

修理能力を考慮した直並列混合 システムの信頼度解析*

中 道 博

1. は し が き

この論文では2つの部分システム S_1 , S_2 が直列に結合され, S_1 は M コの同一要素の並列結合から成り, 一方 S_2 は N コの一般に相異なる要素の直列結合から成る直並列混合システムを取扱う.

このシステムは S_1 に属する1コ以上の要素と S_2 に属する要素が稼動している限り十分その機能を達成できると仮定する. すなわち, S_1 に属する全ての要素または S_2 に属する任意の要素の故障がシステムの完全な故障 (system down) に結果するとする. したがって, 次の2種の故障 (break down) によってシステム故障を定義する;

- (1) S_1 -breakdown: S_1 に属する全ての要素の故障
- (2) S_2 -braekdown: S_2 に属する任意の要素の故障

このシステムの信頼度解析は, これまで Kulshrestha [1], [2], 中道 [3], Nakamichi and others [4] でなされている.

[1], [2] では S_2 -breakdown の場合 (i) S_2 の故障要素と S_1 の故障要素の全てを修理する. (ii) S_2 の故障要素のみ修理し, S_1 故障要素には触れない. また, S_1 -breakdown の場合には S_1 の全ての故障要素を修理

* この論文は福田治郎 (岐阜大), 高松俊朗 (阪大), 児玉正憲 (阪大) 諸氏との信頼性に関する共同研究の成果の一つで, その概要は第39回日本統計学会研究報告会 (1971. 7) で報告されたものである.

するという修理方策の下で解析している。[3] では S_2 -breakdown の場合に S_1 の故障要素の数を explicit に考慮して解析したもので、更に [4] ではシステムはできるだけ長く稼動状態に留まり、たとえシステム故障がおこってもできるだけ早く稼動状態に復することが望ましいという立場から種々の修理方策すなわち、 S_1 の故障要素はシステムが稼動中でも直ちに修理され、また、 S_1 の故障要素の修理中に S_2 -breakdown がおこったとき (i) その修理を一旦中断して S_2 の故障要素を優先的に修理する。(preemptive resume および repeat priority rule). (ii) S_1 の故障要素の修理を完了してから S_2 の故障要素を修理する (head-of-the-line priority rule) の下で解析している。

この論文では修理設備の能力（一修理連）を考慮し、システムの利用度を高めるため次の修理方策を採用して定常状態においてシステムが稼動状態にある確率を求める。

修理方策；(1) S_1 -breakdown が生じたとき故障している S_1 要素を a コ ($1 \leq a \leq M$) 修理する —— S_1 -repair という。(2) S_2 -breakdown が生じたとき、故障した S_2 要素とそれまでに故障している S_1 要素 m コのうち b コ ($1 \leq b \leq M-1$) 修理する —— S_2 -repair という。(3) システムが稼動中でも S_1 要素に故障が発生すれば直ちに修理ステーションにまわされ遂次修理される —— S-repair という。

ここで a は(1)での修理能力を、 b は(2)での修理能力を表わす。ただし、後者における実際の修理個数は $c=m$ ($m \leq b$ のとき)、 $=b$ ($m > b$ のとき) である。

この修理方策で特に $a=1$, $b=1$ と設定すれば [4] での head-of-the-line case になり、また S-repair を行なわないで $a=M$, $b=M-1$ に設定すれば [1] の結果を含むことになる。

2. 定 義 と 仮 定

以下の解析で用いる記号および故障分布，修理時間の分布を次のように仮定する．

・状態確率

$P_0(t)$: 時刻 t でシステムは作動状態にあり， S_1 内の故障要素数は 0 である確率．

$P_m(t, x) dx$: 時刻 t でシステムは作動状態にあり， S_1 内の故障要素の数が m ($1 \leq m < M$)， S -repair の経過時間が x と $x+dx$ の間にある確率．($0 < x < t$)

$P_M(t, x) dx$: 時刻 t でシステムは S_1 -breakdown の状態にあり， S_1 -repair の経過時間が x と $x+dx$ の間にある確率．

$P_{mi}(t, x, y) dx dy$: 時刻 t でシステムは S_2 -breakdown の状態にあり，時刻 $t-y$ で S_2 の i 番目要素が故障し，このとき S_1 内の m コの要素が故障しており， S -repair の経過時間が x と $x+dx$ ，かつ S_2 -repair の経過時間が $x+y$ と $x+y+dy$ の間にある確率．($1 \leq m < M$, $1 \leq i \leq N$)．

$P_{oi}(t, y) dy$: 時刻 t でシステムは S_2 -breakdown の状態にあり，時刻 $t-y$ で S_2 の i 番目要素が故障し，このとき S_1 内の故障要素数は 0 で， S_2 -repair の経過時間が y と $y+dy$ の間にある確率 ($1 \leq i \leq N$)

