M(Y_i)$ の凸部分空間 P 上で定義された、連続かつ線型な Bernoulli 指標を得る。

条件 2. 任意の $p^1, p^2, p^3 \in P$ および任意の実数 $t \in [0, 1]$ に対して、 $p^1 \stackrel{i}{\sim} p^2$ ならば、 $tp^1 + (1-t)p^3 \stackrel{i}{\sim} tp^2 + (1-t)p^3$ である。

定理 2. $\{Y_i\}_{i=1, \dots, n}$ を可分距離空間の族とする。 $\stackrel{i}{\succeq}$ を、直積 $\prod_{i=1}^n M(Y_i)$ の凸部分空間 P 上で定義された完全半順序とする。このとき条件 1 と 2 は、 $\stackrel{i}{\succeq}$ について順序保存的かつ線型な、 P 上で定義された実数値連続関数 h の存在のための必要十分条件である。

最後に、 $\prod_{i=1}^n M(Y_i)$ の σ -凸部分空間 P 上で定義された Bernoulli 指標を、直積空間 $\prod_{i=1}^n Y_i$ 上で定義された von Neumann-Morgenstern 効用の期待値として得る。

条件 3. 任意の $y, y' \in \prod_{i=1}^n Y_i$ に対して、 $y \succeq y'$ は、 $p_y \succeq p_{y'}$ と同値である。ただし、 $p_y, p_{y'}$ は D に属する。

定理 3. $\{Y_i\}_{i=1, \dots, n}$ を可分距離空間の族とする。 $\succeq$ を、直積距離空間 $\prod_{i=1}^n Y_i$ 上で定義された完全半順序とし、 $\succeq$ を、 $D \subset P$ をみたす $\prod_{i=1}^n M(Y_i)$ の σ -凸部分空間 P 上で定義された完全半順序とする。そのとき、条件 1, 2 および 3 は、任意の $p = (p_1, \dots, p_n) \in P$ に対して、

$$h(p) = \int_{\prod Y_i} u d(\prod_{i=1}^n p_i)$$

によって P 上で定義された関数 h が $\succeq$ について順序保存的かつ線型であるような、 $\prod Y_i$ 上で定義され $\succeq$ について順序保存的実数値連続有界関数 u の存在のための必要十分条件である。ただし、 $\prod p_i$ は $\bigotimes_{i=1}^n B(Y_i)$ 上の直積確率測度である。

このようにして得られた Bernoulli 指標と von Neumann-Morgenstern 効用は、正の一次変換に対して一意的であることが、Herstein-Milnor の証明方法を用いることによって示される。

系 1. 定理の仮定のもとで、任意の Bernoulli 指標 h は、正の一次変換に対して一意的である。すなわち、他の Bernoulli 指標 h' が、定理 2 の仮定を満すならば、任意の $p \in P$ に対して、 $h'(p) = \alpha h(p) + \beta$ となる実数 $\alpha > 0$ と β が存在する。

証明. h' を他の任意の Bernoulli 指標とし、定理 2 の仮定を満すものとする。すべての $p^1, p^2 \in P$ に対して、 $p^1 \sim p^2$ ならば、すべての $p \in P$

に対して $h'(p) = \beta$ および $h(p) = 0$ とおけば、系 1 は成立する。したがって、これより $a \succ^i b$ であるような 2 つの元 $a, b \in P$ が存在すると仮定する。 $P_{ab} = \{p \in P | a \succ^i p \succ^i b\}$ とする。さらに、 $r^1 \succ r^2$ であるような $r^1, r^2 \in P_{ab}$ をとり固定する。〔2, 定理 6〕に従って、任意の $p \in P_{ab}$ に対して、 $p \sim h_{ab}(p)a + (1 - h_{ab}(p))b$ であるような一意的元 $h_{ab}(p) \in [0, 1]$ が存在する。そして Bernoulli 指標 $h(p)$ は、 $h(p) = (h_{ab}(p) - h_{ab}(r^2)) / (h_{ab}(r^1) - h_{ab}(r^2))$ として定義される。この Bernoulli 指標は、 a, b の選択にも依存しないし、 P_{ab} 上よりさらに P 上で定義される〔2, 定理 7, 8〕。この定義に従えば、 $h(r^1) = 1, h(r^2) = 0$ である。

