研究ノート

Lemke's Algorithm について

渡 部 重 明

1 最近，数理計画法の分野において，Complementarity problem が話題を呼んでいる．単に，その内容の理論的興味だけでなく，そのアイディアに基づく応用範囲の広さにも注目されている〔5〕．Complementarity Problem の定式化には，Linear の場合と Nonlinear の場合があるが，Lemke's Algorithm は Linear の場合の一つの，しかも非常に有効な，解法である．

2 Linear Complementarity Problem は次のように定式化される．

$$\left\langle \begin{array}{l} w+Mz=q \text{ の下に} \\ w'z=0 \text{ なる } (z,\ w) \text{ を求めよ} \end{array} \right\rangle$$

ここに，M は $n\times n$ 型行列，q は n 次元定数ベクトル，z と w は n 次元変数ベクトルである．

例 1　線型計画法

$$\left\langle \begin{array}{l} Ax\leqq b \text{ の下に, } \max\ c'x \\ A'y\geqq c \text{ の下に, } \min\ b'y \end{array} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} Ax+v=b \\ A'y-u=c \end{array} \right. \text{ の下に} \\ c'x=b'y, \text{ すなわち, } -u'x=v'y \end{array} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A' \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} \text{の下に} \\ u'x + v'y = 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} w + Mz = q \quad \text{の下に} \\ w'z = 0 \end{array} \right\rangle$$

ただし，

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A' \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

例 2　二次計画法

$$\left\langle \begin{array}{l} Ax \leqq b \quad \text{の下に} \\ \max \ p'x + \frac{1}{2}x'Cx \end{array} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} p + Cx - A'y + u = 0 \\ b - Ax - v = 0 \\ u'x = 0, \quad v'y = 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C & -A' \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ b \end{pmatrix} \text{の下に} \\ u'x + v'y = 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} w + Mz = q \quad \text{の下に} \\ w'z = 0 \end{array} \right\rangle$$

例 3　Bimatrix Game

$$\left\langle \begin{array}{l} e'x = e'y = 1 \quad \text{の下に} \\ \max \ x'Ay, \quad \max \ x'By \end{array} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{matrix} Ay+u=e,\ B'x+v=e \text{ の下に} \\ x'(e-Ay)=0,\ (e'-x'B)y=0 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{matrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B' & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} \text{の下に} \\ u'x+v'y=0 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\langle \begin{matrix} w+Mz=q \text{ の下に} \\ w'z=0 \end{matrix} \right\rangle$$

逆に，一般の Linear Complementarity Problem は次の形の二次計画法の問題と考えられることに注意したい．

$$\left\langle \begin{matrix} Mz \leqq q \text{ の下に} \\ q'z-z'Mz=0 \end{matrix} \right\rangle$$

3 次の線型計画法の問題を考える．

max $2x_1+x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqq 3 \\ 3x_1 \leqq 5 \end{cases}$$

Simplex 表は表 1 に示されている．

		2	1	0	0
		x_1	x_2	u_1	u_2
u_1	3	1	2	1	0
u_2	5	3	0	0	1
		-2	-1	0	0

u_1	$\frac{4}{3}$	0	2	1	$-\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$
		0	-1	0	$\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
x_1	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$
		0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

表　1

解は，$x_1=\frac{5}{3}$，$x_2=\frac{2}{3}$である．また，dual 問題を考えれば，$y_1=\frac{1}{2}$，$y_2=\frac{1}{2}$なることがわかる．

Lemke's Algorithm の例として，上の問題を解いてみる．各ステップは表 2 に示されている．

ステップ 1．

$$\begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix} z + Iw$$

ただし，I は単位行列である．表 2 には，上式以外に，λ ベクトルが入っている．λ ベクトルは，定数ベクトルを非負にするために導入される．もし，λ ベクトルを導入することなく，定数項がすべて非負ならば，既に解がえられている．λ ベルトルの作り方は，次の通りである．定数項が負の場合，対応する λ ベクトルの項は -1 とし，それ以外の要素はすべて 0 とする．