・故障および修理分布

λ_0 : S_1 内の M コの同一要素の一定故障率

λ_i : S_2 内の i 番目要素の一定故障率 ($1 \leq i \leq N$)

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \equiv \lambda \text{ とおく.}$$

$f_o(t)$: S_1 内の各要素の修理時間分布の確率密度関数 ($p.d.f.$)

$$f_o(t) \equiv \mu_o(t) \exp\left[-\int_0^t \mu_o(\tau) d\tau\right]$$

$f_i(t)$: S_2 内の i 番目要素の修理時間分布の $p.d.f.$

$$f_i(t) \equiv \mu_i(t) \exp\left[-\int_0^t \mu_i(\tau) d\tau\right] \quad (1 \leq i \leq N)$$

$f(t)$: S_1 -repair time の $p.d.f.$

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv \mu^{(a)}(t) \exp\left[-\int_0^t \mu^{(a)}(\tau) d\tau\right] \\ &= f_o(t) * \dots * f_o(t) = [f_o(t)]^{a*} (\text{convolution}) \end{aligned}$$

$f_{mi}(t)$: S_2 -repair time の $p.d.f.$

$$\begin{aligned} f_{mi}(t) &\equiv \mu_i^{(m)}(t) \exp\left[-\int_0^t \mu_i^{(m)}(\tau) d\tau\right] \\ &= f_i(t) * [f_o(t)]^m * \quad (1 \leq m < M-1, 1 \leq i \leq N) \end{aligned}$$

故障要素の修理は単一の窓口をもつ修理ステーションで取扱われ、修理完了した要素は完全に元の新しい要素に復するとみなすことにする。また、故障—修理過程は互いに独立であることを仮定する。

3. システムの状態方程式

時間間隔 $(t, t+h)$ でのシステムの状態変化に着目し、 $h \rightarrow 0$ とすることにより次の状態方程式を得る；

$$\begin{aligned} (1) \quad P_o(t+h) &= P_o(t) [1 - (M\lambda_o + \lambda)h] + h \int_0^t \mu^{(1)}(x) P_1(t, x) dx \\ &\quad + \delta a_s h \int_0^t \mu^{(a)}(x) P_M(t, x) dx + h \sum_{i=1}^N \int_0^t \mu_i(y) P_{oi}(t, y) dy \\ &\quad + h \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^b \int_0^t \int_0^{t-x} \mu_i^{(m)}(x+y) P_{mi}(t, x, y) dx dy + o(h) \\ \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} + M\lambda_o + \lambda \right) P_o(t) &= \int_0^t \mu^{(1)}(x) P_1(t, x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta_{a, M} \int_0^t \mu^{(a)}(x) P_M(t, x) dx \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_0^t \mu_i(y) P_{oi}(t, y) dy + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^b \int_0^t \int_0^{t-x} \mu_i^{(m)}(x+y) \\
 & P_{mi}(t, x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad P_M(t+h, x+h) &= P_M(t, x) [1 - ((M-m)\lambda_o + \lambda)h] [1 - \mu^{(1)}(x)h] \\
 & + (1 - \delta_{1m})(M-m+1)\lambda_o h P_{M-1}(t, x) + o(h). \quad (1 \leq m < M) \\
 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + (M-m)\lambda_o + \lambda + \mu^{(1)}(x) \right) P_M(t, x) &= (1 - \delta_{1m}) \\
 & (M-m+1)\lambda_o P_{M-1}(t, x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad P_M(t+h, x+h) &= P_M(t, x) [1 - \mu^{(a)}(x)h] + \lambda_o h P_{M-1}(t, x) + o(h) \\
 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \mu^{(a)}(x) \right) P_M(t, x) &= \lambda_o P_{M-1}(t, x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad P_{mi}(t+h, x, y+h) &= P_{mi}(t, x, y) [1 - \mu_i^{(c)}(x+y)h] + o(h) \\
 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} + \mu_i^{(c)}(x+y) \right) P_{mi}(t, x, y) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } c = \begin{cases} m : m \leq b \\ b : m > b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad P_{oi}(t+h, y+h) &= P_{oi}(t, y) [1 - \mu_i(y)h] + o(h) \\
 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} + \mu_i(y) \right) P_{oi}(t, y) &= 0
 \end{aligned}$$

境界条件：

$$\begin{aligned}
 (6) \quad P_M(t, 0) &= \delta_{1M} M \lambda_o P_o(t) + \int_0^t \mu^{(1)}(x) P_{M+1}(t, x) dx \\
 & + \delta(m+b, M-1) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^{t-x} P_{m+b, i}(t, x, y) \mu_i^{(b)}(x+y) dy dx \\
 & + \delta_{a+m, M} \int_0^t \mu^{(a)}(x) P_M(t, x) dx \quad (1 \leq m \leq M-2)
 \end{aligned}$$

$$(7) \quad P_{M-1}(t, 0) = \delta_{M, 2} M \lambda_o P_o(t) + \delta_{1, a} \int_0^t \mu^{(a)}(x) P_M(t, x) dx$$

$$(8) \quad P_M(t, 0) = 0$$

$$(9) \quad P_{oi}(t, 0) = \lambda_i P_o(t)$$

$$(10) \quad P_{mi}(t, x, o) = \lambda_i P_m(t, x)$$

$$\text{ここで,} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad \delta(i, j) = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