ところが、 $h'(r^1) = 1, h'(r^2) = 0$ であるならば、〔2, 定理 7〕により、 h と h' は同値となる。それゆえ、 h' は、 $r^{1*} \succ^i r^{2*}$ であるような r^1, r^2 と異なった元 $r^{1*}, r^{2*} \in P_{ab}$ によって定義されていると考える。したがって、その定義式をもとに h との関係式を次のように求める。

$$\begin{aligned} h'(p) &= \frac{h_{ab}(p) - h_{ab}(r^{2*})}{h_{ab}(r^{1*}) - h_{ab}(r^{2*})} \\ &= \frac{h_{ab}(r^1) - h_{ab}(r^2)}{h_{ab}(r^{1*}) - h_{ab}(r^{2*})} \left\{ \frac{h_{ab}(p) - h_{ab}(r^2)}{h_{ab}(r^1) - h_{ab}(r^2)} - \frac{h_{ab}(r^{2*}) - h_{ab}(r^2)}{h_{ab}(r^1) - h_{ab}(r^2)} \right\} \\ &= \alpha(h(p) - h(r^{2*})) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{h_{ab}(r^1) - h_{ab}(r^2)}{h_{ab}(r^{1*}) - h_{ab}(r^{2*})} = \frac{h_{ab}(r^1) - h_{ab}(r^2)}{h_{ab}(r^{1*}) - h_{ab}(r^2) - (h_{ab}(r^{2*}) - h_{ab}(r^2))} \\ &= \frac{1}{h(r^{1*}) - h(r^{2*})} \end{aligned}$$

r^1, r^2, r^{1*}, r^{2*} は固定されており、 $r^{1*} \succ^i r^{2*}$ であるから $h(r^{1*}) > h(r^{2*})$ 。したがって $\alpha > 0$ 。(証明終)

最後に、Bernoulli 指標と von Neumann-Morgenstern 効用の加法的分解を、定理 2, 定理 3 の延長として証明なしに与える。証明は他の機会に発表する予定である。

まず, Bernoulli 指標の加法的分解が次のように得られる.

定理 4. $\{Y_i\} i=1, \dots, n$ を可分距離空間の族とする. $\succeq$ を $\prod_{i=1}^n Y_i$ の凸部分空間 P 上で定義された完全半順序とする. 条件 1, 2 のもとで, P 上で定義された線型連続 Bernoulli 指標 h は次のように表わされる. 任意の $p=(p_1, \dots, p_n) \in P$ に対して,

$$h(p) = \sum_{i=1}^n h_i(p_i) \quad (1)$$

ここで, 各 $h_i(p_i)$ は線型連続であり, $\succeq_i$ について順序保存的である.

次節でこの加法的分解の応用のために, 各 h_i 関数がどのように定義されたかを示しておこう. 系 1 で固定した元 r^2 を要素表示で示せば, $r^2=(r_1^2, \dots, r_n^2)$ であり, そのとき各 h_i は次のように定義される.

$$h_i(p_i) = h(r_1^2, \dots, r_{i-1}^2, p_i, r_{i+1}^2, \dots, r_n^2) \quad (2)$$

次に von Neumann-Morgenstern 効用の加法的分解を次のように得た.

定理 5. $\{Y_i\} i=1, \dots, n$ を可分距離空間の族とする. $\succeq$ を直積距離空間 $\prod_{i=1}^n Y_i$ 上で定義された完全半順序とする. そのとき定理 4 および条件 3 の仮定のもとで, 定理 3 の要請を満たす $\prod Y_i$ 上で定義された, 実数値連続有界関数 u は次のように加法的に分解される.

任意の $y=(y_1, \dots, y_n) \in \prod Y_i$ に対して,

$$u(y) = \sum_{i=1}^n u_i(y_i) \quad (3)$$

ここで, 各 u_i は実数値, 連続, 有界かつ $\succeq_i$ について順序保存的である.

またこの分解は, 次のような正一次線型変換に対して一意的である.

$$u'_i(y_i) = \alpha u_i(y_i) + \beta_i \quad (4)$$

ただし, $\alpha > 0$ および $i=1, \dots, n$.

