

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する 供給関数均衡解の軌跡について

松 田 年 弘

要約 : Klemperer & Meyer (1989) は、需要関数を価格で二階微分した値が非負と仮定して、供給関数均衡解 (SFE) を導入したので、SFE を応用した研究では線形需要曲線を仮定することが殆どである。本論文では、需要関数の価格についての二階微分値の符号に仮定を設けない場合の対称型SFEについて、一階条件の微分方程式を自励系に変換してから、Barbashin-Krasovskii-LaSalleの定理などを用いて解の軌跡の性質を検討した。

キーワード : 供給関数均衡解、価格についての二階微分値の制約がない需要曲線、自励系、解の軌跡

Key Word : Supply Function Equilibria, No Sign Constraint on the Second Derivative of a Demand Function with respect to Price, Autonomous System, Locus of Solution

1. はじめに

需要曲線が不確実性を持って変動するという状況のもと、プレイヤーの供給曲線を戦略とするゲームの新しい均衡概念として、Klemperer & Meyer (1989) は、供給関数均衡解 (Supply Function Equilibria : SFE) を導入した。SFEは、1990年代から先進各国で新設された卸電力市場 (Wholesale Electricity Market) における市場支配力を分析するために応用されること

が多い。主な卸電力市場である一日前市場（Day Ahead Market）において発電事業者と小売供給事業者が電力を取引する時、発電事業者は供給曲線を提出する形式で入札を行うことが求められるので、SFEの想定するゲーム論的状况に合致しているためである。

さて、Klemperer & Meyer（1989）は、需要関数の価格に関する二階微分値が非負と仮定して、SFEに関する命題やその証明を構築した。このため、卸電力市場にSFEが応用される場合、計算を遂行する上で扱いやすい線形需要関数、すなわち価格に関する需要の二階微分値がゼロであることを仮定することが殆どであった。例えばSFEを最初に応用した研究は、Green & Newberry（1992）による英国の電力プール市場における市場支配力の評価であるが、線形需要曲線が仮定されている。

しかし、現実の卸電力市場における需要曲線が常に線形近似可能とは限らない。一つの例として、米国カリフォルニア州の電力一日前市場における市場支配力を評価するために価格に関する二階微分値が正の需要関数を仮定して、古典的なクールノー均衡を用いた研究がある¹。クールノー均衡が存在するためには、McManus（1962）などの証明が示すように、需要関数の価格に関する二階微分値が非負であることを必要としない²。SFEにおいても、需要関数の価格に関する二階微分値の仮定を緩められることが望ましい。

本論文の目的は、需要関数の価格についての二階微分値の符号に仮定を設けずに対称型SFEの一階条件であるKM方程式を満たす解の軌跡の性質を検討することである。手法としてはKM方程式を自励系に変換して、解の軌跡を分析する。第一に、価格と供給量を軸とする平面において、解の軌跡が

¹ 米国加州の電力一日前市場における需要曲線の形状については、松田（2003）が実際に検証している。同市場における需要曲線の価格に関する二階微分値が正であるとは言い難いが、この仮定は計算を遂行するための近似であろう。

² 需要曲線の価格に関する二階微分値が非負の場合、クールノー均衡解の存在は容易に証明できる。需要曲線の価格についての二階微分に関する制約を含まないMcManus（1962）による証明は古典的かつ技巧に富んでいる。この他にも、クールノー均衡解が存在するための様々な十分条件が知られているが、必要十分条件はまだ知られていない（Daughety, 1988）。

原点に収束することを示す³。この性質は、需要関数の価格の二階微分値の符号が非負の場合でも同様に成立するが、符号制約のない場合の証明はやや難しく、リヤプノフ関数を設定して解のふるまいを検討する方法を採用した。第二に、解の軌跡が原点に収束する過程において、その傾きをどのように変えるのかを明らかにする。需要関数の価格の二階微分値の符号が非負の場合と符号制約のない場合を比較すると、前者に比べて後者の符号変化は複雑である。この符号変化を記述する一連の命題を与える。

2. 市場モデルとSFEに関する利潤最大化の一階条件 (KM方程式)

本節では、本論文における市場モデルの設定を述べ、その市場モデルから導出されるSFEに関する利潤最大化の一階条件を記述する。

p を市場価格、 ε は需要の不確実性を示すパラメータとすると、市場全体の需要関数 $D(p, \varepsilon)$ は、 $\mathcal{R}^+ \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ もしくは $\mathcal{R}^+ / \{0\} \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ という写像を表す C^2 級の関数で与えられる⁴。ここで \mathcal{R}^+ は非負の実数であり、 E は不確実性パラメータがとりうる値の上限と下限を示す区間である $[\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}] \subset \mathcal{R}$ を示す。なお、不確実性パラメータの下限 $\underline{\varepsilon}$ は、 $D(0, \underline{\varepsilon}) = 0$ を満たすものとする。需要関数については $-\infty < D_p < 0$ であり、 D_{pp} の符号についての制約はもうけない。 $D(p, \varepsilon)$ が $\mathcal{R}^+ / \{0\} \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ という写像の場合は、 $p \rightarrow +0$ において $D(p, \varepsilon) \rightarrow +\infty$, $D_p(p, \varepsilon) \rightarrow -\infty$ であると仮定する。