初期条件：

$$(11) \quad P_o(0) = 1, \quad t=0 \text{ におけるその他の全ての確率は } 0.$$

4. アベィラビリティ

3. で設定した方程式系を解くために、初期条件(11)の下で(1)～(10)の t に関するラプラス変換をとる。 $P(t)$ のラプラス変換を $\bar{P}(s)$ とかくと、

$$(1)' \quad (s + M\lambda_o + \lambda) \bar{P}_o(s) = 1 + \int_0^\infty \mu^{(1)}(x) \bar{P}_1(s, x) dx$$

$$\begin{aligned} & + \delta_{a, M} \int_0^\infty \mu^{(a)}(x) \bar{P}_M(s, x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \mu_i(y) \bar{P}_{oi}(s, y) dy \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^b \int_0^\infty \int_0^\infty \mu_i^{(m)}(x+y) \bar{P}_{mi}(s, x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2)' \quad & \left(-\frac{\partial}{\partial x} + s + (M-m)\lambda_o + \lambda + \mu^{(1)}(x) \right) \bar{P}_m(s, x) \\ & = (1 - \delta_{1, m}) (M-m+1) \lambda_o \bar{P}_{m-1}(s, x) \quad (1 \leq m \leq M-1) \end{aligned}$$

$$(3)' \quad \left(-\frac{\partial}{\partial x} + s + \mu^{(a)}(x) \right) \bar{P}_M(s, x) = \lambda_o \bar{P}_{M-1}(s, x)$$

$$(4)' \quad \left(-\frac{\partial}{\partial y} + s + \mu_i^{(o)}(x+y) \right) \bar{P}_{mi}(s, x, y) = 0$$

$$(5)' \quad \left(-\frac{\partial}{\partial y} + s + \mu_i(y) \right) \bar{P}_{oi}(s, y) = 0$$

$$\begin{aligned} (6)' \quad & \bar{P}_m(s, o) = \delta_{1, m} M \lambda_o \bar{P}_o(s) + \int_0^\infty \mu^{(1)}(x) \bar{P}_{m+1}(s, x) dx \\ & + \delta(m+b, M-1) \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{P}_{m+b, i}(s, x, y) \mu_i^{(b)}(x+y) dx dy \\ & + \delta_{a+m, M} \int_0^\infty \mu^{(a)}(x) \bar{P}_M(s, x) dx \quad (1 \leq m \leq M-2) \end{aligned}$$

$$(7)' \quad \bar{P}_{M-1}(s, o) = \delta_{M, 2} M \lambda_o \bar{P}_o(s) + \delta_{1, a} \int_0^\infty \mu^{(a)}(x) \bar{P}_M(s, x) dx$$

$$(8)' \quad \bar{P}_M(s, o) = 0$$

$$(9)' \quad \bar{P}_{oi}(s, o) = \lambda_i \bar{P}_o(s)$$

$$(10)' \quad \bar{P}_{mi}(s, x, o) = \lambda_i \bar{P}_m(s, x) \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

以上の(1)'~(10)'の方程式系を解く.

まず, (5)'より(9)'を用いて,

$$(12) \quad \bar{P}_{oi}(s, y) = \lambda_i \bar{P}_o(s) \exp[-sy - \int_0^y \mu_i(\tau) d\tau]$$

(4)'より(10)'を用いて,

$$(13) \quad \bar{P}_{mi}(s, x, y) = \lambda_i \bar{P}_m(s, x) \exp[-sy - \int_0^y \mu_i^{(c)}(x+y) dy]$$

(2)'より

$$(14) \quad \bar{P}_m(s, x) = \exp[-(s + (M-m)\lambda_o + \lambda)x - \int_0^x \mu^{(1)}(\tau) d\tau] \\ \sum_{j=0}^{m-1} \binom{M-m+j}{j} (1 - e^{-\lambda_o x})^j \bar{P}_{m-j}(s, o) \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

(14)で $m=M-1$ のとき

$$(15) \quad \bar{P}_{M-1}(s, x) = \exp[-(s + \lambda_o + \lambda)x - \int_0^x \mu^{(1)}(\tau) d\tau] \\ \sum_{j=0}^{M-2} \binom{j+1}{j} (1 - e^{-\lambda_o x})^j \bar{P}_{M-1-j}(s, o)$$