まず，最初に λ ベクトルを基底に入れる．基底の入れ替えは Simplex 法と同じである．以下，ピボットを○でかこっている．最初の場合，w_1 が基底からはずされる．

		z_1	z_2	z_3	z_4	λ	w_1	w_2	w_3	w_4
w_1	-2	0	0	-1	-3	-1	1	0	0	0
w_2	-1	0	0	-2	0	-1	0	1	0	0
w_3	3	1	2	0	0	0	0	0	1	0
w_4	5	3	0	0	0	0	0	0	0	1
λ	2	0	0	1	3	1	-1	0	0	0
w_2	1	0	0	-1	3	0	-1	1	0	0
w_3	3	1	2	0	0	0	0	0	1	0
w_4	5	3	0	0	0	0	0	0	0	1
λ	2	0	0	1	3	1	-1	0	0	0
w_2	1	0	0	-1	3	0	-1	1	0	0
w_3	$\frac{4}{3}$	0	2	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$
z_1	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
λ	1	0	0	2	0	1	0	-1	0	0
z_4	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
w_3	$\frac{4}{3}$	0	2	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$
z_1	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
λ	1	0	0	2	0	1	0	-1	0	0
z_4	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
z_2	$\frac{2}{3}$	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
z_1	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
z_3	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
z_4	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
z_2	$\frac{2}{3}$	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
z_1	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$

表　2

ステップ２．一般的に，w_i が基底からはずれる場合，次に，そのペアである z_i を基底に入れる（z_i が基底からはずれる場合は，w_i を基底に入れる）．

ステップ３．以下，ステップ２を，λ ベクトルが基底からはずれるまでくり返す．もし，途中で基底の入れ替えが不可能になれば，問題が feasible でないことがわかる．上の問題では，最終的に，z=5/3, 2/3, 1/2, 1/2) となり，$z=(x, y)$ であることを考慮すれば，先の Simplex 法による解と一致していることがわかる．

以上が，Lemke's Algorithm である．証明は，参考文献〔1〕,〔2〕を参

STEP= 0

		Z 1	Z 2	Z 3	Z 4	L 0
W 1	-2.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	-3.00000	-1.00000
W 2	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000	0.00000	-1.00000
W 3	3.00000	1.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
W 4	5.00000	3.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

STEP= 1

		Z 1	Z 2	Z 3	Z 4	W 1
L 0	2.00000	0.00000	0.00000	1.00000	3.00000	-1.00000
W 2	1.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	3.00000	-1.00000
W 3	3.00000	1.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
W 4	5.00000	3.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

STEP= 2

		W 4	Z 2	Z 3	Z 4	W 1
L 0	2.00000	0.00000	0.00000	1.00000	3.00000	-1.00000
W 2	1.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	3.00000	-1.00000
W 3	1.33333	-0.33333	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Z 1	1.66667	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

STEP= 3

		W 4	Z 2	Z 3	W 2	W 1
L 0	1.00000	0.00000	0.00000	2.00000	-1.00000	-1.00000
Z 4	0.33333	0.00000	0.00000	-0.33333	0.33333	-0.33333
W 3	1.33333	-0.33333	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Z 1	1.66667	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

STEP= 4

		W 4	W 3	Z 3	W 2	W 1
L 0	1.00000	0.00000	0.00000	2.00000	-1.00000	-1.00000
Z 4	0.33333	0.00000	0.00000	-0.33333	0.33333	-0.33333
Z 2	0.66667	-0.16667	0.50000	0.00000	0.00000	0.00000
Z 1	1.66667	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

STEP= 5

		W 4	W 3	L 1	W 2	W 1
Z 3	0.50000	0.00000	0.00000	0.50000	-0.50000	-0.50000
Z 4	0.50000	0.00000	0.00000	0.16667	0.33333	-0.33333
Z 2	0.66667	-0.16667	0.50000	0.00000	0.00000	0.00000
Z 1	1.66667	0.33333	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

表　3

照されたい．表3は，計算機による計算結果である．[1]

参 考 文 献

〔1〕 Lemke, C. E. and J. H. Howson, "Equilibrium Points of Bimatrix Games" (SIAM, Appl. Math., 12 (1964), 413—423)

〔2〕 Lemke, C. E., "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming" (Management Science, 11 (1965), 681—689)

〔3〕 Lemke, C. E., "On Complementary Pivot Theory" (in "Mathematics of the Decision Sciences, Part I" eds. by G. B. Dantzig and A. F. Veinott, American Mathematical Society, 1968)

〔4〕 Cottle, R. W. and G. B. Dantzig, "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming" (in "Mathematics of the Decision Sciences, Part I" eds. by G. B. Dantzig and A. F. Veinott, American Mathematical Society, 1968)

〔5〕 Lemke, C. E., "Recent Results on Complementarity Problems" (in "Nonlinear Programming" eds. by J. B. Rosen, O. L. Mangasarian and K. Ritter, Academic Press, 1970)

1) この計算には，追手門学院大学計算センター（機種 NEAC-3100）を利用した．なお，プログラムに関して，同センター石田幸正氏のお世話になった．