市場に参加する事業者は i, j の2企業として、その供給関数を $S_i(p)$, $S_j(p)$ と表記する。また、供給曲線の傾きが非負となるように $S'_i(p) \geq 0$, $S'_j(p) \geq 0$ と仮定する。企業の費用関数 $C_i(S)$ と $C_j(S)$ は同一であり、 $\mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^+$ の写像で与えられる C^2 級の関数、更に $C''(S) > 0$, $C'(S) \geq 0$, $C'(0) = 0$ と仮定する。

³ 価格を $p \rightarrow p - C'(0)$ と平行移動したうえで原点を定める。

⁴ D_{pp} の符号について制約を設けないので、 $D(p, \varepsilon) = p^{-1} + \varepsilon$ のように、 $\mathcal{R}^+ / \{0\} \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ という写像となる場合がある。

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する供給関数均衡解の軌跡について

いま、需要曲線の不確実性パラメータ ε の実現値を知ることなく、寡占企業が同時に供給関数 $S_i(p)$ を選択し、(1) 式の利潤 $\pi_i(p, \varepsilon; S_{j \neq i}(p))$ を利得とするゲームを考える。需要曲線の不確実性を示すパラメータ ε の任意の実現値に対して、企業 i と企業 j の供給関数の組み合わせ $(S_i(p), S_j(p))$ がナッシュ均衡になるものがSFEと定義される。

$$\pi_i(p, \varepsilon; S_{j \neq i}(p)) = p((D(p, \varepsilon) - S_{j \neq i}(p)) - C_i((D(p, \varepsilon) - S_{j \neq i}(p))) \quad (1)$$

利潤関数 $\pi_i(p, \varepsilon; S_{j \neq i}(p))$ の導関数は (2) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \pi_i(p, \varepsilon; S_{j \neq i}(p)) &= D(p, \varepsilon) - S_{j \neq i}(p) + \\ &[p - C'(D(p, \varepsilon) - S_{j \neq i}(p))][D_p(p) - S'_{j \neq i}(p)] \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式に需給均衡式 $S_i(p) = D(p, \varepsilon) - S_{j \neq i}(p)$ 、対称解を調べることから $S_i(p) = S_{j \neq i}(p) = S(p)$ を代入すると、SFEに関する利潤最大化の一階条件である (3) 式の微分方程式が得られる。(3) 式はKlemperer & Meyer方程式と呼ばれることがあり、われわれも以下の記述ではKM方程式と呼ぶ。

$$S'(p) = \frac{S(p)}{p - C'(S(p))} + D_p(p) \quad (3)$$

(3) 式のKM方程式は、右辺の分母がゼロの時を除き C^1 級の関数で有界であるので、Lipschitz連続となる。(3) 式の逆数をとった微分方程式についても、同様に右辺の分母がゼロの時を除き C^1 級の関数で有界であるので、Lipschitz連続となる。従って、価格と供給量を軸とする平面の第一象限である $Q = \{(p, S) \mid p \geq 0, S \geq 0\}$ において、(3) 式の分子と分母が共にゼロとなる $(p, S) = (C'(0), 0)$ を除き、任意の点 (p_0, S_0) を通る解が一意的に存在する。

なお、SFEに関する利潤最大化の二階条件については、利潤最大化の一階微分の符号判定のみで実質的に二階条件を示した松田 (2021) の証明が D_{pp}

の符号の影響を受けることなく同様に適用される。

3. KM方程式の自励系への変換

本節では、 $Q = \{(p, S) \mid p \geq 0, S \geq 0\}$ におけるKM方程式の解の広域的なふるまいを調べるために、まず、KM方程式を t をパラメータとする自励系の (4) 式に書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\sigma(p)[S + D_p(p)(p - C'(S))] \equiv \sigma(p)f_1(p, S) \\ \frac{dp}{dt} &= -\sigma(p)[p - C'(S)] \equiv \sigma(p)f_2(p, S) \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 式において、 $D(p, \varepsilon)$ が $\mathcal{R}^+ \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ の写像である場合は $\sigma(p) = 1$ 、 $D(p, \varepsilon)$ が $\mathcal{R}^+ / \{0\} \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ の写像である場合は $\sigma(p) = -(D_p(p))^{-1}$ と定義する。後者の場合、 $(D_p(0))^{-1} = 0$ と定義すると、 \mathcal{R}^+ の定義域で $\sigma(p)$ は非負の連続関数となり、 $p = 0$ においてのみ、 $\sigma(p) = 0$ となる。このように定義することにより、 $D(p, \varepsilon)$ が $\mathcal{R}^+ / \{0\} \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ という写像の場合でも、 $\sigma(p)f_1(p, S)$ と $\sigma(p)f_2(p, S)$ は $\mathcal{R}^+ \times E \rightarrow \mathcal{R}^+$ の連続関数とすることができる。更に $D_p(p)$ が $p \neq 0$ において連続微分可能なので、自励系である (4) 式の右辺は連続関数であり、 $p \neq 0$ においては連続微分可能な関数として、以下の議論を進めることが出来る。なお、自励系である (4) 式の固定点 (fixed point) は $(p, S) = (C'(0), 0)$ である⁵。

⁵ $C'(0) = 0$ から、固定点は $(p, S) = (C'(0), 0) = (0, 0)$ である。以下の記述では本質的な表現である $(C'(0), 0)$ を用いる。