(15)を(3)'に代入して,

$$(16) \quad \bar{P}_M(s, x) = \lambda_o \exp[-sx - \int_0^x \mu^{(a)}(\tau) d\tau] \sum_{j=0}^{M-2} (j+1) \bar{P}_{M-1-j}(s, o) F(j, x)$$

ここで,

$$(17) \quad F(j, x) \equiv \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} \int_0^x \exp[-(\lambda + (k+1)\lambda_o)x] \\ + \int_0^x (\mu^{(a)}(\tau) - \mu^{(1)}(\tau)) d\tau dx$$

(13), (14), (16)を(6)'に代入し整理すると,

$$(18) \quad \bar{P}_m(s, o) = \delta_{1m} M \lambda_o \bar{P}_o(s) + \sum_{j=0}^m \binom{M-m-1+j}{j} \bar{P}_{m+1-j}(s, o) \bar{f}_o(m, j, s)$$

修理能力を考慮した直並列混合システムの信頼度解析

$$\begin{aligned}
 & + \delta(m+b, M-1) \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=0}^{m+b-1} \binom{M-m-b+j}{j} \bar{P}_{m+b-j}(s, o) \bar{g}_b(m, j, s) \\
 & + \delta_{a+m, M} \lambda_o \sum_{j=0}^{M-2} (j+1) \bar{P}_{M-1-j}(s, o) \bar{F}_a(j, s) \quad (1 \leq m \leq M-2)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$(19) \quad \bar{f}_o(m, j, s) \equiv \int_0^\infty f_o(x) \exp[-(s + (M-m-1)\lambda_o + \lambda)x] (1 - e^{-\lambda_o x})^j dx$$

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \bar{g}_b(m, j, s) \equiv & \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \mu_i^{(b)}(x+y) \exp\left[-sy - \int_0^y \mu_i^{(b)}(x+\tau) d\tau\right] dy \right\} \\
 & \exp\left[-(s + (M-m-b)\lambda_o + \lambda)x - \int_0^x \mu_i^{(1)}(\tau) d\tau\right] (1 - e^{-\lambda_o x})^j dx.
 \end{aligned}$$

$$(21) \quad \bar{F}_a(j, s) \equiv \int_0^\infty \mu^{(a)}(x) \exp\left[-sx - \int_0^x \mu^{(a)}(\tau) d\tau\right] F(j, x) dx$$

(12), (13), (14), (16)を(1)'に代入し整理すると,

$$\begin{aligned}
 (22) \quad [s + M\lambda_o + \lambda(1 - \bar{f}(s))] \bar{P}_o(s) = & 1 + \bar{f}_o(s + (M-1)\lambda_o + \lambda) \bar{P}_1(s, o) \\
 & + \delta_{a, M} \lambda_o \sum_{j=0}^{M-2} (j+1) \bar{F}_a(j, s) \bar{P}_{M-1-j}(s, o) \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^b \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_i \binom{M-m+j}{j} \bar{G}_b(m, j, s) \bar{P}_{m-j}(s, o)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \bar{G}_b(m, j, s) \equiv & \int_0^\infty \int_0^\infty \mu_i^{(m)}(x+y) \exp\left[-\left(s + (M-m)\lambda_o + \lambda\right)x \right. \\
 & \left. - \int_0^x \mu_i^{(1)}(\tau) d\tau\right] (1 - e^{-\lambda_o x})^j \\
 & \exp\left[-sy - \int_0^y \mu_i^{(e)}(x+\tau) d\tau\right] dx dy.
 \end{aligned}$$

(16)を(7)'に代入して整理して,

$$(24) \quad \bar{P}_{M-1}(s, o) = \delta_{M, 2} M \lambda_o \bar{P}_o(s) + \delta_{1a} \lambda_o \sum_{j=0}^{M-2} (j+1) \bar{F}_a(j, s) \bar{P}_{M-1-j}(s, o)$$

(18), (22), (24)を連立させることにより $\bar{P}_o(s)$, $\bar{P}_m(s, o)$ ($m=1, 2, \dots, M-1$) が求まる.

これらの解を(12)~(16)に代入することにより $\bar{P}_m(s, x)$ ($1 \leq m \leq M$),

$\bar{P}_{mi}(s, x, y)$ ($1 \leq m \leq M-1$, $1 \leq i \leq N$), $\bar{P}_{oi}(s, y)$ ($1 \leq i \leq N$) の各状態確率 (ラプラス変換形) が求まる.