定理 5 において, Bernoulli 指標と von Neumann-Morgenstern 効用との関係が具体的に示されていないので以下でそれらを示しておこう. ま

す(2)式において、固定元 y^0 を1点 y^0 で退化する測度で構成される元 $p_{y^0} \in D$ に置き換える。そのとき(2)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} h_i(p_i) &= \int_{\Pi Y_i} u d\left(\prod_{j=1}^{i-1} p_j(y_j^0) \times p_i \times \prod_{j=i+1}^n p_j(y_j^0)\right) \\ &= \int_{Y_i} u(y_1^0, \dots, y_{i-1}^0, y_i, y_{i+1}^0, \dots, y_n^0) dp_i \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式によって、各 u_i を次のように定義した。

$$u_i(y_i) = u(y_1^0, \dots, y_{i-1}^0, y_i, y_{i+1}^0, \dots, y_n^0) \quad (6)$$

したがって、Bernoulli 指標 $h(p)$ は、von Neumann-Morgenstern 効用を用いると次のように表わされる。任意の $p \in P$ に対して、

$$h(p) = \sum_{i=1}^n \int_{Y_i} u_i(y_i) dp_i \quad (7)$$

IV. 不確実性下における時間選好

本節において述べる内容は、直接的に経済理論へ不確実性下の時間選好論を適用するのではなくて、上述してきた効用理論が、Koopmans 達によって定式化された確実性下の時間選好論と比較して、どのような相違点があるかを示すことにある。まず第一に、Koopmans の理論では、各期の効用が割引要素によって割引かれているが、我々の場合では、その割引要素が固定元をいかにとるかによって決定されるであろうことを示す。第二に、不確実性下では、各期における確率分布がどのようにあらかじめ決定されるかによって、もし不確実性下の経済理論への応用を考えるならば、静態均衡論的にも動態均衡論的にも時間選好論が適用できるように思われる。

最初に、ある個人が直面する不確実性下におけるゲームの内容を規定する。プレーヤーは、有限かつ離散的時間 $t=1, \dots, T$ を考える。各期で行われるゲームはすべて同じだとし、ゲームが終了した後に得られる確実な成果の集合を、各期で同じ可分距離空間 Y とする。そのとき、プレー

ヤーは直積可分距離空間 Y^T 上に完全半順序 $\succeq$ をもつ. 同時に, 各期での“くじ”の集合は, 弱収束の位相をもつ同じ距離空間 $M(Y)$ によって示される. そしてプレーヤーは, 直積距離空間 $M^T(Y)$ の部分集合 P 上に完全半順序 $\succeq$ をもつ.

次に, 定理 4, 5 の諸仮定がすべて上述のゲームでは満されるものとする. そのとき, 定理 4, 5 に従って, Bernoulli 指標 $h = \sum_{i=1}^T h_i$ と von Neumann-Morgenstern 効用 $u = \sum_{i=1}^T u_i$ を得る. 我々の次の目的は, このようにして得られた von Neumann-Morgenstern 効用を第 1 期目の効用関数 u_1 によって全効用 u を表わすことである.

各期の効用関数 u_i は, 第 III 節の(6)式によって次のように表わされる.

$$u_i(y_i) = u(y_i^0, \dots, y_{i-1}^0, y_i, y_{i+1}^0, \dots, y_T^0) \quad (8)$$

この関数は, 第 i 要素を除いてすべて定数となっている. しかも, 定理 5 によって u 関数は有界連続であるから, 有界連続な一変数関数によって近似される. したがって, (8)式を次のように定義する.

$$u_i(y_i) = u_{i0}(y_i) \quad (9)$$

添字 ($i0$) は固定元 y^0 に依存した一変数関数であることを示す.

一元, u 関数は, 定理 5 及び系 1 によって正の一次変換によって一意的であった. その性質は, (9)式のように一変数関数で u_i を表わしても変わらない. そこで, 我々はこの性質を用いて u_i を u_1 で表わす方法を以下で考察することにする.

まず, 系 1 と定理 5 から, 各 u_i は次のような一次変換が可能であった.

$$u'_i(y_i) = \alpha(u_i(y_i) - u_i(y_i^{2*})) \quad (10)$$

ここで系 1 で述べた固定元を定理 5 のように $p_{y1*}, p_{y2*} \in D$ とすれば,

$$\alpha = \frac{1}{u(y^{1*}) - u(y^{2*})} \quad (11)$$

$$u_i(y_i^{2*}) = u(y_i^0, \dots, y_{i-1}^0, y_i^{2*}, y_{i+1}^0, \dots, y_T^0) \quad (12)$$