4. 解の傾きが定符号を持つ領域への分割

我々は $S'(p) \geq 0$ を満たす解を探す必要があるため、 $\frac{dp}{dt}$ と $\frac{dS}{dt}$ が定符号を持つ領域を得るべく、等傾線 (isocline) である $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ と $\sigma(p)f_2(p, S) = 0$ によって、第一象限 Q を分割する。等傾線 $\sigma(p)f_2(p, S) = 0$ は 2つの曲線で構成され、一つは $p = 0$ ($\sigma(p) = 0$) であり、もう一つは限界費用曲線である $p = C'(S)$ ($f_2(p, S) = 0$) である。等傾線 $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ については命題 1 が成立する。

命題 1 第一象限 Q における等傾線 $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ は、 $p \geq C'(S)$ の領域において、連続微分可能な $S = S_1(p)$ として表現可能であり、(i) $S_1(C'(0)) = 0$ 、(ii) $p > C'(0)$ では $S_1(p) > 0$ 、(iii) $S_1(p) < (C')^{-1}(p)$ を満たす。

証明 $\sigma(p) = 1$ の場合、等式 $f_1(p, S) = 0$ において $p = \tilde{p}$ と固定すると、 $D_{\tilde{p}}(\tilde{p}) (\tilde{p} - C'(S)) + S = 0$ となる。この等式の左辺を $F(S)$ と表記すると、 $\frac{dF(S)}{dS} > 0$ から $F(S)$ は単調増加関数であり、またおよび $\lim_{S \rightarrow +\infty} F(S)$ であることがわかる。

$\tilde{p} > C'(0)$ の時、 $F(0) < 0$ なので、 $F(S) = 0$ となる正の S が一意的に存在する。 $\tilde{p} = C'(0)$ の時、 $S = 0$ が $F(S) = 0$ の一意的な解である。これらの事実から、 $p \geq C'(S)$ の領域において $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ は、(i) と (ii) を満たし、連続な $S = S_1(p)$ として表現可能であることがわかる。 $\sigma(p) = -(D_{\tilde{p}}(\tilde{p}))^{-1}$ の場合も同様に $(\tilde{p} - C'(S)) + (D_{\tilde{p}}(\tilde{p}))^{-1} S = 0$ を考察することにより、 $p \geq C'(S)$ の領域において $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ は、(i) と (ii) を満たし、連続な $S = S_1(p)$ として表現可能であることがわかる。

$S = S_1(p)$ の微分可能性については、陰関数定理を用いると、 $S = S_1(p)$ は (5) 式または (6) 式を満たし、微分可能であることがわかる。

$$\sigma(p) = 1 \text{ または } p > 0 \text{ の場合、} \frac{dS_1}{dp} = \frac{-[D_p + D_{pp}(p)(p - C'(S_1(p)))]}{1 - D_p C''(S_1(p))} \quad (5)$$

$\sigma(p) = -(D_p(p))^{-1}$ または $p \geq 0$ の場合、

$$\frac{dS_1}{dp} = \frac{-[1 - D_{pp}(p)(p - C'(S_1(p)))]}{(D_p)^{-1} - C''(S_1(p))} \quad (6)$$

また、 $\sigma(p) = 1$ の場合、 $D_p(p)(p - C'(S)) + S = 0$ から、 $S > 0$ であれば $p > C'(S)$ が成立し、 $C''(S) > 0$ から、(iii)の $S_1(p) < (C')^{-1}(p)$ がわかる。
 $\sigma(p) = -(D_p(p))^{-1}$ の場合は、同様に $(p - C'(S)) + (D_p(p))^{-1}S = 0$ を考察すれば、(iii)を導くことが出来る。 Q. E. D.

命題1は $D_{pp}(p) \leq 0$ の場合に Klemperer & Meyer (1989) によって得られているが、我々の証明は連続な $S = S_1(p)$ の存在を導く方法において異なっている。また、 $D_{pp}(p) \leq 0$ の場合に $S_1(p)$ は単調増加関数となるが、 $D_{pp}(p)$ の符号に制約をおかない場合は $S_1(p)$ が単調増加関数になるとは限らない。

命題1から $S_1(p) < (C')^{-1}(p)$ が成立するので、第一象限 Q は等傾線 $\sigma(p)$ 、 $f_1(p, S) = 0$ と等傾線 $\sigma(p)$ 、 $f_2(p, S) = 0$ により、3つの領域に分割される。図1が示すように、領域 Q_A では $\sigma(p)f_1(p, S) > 0$ かつ $\sigma(p)f_2(p, S) < 0$ であり、領域 Q_B では $\sigma(p)f_1(p, S) < 0$ かつ $\sigma(p)f_2(p, S) < 0$ であり、領域 Q_C では $\sigma(p)f_1(p, S) < 0$ かつ $\sigma(p)f_2(p, S) > 0$ である。