今, 時刻 t でシステムは作動状態にあり, S_1 内の故障要素の数が m ($1 \leq m \leq M-1$) である確率を $P_m(t)$ とすると, そのラプラス変換は

$$\begin{aligned} (25) \quad \bar{P}_m(s) &= \int_0^\infty \bar{P}_m(s, x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{M-m+j}{j} \bar{P}_{m-j}(s, 0) \sum_{k=0}^j (-1)^k \\ &\quad \left(\frac{j}{k} \right) \frac{1 - \bar{f}_0(s + (M-m+k)\lambda_0 + \lambda)}{s + (M-m+k)\lambda_0 + \lambda} \quad (1 \leq m \leq M-1) \end{aligned}$$

もし, 定常解が存在するならばラプラス変換の性質から定常解は $P_m(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{P}_m(s)$ ($0 \leq m \leq M-1$) として求められる.

したがって, システムのアベイラビリティは $P(\infty) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(\infty)$ として求めることができる.

5. 具 体 例

$M=3$ としたシステムについて考える. 先に一般型分布として導入した各修理分布を指数分布として, 種々の a, b の値についてシステム・アベイラビリティを具体的に求めてみる.

修理分布;

$$\begin{aligned} (26) \quad f_i(t) &= \mu_i e^{-\mu_i t} \quad (i=0, 1, 2, \dots, N) \\ f(t) &= \mu^{(a)} e^{-\mu^{(a)} t} \quad (1 \leq a \leq 3) \\ f_{mi}(t) &= \mu_i^{(m)} e^{-\mu_i^{(m)} t} \quad (m=1, 2, i=1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

(1) $a=3, b=2$ の場合

(22)より

$$(27) \quad [s + 3\lambda_0 + \lambda(1 - \bar{f}(s))] \bar{P}_0(s) = 1 + [\bar{f}_0(s + 2\lambda_0 + \lambda) + 2\lambda_0 \bar{P}_3(1, s)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{G}_2(1, 0, s) + 2\bar{G}_2(2, 1, s)) \bar{P}_1(s, o) \\
 & + [\lambda_o \bar{F}_3(o, s) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{G}_2(2, 0, s)] \bar{P}_2(s, o)
 \end{aligned}$$

(18)より

$$(28) \quad 3\lambda_o \bar{P}_o(s) = [1 - 2\bar{f}_o(1, 1, s)] \bar{P}_1(s, o) - \bar{f}_o(1, 0, s) \bar{P}_2(s, o)$$

(24)より

$$(29) \quad \bar{P}_2(s, o) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{今,} \quad (30) \quad \begin{cases} A_{11}(s) \equiv s + 3\lambda_o + \lambda(1 - \bar{f}(s)) \\ A_{12}(s) \equiv -\bar{f}_o(s + 2\lambda_o + \lambda) - 2\lambda_o \bar{F}_3(1, s) - \sum_{i=1}^N \lambda_i [\bar{G}_2(1, 0, s) \\ \quad + 2\bar{G}_2(2, 1, s)] \\ A_{21}(s) \equiv -3\lambda_o \\ A_{22}(s) \equiv 1 - 2\bar{f}_o(1, 1, s) \end{cases}
 \end{aligned}$$

とおくことにより, 連立方程式(26), (27), (28)は

$$(31) \quad \begin{pmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P}_o(s) \\ \bar{P}_1(s, o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかける。

$D(s) \equiv A_{11}(s)A_{22}(s) - A_{12}(s)A_{21}(s)$ とおくと, (31)より, $\bar{P}_o(s) = A_{22}(s)/D(s)$, $\bar{P}_1(s, o) = -A_{21}(s)/D(s)$ として求まる。

(26)を用い, また, ロピタルの定理を適用して,

$$(32) \quad \begin{cases} P_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{P}_o(s) = \frac{A_{22}(o)}{D'(o)} \\ \quad = \{(\lambda + \lambda_o + \mu_o)(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o) - 2\lambda_o \mu_o\} / D \\ P_1(\infty) = 3\lambda_o(\lambda + \lambda_o + \mu_o) / D \\ P_2(\infty) = 6\lambda_o^2 / D \end{cases}$$

ここで,

$$D \equiv [(\lambda + \lambda_o + \mu_o)(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o) - 2\lambda_o \mu_o] (1 + \sum_{i=1}^N o_i)$$

$$+3\lambda_o \left[(\lambda + \lambda_o + \mu_o) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(1)} \right) + 2\lambda_o \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(2)} \right) + 2\lambda_o^2 K^{(3)} \right]$$

ただし,

$$\rho_i \equiv \lambda_i / \mu_i, \quad K^{(j)} \equiv 1 / \mu^{(j)}, \quad K_i^{(j)} \equiv 1 / \mu_i^{(j)}$$

したがって, アベイラビリティは

$$(33) \quad P(\infty) = \sum_{i=0}^2 P_i(\infty) = \left[(\lambda + \lambda_o + \mu_o) (\lambda + 5\lambda_o + \mu_o) + 2\lambda_o (3\lambda_o - \mu_o) \right] / D.$$

今, 修理分布のたたみこみの性質から

$$K^{(j)} = \frac{j}{\mu_o}, \quad K_i^{(j)} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{j}{\mu_o}$$