今, 各 u_i 関数は(9)式で定義されているから, (10)式を用いると u_1 と u_2 は

定義域が Y で同じであるから固定元を変更することによって次のような一次変換の関係式で表わされるであろう。

$$u_{20}(y_2) = \alpha_1(u_{10}(y_2) - u_{10}(y_2^{11})) \quad (13)$$

ただし, $\alpha_1 = 1/(u(y^{11}) - u(y^{21}))$, y_2^{21} は y^{21} の第 2 要素である。同様にし
て, u_{30} と u_{20} との間にも次の関係式を得る。

$$u_{30}(y_3) = \alpha_2(u_{20}(y_3) - u_{20}(y_3^{22})) \quad (14)$$

ただし, $\alpha_2 = 1/(u(y^{12}) - u(y^{22}))$ 。今, 任意の $y \in Y$ に対して(13)式と(14)式
から次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} u_{30}(y) &= \alpha_2(u_{20}(y) - u_{20}(y_3^{22})) \\ &= \alpha_2\{\alpha_1(u_{10}(y) - u_{10}(y_2^{21})) - \alpha_1(u_{10}(y_3^{22}) - u_{10}(y_2^{21}))\} \\ &= \alpha_1 \cdot \alpha_2(u_{10}(y) - u_{10}(y_3^{22})) \end{aligned} \quad (15)$$

この手順を他の u_{10} に対して行えば, t 時点では次のような関係式を得る。

$$u_{t0}(y) = \prod_{i=1}^t \alpha_i(u_{10}(y) - u_{10}(y_i^{2^{i-1}})) \quad (16)$$

ただし, $\alpha_i = 1/(u(y^{1i}) - u(y^{2i}))$ 。

したがって, von Neumann-Morgenstern 効用 $u = \sum_{i=1}^T u_i$ は, 上述の
定式化によれば次のように表わされる。任意の $y \in Y^T$ に対して,

$$u(y) = \sum_{i=1}^T \prod_{i=1}^t \alpha_i(u_1(y_i) - u_1(y_i^{2^{i-1}})) \quad (17)$$

また, Bernoulli 指標は次のように表わされる。任意の $p \in P$ に対して,

$$h(p) = \sum_{i=1}^T \left\{ \prod_{i=1}^t \alpha_i \int_Y u_1(y) dp_i \right\} + \beta \quad (18)$$

ただし, $\beta = -\sum_{i=1}^T \prod_{i=1}^t \alpha_i u_1(y_i^{2^{i-1}})$ 。

以上の考察によって, 時間選好論に対する不確実性下の効用理論の適用の
結果を(17)式および(18)式のような形で求めることができた。これらの結果を
もとにして, 本節の冒頭で述べた 2 つの問題に対して若干の考察を加えたい
と思う。

まず、 α_i は常に正であるが、その値が1をこえるかどうかは、固定元 y^{1i} および y^{2i} をいかにとるかによって決定される。条件3によって、任意の $y, y' \in Y^T$ に対して、 $y \succeq y'$ は $p_y \succeq p_{y'}$ と同値であるから、空間 Y^T における固定元のみを考えることにする。このとき、 $h(p_{y^1}) = u(y^1) = 1$, $h(p_{y^0}) = u(y^0) = 0$ とする。したがって、各固定元 y^{1i} および y^{2i} が、初めの u 関数によりどのように評価されるか、すなわち順序付けられるかに従って、各 α_i の値は変動するということである。確実性下の時間選好論では、各 α_i が $0 < \alpha_i < 1$ なる条件を満たす方が望ましいとされているが、我々の場合ではその条件を形成することは、かなりの場合分けをしなければ、それと類似の条件を得ることができない。もっとも、これは、我々の定式化が有限次元に限定されていることにもよるであろう。

次に、(18)式によって、我々は、不確実性下における時間選好論で、意志決定をする最終的指標である Bernoulli 指標を得た。それによると、各 α_i , u_1 および β が決定されるならば、確率測度 p_i がどのような測度であるか限定をしていない。もし、その測度が、様々に規定されることになれば静態的意志決定論にも動態的意志決定論にも応用が可能となる。次の機会に、合理的期待仮説にその応用の場を求めて、上述の理論を適用していくつもりである。

参 考 文 献

- [1] Grandmont, J. M., "Continuity Properties of a von Neumann-Morgenstern Utility," *Journal of Economic Theory*, 4, 1972, pp. 45-57.
- [2] Herstein, I. N. and Milnor, J., "An axiomatic approach to measurable utility," *Econometrica*, 21, 1953, pp. 291-297.
- [3] Nishimura, K. "Expected Time Preference," 六甲台論集 第26巻 第4号 1980.
- [4] Koopmans, T., "Representation of preference orderings with independent components of consumption, and Representation of preference orderings over time," in C. McGuire and R. Radner, eds., *Decision and Organization*, 1972, Amsterdam: North-Holland, pp. 57-78, and pp. 79-100.