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する供給関数均衡解の軌跡について

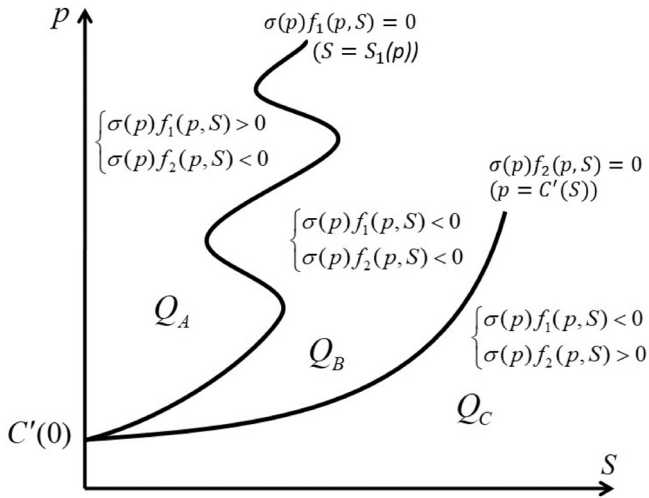


図1 等傾線により定まる自律系 (4) 式の定符号領域

5. 解の軌跡が原点に収束する命題の証明

(4) 式の解である $(p(t), S(t))$ は、初期値を $(p(0), S(0)) = (p_0, S_0)$ とする t 時点の軌跡として表現できるので、それを我々は $\phi(t, (p_0, S_0))$ と表記する。本節では、 $p_0 > C'(0)$ であれば、第一象限 Q の任意の点 (p_0, S_0) を初期値とする軌跡が $t \rightarrow \infty$ において、固定点 $(C'(0), 0)$ に収束することを以下の一連の命題で示したい。

命題 2 (4) 式の軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は、 $p_0 > C'(0)$ を満たす $(p_0, S_0) \in Q_C$ を初期値とする。この時、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は、固定点 $(C'(0), 0)$ を除く境界 $\partial Q_C \cap \partial Q_B$ 、すなわち曲線 $p = C'(S)$ に有限時間 t で交差する。

証明 $p \geq p_0$ 、 $S \leq S_0$ および $p \geq C'(0)$ で囲まれた有界閉領域を考える。この領域では、 $\frac{dp}{dt} > 0$ かつ $\frac{dS}{dt} < 0$ であり、 $\frac{dS}{dt}$ は最大値を持つことから、

$\phi(t, (p_0, S_0))$ が曲線 $p = C'(S)$ に有限時間 t で交差することがわかる。

Q. E. D.

次の補題は、初期値を $(p_0, S_0) \in \overline{Q}_A \cup \overline{Q}_B$ とする軌跡が、 $t \rightarrow \infty$ において固定点 $(C'(0), 0)$ に収束することを証明するために必要である。補題は自励系の漸近安定に関するリヤプノフ関数に類似した関数を利用したBarbashin-Krasovskii-LaSalleの定理の系となる。なお、補題とその証明における太字はベクトル値を示している。

補題 自励系 $\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ について、 D_C をコンパクトな正の不変集合 (positively Invariant set) とし、固定点は $\mathbf{x}_E \in D_C$ とする。いま、連続微分可能な関数 $V: D_C \rightarrow \mathcal{R}$ が存在し、 $V(\mathbf{x}_E) = 0$ 、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_E$ ならば $V(\mathbf{x}) > 0$ 、そして $\mathbf{x} \in D_C$ の時に $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ と仮定する。

更に、集合 $D_E \equiv \{\mathbf{x} \in D_C : V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}$ は固定点 $\{\mathbf{x}_E\}$ 以外に不変集合を含まないものと仮定する。この時、 $\mathbf{x}(0) \in D_C$ ならば、 $t \rightarrow +\infty$ で $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_E$ に収束する。

証明 $V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ から、 $t \geq \tau$ であれば $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(\tau))$ であり、これは $V(\mathbf{x}(t))$ が t についての単調非増加関数であることを示す。従って、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_E$ ならば $V(\mathbf{x}) > 0$ なので、 $\mathbf{x}(0) \in D_C$ を満たす全ての \mathbf{x} について、 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = \gamma_{\mathbf{x}(0)}$ が単調性から存在する。初期値を指定した軌道 $\mathbf{x}(0)$ の正の極限集合⁶ を $w(\mathbf{x}(0))$ と表記する。正の極限集合の定義から、任意の極限ベクトル $\mathbf{y} \in w(\mathbf{x}(0))$ に対して、 $n \rightarrow \infty$ で $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{y}$ となる数列 $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ があり、この数列は $t_0 = 0$ かつ、 $n \rightarrow \infty$ で $t_n \rightarrow +\infty$ を満たす。 $V(\mathbf{x})$ の連続性から、 $V(\mathbf{y}) = V(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (V(\mathbf{x}(t_n))) = \gamma_{\mathbf{x}(0)}$ なので、任意の極限ベクトル $\mathbf{y} \in w(\mathbf{x}(0))$ に対して、 $V(\mathbf{y}) = \gamma_{\mathbf{x}(0)}$ となる。

⁶ w 極限集合とも呼ぶ。

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する供給関数均衡解の軌跡について

仮定から D_C はコンパクトな正の不変集合なので、 $\mathbf{x}(0) \in D_C$ を満たす $\mathbf{x}(t)$ は $t \geq 0$ において有界である。従って、 $w(\mathbf{x}(0))$ は空ではないコンパクトな不変集合である⁷。 $V(\mathbf{x})$ は定数なので、コンパクト集合 $w(\mathbf{x}(0))$ において $V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ となり、 $w(\mathbf{x}(0))$ は集合 D_E に含まれる。仮定から集合 D_E は固定点 $\{\mathbf{x}_E\}$ 以外に不変集合を持たないので、 $w(\mathbf{x}(0)) = \{\mathbf{x}_E\}$ である。従って、 $t \rightarrow +\infty$ で $\mathbf{x}(t) \rightarrow \{\mathbf{x}_E\}$ が成立する。 Q. E. D.