また, $\rho_o \equiv \lambda_o / \mu_o$, $\rho^* \equiv \lambda / \mu_o$ とおくと,

$$(34) \quad P(\infty) = \left[(\rho^* + \rho_o + 1) (\rho^* + 5\rho_o + 1) + 2\rho_o (3\rho_o - 1) \right] / K$$

ここで,

$$K \equiv \left[(\rho^* + \rho_o + 1) (\rho^* + 5\rho_o + 1) + 2\rho_o (3\rho_o - 1) \right] \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i \right) + 3\rho_o \left[\rho^* (\rho^* + 5\rho_o + 1) + 6\rho_o^2 \right]$$

特に, (33)で $\mu_o = 0$ とおくと

$$P(\infty) = (\lambda^2 + 6\lambda_o \lambda + 11\lambda_o^2) / \left[(\lambda^2 + 6\lambda_o \lambda + 11\lambda_o^2) \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i \right) + 3\lambda_o \lambda (\lambda + 5\lambda_o) K^{(1)} \right]$$

となり, Kulshrestha モデルについて [3] で与えた例 ($M=3$) の結果と一致する.

以下同様の計算により次の諸結果をうる.

(2) $a=3$, $b=1$ の場合

$$D \equiv \left[(\lambda + \lambda_o + \mu_o) (\lambda + 2\lambda_o + \mu_o) - 2\lambda_o (\lambda + \mu_o) \right] \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i \right) + 3\lambda_o (\lambda + 3\lambda_o + \mu_o) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(1)} \right) + 6\lambda_o^3 K^{(3)}$$

$$(35) \quad \begin{cases} P_0(\infty) = [(\lambda + \lambda_o + \mu_o)(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o) - 2\lambda_o(\lambda + \mu_o)]/D \\ P_1(\infty) = 3\lambda_o(\lambda + \lambda_o + \mu_o)/D \\ P_2(\infty) = 6\lambda_o^2/D \end{cases}$$

$$\therefore P(\infty) = [(\rho^* + \rho_o + 1)(\rho^* + 3\rho_o + 1) + 8\rho_o^2]/K$$

ここで,

$$K \equiv [(\rho^* + \rho_o + 1)(\rho^* + 3\rho_o + 1) + 8\rho_o^2] \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i\right) + 3\rho_o [\rho^*(\rho^* + 3\rho_o + 1) + 6\rho_o^2]$$

(3) $a=2, b=2$ の場合

$$D \equiv [(\lambda + \lambda_o + \mu_o)(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o) - 2\lambda_o(\lambda_o + \mu_o)] \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i\right) + 3\lambda_o \left[(\lambda + \lambda_o + \mu_o) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(1)}\right) + 2\lambda_o \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(2)}\right) + 2\lambda_o^2 K^{(2)}\right]$$

$$(36) \quad \begin{cases} P_0(\infty) = [(\lambda + \lambda_o + \mu_o)(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o) - 2\lambda_o(\lambda_o + \mu_o)]/D \\ P_1(\infty) = 3\lambda_o(\lambda + \lambda_o + \mu_o)/D \\ P_2(\infty) = 6\lambda_o^2/D \end{cases}$$

$$\therefore P(\infty) = [(\rho^* + \rho_o + 1)(\rho^* + 5\rho_o + 1) + 2\rho_o(2\rho_o - 1)]/K$$

ここで,

$$K \equiv [(\rho^* + \rho_o + 1)(\rho^* + 5\rho_o + 1) + 2\rho_o(2\rho_o - 1)] \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i\right) + 3\rho_o [\rho^*(\rho^* + 5\rho_o + 1) + 4\rho_o^2]$$

(4) $a=2, b=1$ の場合

$$D \equiv (\lambda + \lambda_o + \mu_o)(\lambda + \mu_o) \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i\right) + 3\lambda_o [(\lambda + 3\lambda_o + \mu_o) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(1)}\right) + 2\lambda_o^2 K^{(2)}]$$

$$(37) \quad \begin{cases} P_0(\infty) = (\lambda + \lambda_o + \mu_o)(\lambda + \mu_o)/D \\ P_1(\infty) = 3\lambda_o(\lambda + \lambda_o + \mu_o)/D \\ P_2(\infty) = 6\lambda_o^2/D \end{cases}$$

$$\therefore P(\infty) = [(\rho^* + \rho_o + 1)(\rho^* + 3\rho_o + 1) + 6\rho_o^2]/K$$

ここで,

$$K \equiv [(\rho^* + \rho_o + 1)(\rho^* + 3\rho_o + 1) + 6\rho_o^2](1 + \sum_{i=1}^N \rho_i) + 3\rho_o[\rho^*(\rho^* + 3\rho_o + 1) + 4\rho_o^2]$$

(5) $a=1, b=2$ の場合

$$D \equiv [(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o)(\lambda + \mu_o) - 2\lambda_o\mu_o](1 + \sum_{i=1}^N \rho_i) + 3\lambda_o[(\lambda + \mu_o)(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(1)}) + 2\lambda_o(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(2)}) + 2\lambda_o^2 K^{(1)}]$$

$$(38) \quad \begin{cases} P_0(\infty) = [(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o)(\lambda + \mu_o) - 2\lambda_o\mu_o]/D \\ P_1(\infty) = 3\lambda_o(\lambda + \mu_o)/D \\ P_2(\infty) = 6\lambda_o^2/D \end{cases}$$

$$\therefore P(\infty) = [(\rho^* + 1)(\rho^* + 5\rho_o + 1) + 2\rho_o(3\rho_o - 1)]/K$$

ここで,

$$K \equiv [(\rho^* + 1)(\rho^* + 5\rho_o + 1) + 2\rho_o(3\rho_o - 1)](1 + \sum_{i=1}^N \rho_i) + 3\rho_o[\rho^*(\rho^* + 4\rho_o + 1) + 2\rho_o^2]$$

(6) $a=1, b=1$ の場合

$$D \equiv (\lambda + \mu_o)^2(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i) + 3\lambda_o[(\lambda + 2\lambda_o + \mu_o)(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i K_i^{(1)}) + 2\lambda_o^2 K^{(1)}]$$

$$(39) \quad \begin{cases} P_0(\infty) = (\lambda + \mu_0)^2 / D \\ P_1(\infty) = 3\lambda_0(\lambda + \mu_0) / D \\ P_2(\infty) = 6\lambda_0^2 / D \end{cases}$$

$$\therefore P(\infty) = [(\rho^* + 1)(\rho^* + 3\rho_0 + 1) + 6\rho_0^2] / K$$

ここで,

$$K = [(\rho^* + 1)(\rho^* + 3\rho_0 + 1) + 6\rho_0^2] \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i\right) + 3\rho_0 [\rho^*(\rho^* + 2\rho_0 + 1) + 2\rho_0^2]$$

この場合は [4] の head-of-the-line case になり, ここで求めたアベイラビリティ: $P(\infty)$ は [4] での (26) $P_{III}(\infty)$ の結果と一致する.

数 値 例

case (1)~(6)について, $\rho^* \equiv \alpha\rho_0$, $\sum \rho_i \equiv \beta$ とおいて $\alpha = 1.0, 0.1, 0.01$, $\beta = 0.1$ の場合に ρ_0 と P_i (case (i) アベイラビリティ) の関係を数値計算した結果を次表で与える.

表 1 は $\rho^* = \rho_0$ の場合で, 結果は $P_1 < P_2 = P_3 < P_5 < P_4 < P_6$ となっているが, 表 2., 3. では case (i) < (j) に対し $P_i < P_j$ であることが読みとれる. 一般にパラメータの値に対するアベイラビリティ間の大小関係の検証はそれ程容易ではない.† しかし, これについてはある適度直観的に解釈を与えることができる.

定常状態におけるシステムの稼動 (UP) および故障 (DOWN) 状態の平均時間をそれぞれ $E[U]$, $E[D]$ とすると, アベイラビリティは

$$P_i = \frac{E[U_i]}{E[U_i] + E[D_i]}$$

と解釈できる. 今 $E[D_i] / E[U_i] \equiv B_i$ とおくと P_i, P_j の比較は B_i, B_j の相対的な比較になっており, 例えば case (1), (6) に対しては $B_1 > B_6$

† $P_k = \frac{1}{1 + \sum \rho_i + A_k}$ の形に変形し case (i), (j) について $A_i \equiv A_j$ をみたすパラメータ間の条件式をみつけること.

表 1

$\alpha=1.0000, \beta=0.1000$

ρ_0	availability	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0.01		0.9088294	0.9088340	0.9088340	0.9088387	0.9088386	0.9088432
0.05		0.9017767	0.9022050	0.9022050	0.9026369	0.9026002	0.9030544
0.10		0.8794664	0.8817635	0.8817635	0.8841463	0.8837970	0.8864265
0.20		0.8066298	0.8151549	0.8151549	0.8243727	0.8222811	0.8333333
0.30		0.7241153	0.7381615	0.7381615	0.7540861	0.7497382	0.7701019
0.40		0.6479570	0.6654756	0.6654756	0.6861313	0.6799336	0.7076923
0.50		0.5821917	0.6015037	0.6015037	0.6249999	0.6175771	0.6504065
0.60		0.5265158	0.5465288	0.5465288	0.5714963	0.5633802	0.5993690
0.70		0.4794801	0.4995403	0.4995403	0.5250783	0.5166492	0.5544087
0.80		0.4395492	0.4592830	0.4592830	0.4848245	0.4763358	0.5149051
0.90		0.4053949	0.4245986	0.4245986	0.4497971	0.4414025	0.4801412
1.00		0.3759398	0.3945111	0.3945111	0.4191616	0.4109589	0.4494382
1.10		0.3503291	0.3682255	0.3682255	0.3922132	0.3842568	0.4221995
1.20		0.3278877	0.3451018	0.3451018	0.3683690	0.3606869	0.3979174
1.30		0.3080814	0.3246259	0.3246259	0.3471509	0.3397541	0.3761658