命題 3 (4) 式の解の初期値が $(p_0, S_0) \in \overline{Q}_A \cup \overline{Q}_B$ と仮定する。ここで、 \overline{Q}_A は領域 Q_A の閉包、 \overline{Q}_B は領域 Q_B の閉包を示す。 $p \leq p_0$ 、 $S \geq 0$ および $p \geq C'(S)$ で囲まれた有界閉領域 Γ_0 は、(4) 式の自励系について正の不変集合である (図 2)。

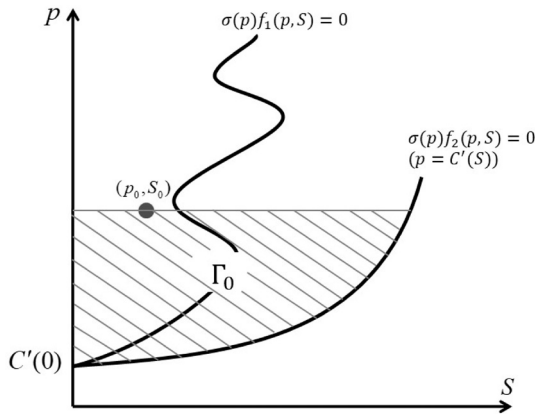


図 2 有界閉領域 Γ_0

証明 (4) 式の自励系について、境界 $\partial\Gamma_1$ の各点における接ベクトル $(\frac{dp}{dt}, \frac{dS}{dt})$ を考える。この時、 $p(t) = p_0$ かつ $p_0 \neq C'(S(t))$ であれば、

⁷ この性質については、例えば「微分方程式」(石村・岡田・日野,1995)を参照。なお、補題 1 は、本論文の目的を達することに焦点を合わせ、Barbashin-Krasovskii-LaSalle の定理の一部を筆者が省略・変更したものである。

$\frac{dp}{dt} < 0$ である。 $S(t) = 0$ かつ $p(t) \neq C'(0)$ であれば、 $\frac{dp}{dt} < 0$ および $\frac{dS}{dt} > 0$ である。 $p(t) \neq C'(S(t))$ であれば、 $\frac{dp}{dt} = 0$ および $\frac{dS}{dt} \leq 0$ であり、後者の等号は点 $(C'(0), 0)$ についてのみ成立する。

これらの不等式は、点 $(p_1, S_1) \in \partial\Gamma_0$ について、 $\phi(t, (p_1, S_1))$ は領域 Γ_0 に入るか、もしくは境界 $\partial\Gamma_0$ の一部にあることを示すので、有界閉領域 Γ_0 は正の不変集合である。 Q. E. D.

命題4 (4) 式の軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の初期値が $(p_0, S_0) \in \overline{Q}_A \cup \overline{Q}_B$ と仮定する。この時、 $t \rightarrow +\infty$ で軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は固定点 $(C'(0), 0)$ に収束する。

証明 補題を (4) 式の自励系に適用し、 $D_C \equiv \Gamma_0$ および $V(p, S) \equiv p - C'(0)$ とおく。ここで Γ_0 は命題3で定義された有界閉領域である。命題3から、領域 Γ_0 は (4) 式の自励系について正の不変集合である。また、 $V(C'(0), 0) = 0$ であり、 $\Gamma_0 / \{(C'(0), 0)\}$ において $V(p, S) \equiv p - C'(S) > 0$ である。更に、領域 Γ_0 において、

$\frac{dV}{dt} = -\sigma(p)[p - C'(S)] \leq 0$ である。集合 $D_E \equiv \{(p, S) \in \Gamma_0 : p - C'(S) = 0\}$ は、点 $(C'(0), 0)$ を除く曲線 $p = C'(S)$ において $\frac{dp}{dt} = 0$ かつ $\frac{dS}{dt} < 0$ なので、含まれる不変集合は $\{(C'(0), 0)\}$ のみである。従って命題4が成立する。 Q. E. D.

次に、初期値を $(p_0, S_0) \in \overline{Q}_A \cup \overline{Q}_B$ とする軌跡が点 $(C'(0), 0)$ に収束する過程において、境界 $\partial\Gamma_0$ に達することがないことを証明する。

命題5 (4) 式の軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の初期値が $(p_0, S_0) \in \overline{Q}_A \cup \overline{Q}_B$ と仮定する。この時、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は $t \rightarrow +\infty$ で、固定点 $(C'(0), 0)$ と初期値 (p_0, S_0) を除いて、境界 $\partial\Gamma_0$ に達することなく固定点 $(C'(0), 0)$ に収束する。

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する供給関数均衡解の軌跡について

証明 背理法を使うために、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が $0 < t_a < +\infty$ を満たす時点 t_a で曲線 $p = C'(S)$ に達するものと仮定する。ただし、 $(p(t_a), S(t_a)) \neq (C'(0), 0)$ である。命題 2 から、点 $(p(t_a), S(t_a))$ の近傍で $\frac{dS}{dt} > 0$ であり、 $S(t)$ は単調減少関数である。従って、解の軌跡 $(p(t), S(t))$ は点 $(p(t_a), S(t_a))$ の近傍で局所的に $p = p(S)$ と表現できる。(3) 式を S で二階微分すると、

$$\frac{d^2 p}{dS^2} = \frac{\left[\frac{dp}{dS} - C''(S) \right] [S + D_p(p - C'(S))] - [p - C'(S)] \left[1 + \frac{dp}{dS} D_{pp}(p - C'(S)) + D_p \left(\frac{dp}{dS} - C''(S) \right) \right]}{[S + D_p(p - C'(S))]^2}$$

が得られる。 $S = S(t_a)$ では、 $\frac{dp}{dt} = 0$ かつ $p(t_a) = C'(S(t_a))$ なので、 $\frac{dp(S(t_a))}{dS} = 0$ となるので、 $\frac{d^2 p(S(t_a))}{dS^2} = \frac{-(S(t_a))C''(S(t_a))}{[S(t_a) + D_p(p(t_a))(p_1 - C'(S(t_a)))]^2} < 0$ となる。

この不等式は、十分小さな $\Delta S > 0$ について、 $\frac{dp}{dS}(S(t_a) + \Delta S) < 0$ および $\frac{dp}{dS}(S(t_a) - \Delta S) > 0$ を示している。 $\frac{dp}{dS}(S(t_a - \Delta t)) = \frac{dp}{dS}(S(t_a) + \Delta S) < 0$ なので、 $(p(t_a - \Delta t), S(t_a - \Delta t)) \in Q_C$ が成立するが、これは矛盾である。従って、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は境界 $\partial \Gamma_0$ の一部である曲線 $p = C'(S)$ に達することはできず、 $\frac{dp}{dt} = -\sigma(p)[p - C'(S)] < 0$ が成立する。同式から $t > 0$ について $\frac{dp}{dt} < 0$ なので、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は境界 $\partial \Gamma_0$ の一部である直線 $p = p_0$ に達することは出来ない。最後に、背理法をやはり用いて、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が $0 < t_b < +\infty$ を満たす時点 t_b で境界 $\partial \Gamma_0$ の一部である直線 $S = 0$ に達すると仮定する。ただし、 $(p(t_b), S(t_b)) \neq (C'(0), 0)$ である。この時、 $\frac{dS(t_a)}{dt} > 0$ から $S(t_b - \Delta t) < S(t_b) = 0$ なので、 $(p(t_a - \Delta t), S(t_a - \Delta t)) \in \bar{Q}_A \cup \bar{Q}_B$ に矛盾する。従って、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は境界 $\partial \Gamma_0$ の一部であ

る直線 $S = 0$ に達することは出来ない。

Q. E. D.

命題2から命題5により、(4)式の自励系において初期値が $(p_0, S_0) \in Q$ かつ $p_0 > C'(0)$ を満たす任意の軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は、 $t \rightarrow \infty$ で固定点 $(C'(0), 0)$ に収束することが証明できた。

6. 軌跡の接ベクトルの符号変化についての命題

本節では、 $t \rightarrow \infty$ で (4) 式の軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の接ベクトル $(\frac{dp}{dt}, \frac{dS}{dt})$ の符号がどのように変化するかを一連の命題で調べる。この問題は、(3) 式のKM方程式の $\frac{dS}{dp}$ の符号が区間 $[C'(0), p_0]$ においてどのように変化するかという問題と同値である。我々は命題6と命題7を利用して、符号変化を記述する命題8を証明する。

命題6 (4) 式の軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が、第一象限 Q において等傾線 $\sigma(p) f_1(p, S) = 0$ に $t \rightarrow t_d$ で到達し、 $(p(t_d), S(t_d)) \neq (C'(0), 0)$ と仮定する⁸。この時、

(a) $\frac{\partial}{\partial p} \sigma(p(t_d)) f_1(p(t_d), S(t_d)) < 0$ の場合、 $S''(p(t_d)) > 0$ である。従って、十分小さな $\Delta p > 0$ について、 $S'(p(t_d) + \Delta p) > 0$ および $S'(p(t_d) - \Delta p) < 0$ である。

(b) $\frac{\partial}{\partial p} \sigma(p(t_d)) f_1(p(t_d), S(t_d)) > 0$ の場合、 $S''(p(t_d)) < 0$ である。従って、十分小さな $\Delta p > 0$ について、 $S'(p(t_d) + \Delta p) < 0$ および $S'(p(t_d) - \Delta p) > 0$ である。

⁸ $p > C'(0) = 0$ なので、 $\sigma(p) f_1(p, S)$ は p で偏微分可能である。

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する供給関数均衡解の軌跡について

証明 (4) 式を p で微分して、 $\sigma(p(t_d))f_1(p(t_d), S(t_d)) = 0$ を用いると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \sigma(p(t_d))f_1(p(t_d), S(t_d)) = \\ & \sigma(p(t_d)) [D_p(p(t_d)) + (p(t_d) - C'(S(t_d)))D_{pp}(p(t_d))] \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。(3) 式を p で微分すると、 $S(p)$ の二階微分が得られる。

$$\frac{d^2 S}{dp^2} = \frac{S'(p)(p - C'(S)) - S(p)(1 - C''(S)S'(p))}{(p - C'(S))^2} + D_{pp} \quad (8)$$