表 2

$\alpha=0.1000, \beta=0.1000$

availability ρ_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0.01	0.9090516	0.9090521	0.9090564	0.9090568	0.9090611	0.9090615
0.05	0.9069672	0.9070162	0.9074589	0.9075083	0.9079304	0.9079825
0.10	0.8971289	0.8974283	0.9001686	0.9004781	0.9030276	0.9033728
0.20	0.8525089	0.8538453	0.8665098	0.8679919	0.8797007	0.8815473
0.30	0.7888154	0.7913185	0.8159646	0.8189630	0.8422602	0.8463856
0.40	0.7214816	0.7248764	0.7594790	0.7638402	0.7976025	0.8041301
0.50	0.6582410	0.6621982	0.7037344	0.7091299	0.7510214	0.7596835
0.60	0.6017174	0.6059787	0.6518092	0.6579142	0.7056104	0.7159998
0.70	0.5521924	0.5565820	0.6047513	0.6113034	0.6628913	0.6745981
0.80	0.5090670	0.5134725	0.5626311	0.5694353	0.6234587	0.6361261
0.90	0.4715007	0.4758532	0.5251039	0.5320214	0.5874119	0.6007491
1.00	0.4386628	0.4429215	0.4916835	0.4986177	0.5546061	0.5683846
1.10	0.4098174	0.4139594	0.4618665	0.4687518	0.4247907	0.5388343
1.20	0.3843410	0.3883548	0.4351846	0.4419769	0.4976807	0.5118554
1.30	0.3617152	0.3655966	0.4112228	0.4178934	0.4729933	0.4871980

表 3

$\alpha=0.0100, \beta=0.1000$

availability P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0.01	0.9090741	0.9090741	0.9090788	0.9090789	0.9090835	0.9090836
0.05	0.9075170	0.9075220	0.9080157	0.9080207	0.9084959	0.9085012
0.10	0.8991206	0.8991514	0.9022491	0.9022809	0.9052131	0.9052487
0.20	0.8582424	0.8583828	0.8730406	0.8731968	0.8871748	0.8873703
0.30	0.7974995	0.7977666	0.8268074	0.8271296	0.8557716	0.8562195
0.40	0.7318229	0.7321888	0.7734985	0.7739744	0.8164320	0.8171554
0.50	0.6692720	0.6697015	0.7197650	0.7203606	0.7739621	0.7749384
0.60	0.6128542	0.6133189	0.6689513	0.6696311	0.7314811	0.7326682
0.70	0.5631165	0.5635968	0.6223829	0.6231174	0.6907154	0.6920680
0.80	0.5196186	0.5201017	0.5803446	0.5811115	0.6524873	0.6539643
0.90	0.4816096	0.4820877	0.5426415	0.5434245	0.6170922	0.6186592
1.00	0.4483081	0.4487765	0.5088872	0.5096748	0.5845394	0.5861685
1.10	0.4190042	0.4194602	0.4786439	0.4794283	0.5546930	0.5563625
1.20	0.3930879	0.39393501	0.4514860	0.4522616	0.5273530	0.5290459
1.30	0.3700469	0.3704748	0.4270257	0.4277889	0.5022975	0.5040008

を意味している。しかもこの場合、修理方策のたて方から $E[U_1] > E[U_6]$, $E[D_1] > E[D_6]$ であることが予想される.**

したがって、アバイラビリティだけでなくシステム故障をおこした場合の修理段取費用等考慮した cost-availability の立場から信頼性を問題にすると、本稿で取扱って来た修理能力 (a , b) を考慮した意義がより明確になるものと思われる。

参 考 文 献

- [1] Kulshrestha, D. K., "Reliability of a Parallel Redundant Complex System" Opns. Res., 16, No. 1 (1968)
- [2] Kulshrestha, D. K., "Reliability of a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel" IEEE Trans. on Reliability., 19, No. 2 (1970)
- [3] 中道博, 冗長システムの信頼度 (Ⅲ), 追手門経済論集第V巻第3・4号, 昭和46年.
- [4] Nakamichi, H., and others, "Reliability Consideration on a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel." J. O. R. S. J. vol. 17, No. 1, March 1974.

** case (6) は system down からの回復が最小の修理個数で冗長要素の少ない状態に戻され case (1) に比べて UP, DOWN の交互のくり返しがはげしく行なわれる。