等傾線 $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ では $S'(p(t_d)) = 0$ であること、および (7) 式を用いると、(8) 式は次のようになり、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dp^2} S(p(t_d)) &= \frac{[D_p(p(t_d)) + (p(t_d) - C'(S(t_d)))D_{pp}(p(t_d))]}{(p(t_d) - C'(S(t_d)))} \\ &= \frac{-1}{\sigma(p(t_d)) [p(t_d) - C'(S(t_d))]} \frac{\partial}{\partial p} f_1(p(t_d), S(t_d)) \end{aligned}$$

$p(t_d) > C'(S(t_d))$ および $\sigma(p(t_d)) > 0$ から、命題 6 が証明できる。

Q. E. D.

命題 7 においては、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が $\frac{\partial}{\partial p} \sigma(p(t_d))f_1(p(t_d), S(t_d)) = 0$ を満たす点 $(p(t_d), S(t_d))$ において、等傾線に到達する場合のふるまいを述べる。記述の簡略化のために、 $(p(t), S(t)) \neq (C'(0), 0)$ の場合、等傾線 $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ と実質的に同じ曲線である $f_1(p, S) = 0$ を等傾線として用いる。また、 $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p(t_d), S(t_d)) = 0$ の場合、十分小さな近傍をとれば、 $p = (p(t_d) の δ 除外近傍 (a deleted δ -neighborhood)⁹ において $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p,$$

⁹ $p = p(t_d)$ を除いた近傍である。 δ は近傍の大きさを示す。

$S(t_d)$ が定符号であるという仮定を追加する¹⁰。

命題7 (4) 式の解 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が、第一象限 Q で等傾線 $f_1(p, S) = 0$ に $t \rightarrow t_d$ で到達し、 $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p(t_d), S(t_d)) = 0$ かつ $(p(t_d), S(t_d)) \neq (C'(0), 0)$ と仮定する。

(a) $p = p(t_d)$ の右からの δ 除外近傍において $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p, S(t_d)) < 0$ であれば、十分小さな $\Delta p > 0$ について $S'(p(t_d) + \Delta p) > 0$ である。左からの δ 除外近傍において $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p, S(t_d)) < 0$ であれば、 $S'(p(t_d) + \Delta p) < 0$ である。

(b) $p = p(t_d)$ の右からの δ 除外近傍において $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p, S(t_d)) < 0$ であれば、十分小さな $\Delta p > 0$ について $S'(p(t_d) + \Delta p) < 0$ である。左からの δ 除外近傍において $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p, S(t_d)) > 0$ であれば、 $S'(p(t_d) + \Delta p) > 0$ である。

証明 (a) $(p(t_d), S(t_d))$ を通る (4) 式の解 $\phi(t, (p_0, S_0)) = (p(t), S(t))$ について、閉球 $(p - p(t_d))^2 + (S - S(t_d))^2 \leq \delta$ で定義される閉領域 Ω_1 における $p \geq p(t_d)$ の軌跡を検討する。ここで δ は十分小さい正数である。領域 Ω_1 は領域 $\Omega_A \subset \Omega_A$ と領域 $\Omega_B \subset \Omega_B$ に分割でき、その境界は $f_1(p, S) = 0$ である。

背理法を用いる。いま、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が $t = t_0$ ($t_0 < t_d$) にて $S'(p) < 0$ である領域 Ω_A に入ると仮定する。領域 Ω_A の閉包では、 $\frac{dp}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS}{dt} < 0$ であり、等号は曲線 $f_1(p, S) = 0$ 上でのみ成立するので、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は有限時間 $t > t_0$ にて曲線 $f_1(p, S) = 0$ に到達する。いま、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が $t = t_1$ ($t_0 < t_1 < t_d$) において、 $(p(t_d), S(t_d))$ 以外の点で $f_1(p, S) = 0$ に到達すると仮定しよう。この時、命題6から $p(t_1)$ の右から

¹⁰ この仮定は、命題8で仮定するように $D(p, \varepsilon)$ と $C(S)$ が区分的に実解析関数であれば、満たされる。

の除外近傍で $S'(p) > 0$ が成り立ち、これは領域 Ω_A において $t_0 \leq t < t_1$ で $S'(p(t)) < 0$ に矛盾する。従って、領域 Ω_A で軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が区間 $t_0 \leq t \leq t_d$ で曲線 $f_1(p, S) = 0$ に到達するのは $t = t_d$ 、すなわち $(p(t_d), S(t_d))$ のみである。いま、領域 Ω_A における解 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の任意の点 (p_a, S_a) を考え、図3のように $\phi(t, (p_a, S_m)) = (p_M(t), S_M(t))$ は $S_a < S_m < S(t_d)$ を満たすものとする。

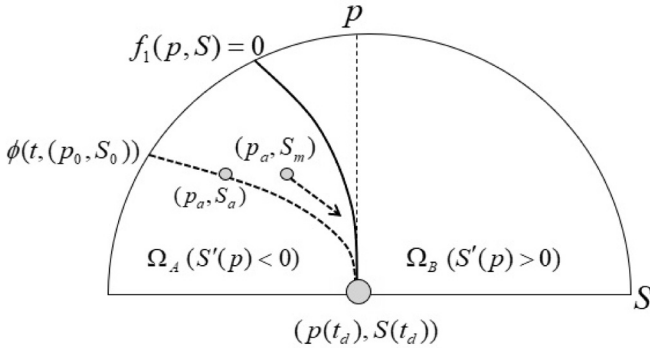


図3 領域 Ω_A における軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の背理法による検討

閉包 $\bar{\Omega}_A$ では、 $\frac{dp}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS}{dt} \geq 0$ であり、等号は曲線 $f_1(p, S) = 0$ 上でのみ成立するので、点 (p_a, S_m) は軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の上にはない。また、領域 Ω_1 には固定点は存在しない。これらから、軌跡 $\phi(t, (p_a, S_m))$ と軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は閉領域 $\bar{\Omega}_A$ の中では交差しない。 $p = p_a$ 、 $S = S_m$ 、 $f_1(p, S) = 0$ 、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ で囲まれた有界閉領域を Ω_m と表記しよう。軌跡 $\phi(t, (p_a, S_m))$ は領域 Ω_m で $\phi(t, (p_0, S_0))$ と交差しないので、 $\frac{dp_M}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS_M}{dt} > 0$ から、軌跡 $\phi(t, (p_a, S_m))$ は曲線 $f_1(p, S) = 0$ に有限時間 $t = t_2$ で $(p(t_d), S(t_d))$ 以外の点で到達する。再び、命題6から $p_M(t_2)$ の右からの除外近傍で $S'(p) > 0$ が成り立ち、これは領域 Ω_A において $0 \leq t < t_2$ で $S'(p_M(t)) < 0$ に矛盾する。これで背理法が成立し、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は、 $p(t_d)$ の右からの除外近傍では $S'(p) > 0$ となる領域 Ω_B を通過して、

$t \rightarrow t_d(-0)$ で $(p(t_d), S(t_d))$ に到達することが導かれる。

次に、 $t \geq t_d$ における軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ を検討する。この軌跡は、閉球 $(p - p(t_d))^2 + (S - S(t_d))^2 \leq \delta$ と $p \geq p(t_d)$ で定義される閉領域 Ω_2 で $(p(t_d), S(t_d))$ を通過する。 δ は十分小さい正数である。再び背理法を用いる。いま、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が $t = t_3 (t_3 > t_d)$ で領域 Ω_B に存在するものと仮定する。 $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p, S(t_d)) < 0$ から $S(t_3) > S(t_d)$ であり、更に閉包 $\overline{\Omega}_B$ で $\frac{dS}{dt} \leq 0$ で等号は曲線 $f_1(p, S) = 0$ 上のみであることから、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は領域 Ω_2 で $t < t_3$ において $(p(t_d), S(t_d))$ を通過できない。背理法が成立し、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は $t \rightarrow t_d(+0)$ に伴い、 $p(t_d)$ の左からの除外近傍では $S'(p) < 0$ が成立する。

(b)についても、(a)と同様な証明が適用可能である。 Q. E. D.

ここから、我々は $D(p, \varepsilon)$ および $C(S)$ が区分的に実解析関数¹¹であると仮定する。従って、曲線 $f_1(p, S) = 0$ の陰関数である $S = S_1(p)$ も区分的に実解析関数となり、 $S'_1(p) = 0$ の零点、すなわち $S_1(p)$ の極値点の候補はそれぞれ孤立点となる¹²。この事実から、命題7が $S_1(p)$ のあらゆる極大点もしくは極小点に適用可能となる。 $S_1(p)$ の極大点が少なくとも一つ存在するケース、すなわち $S_1(p)$ が単調増加関数ではないケースを考えよう¹³。 $S_1(p)$ は区分的に実解析関数なので、区間 $[C'(0), p_0]$ に有限個の極値点が存在する。 $p = p_k^M (k = 1, 2, 3 \dots, N)$ では $S_1(p)$ が極大値をとり、 $p = p_k^m (k = 1, 2, 3 \dots, N)$ では $S_1(p)$ が極小値をとると表記しよう。この時、

$$C'(0) < p_1^M < p_1^m < p_2^M < p_2^m < \dots < p_k^M < p_k^m < \dots < p_N^M < p_N^m$$

であり、 p_N^m が存在しない場合は p_N^M が $S_1(p)$ の最大の極値点となる。

命題8は初期値を $(p_0, S_0) \in \overline{\Omega}_A \cup \overline{\Omega}_B$ とする軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の接ベクトル

¹¹ 実解析関数とは、べき級数で表現できる実変数の関数である。

¹² その点の近傍において、 $S'_1(p) = 0$ の零点は当該点以外には存在しない。

¹³ $D_{pp}(p) \leq 0$ の場合、 $S_1(p)$ は単調増加関数である。

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する供給関数均衡解の軌跡について

ルが $t \rightarrow \infty$ に伴い、どのように変化するかを述べている。命題 8 の理解のためにあらためて注記すると、領域 Q_A では $\frac{dp}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS}{dt} > 0$ 、領域 Q_B では $\frac{dp}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS}{dt} < 0$ 、固定点 $(C'(0), 0)$ を除く等傾線 $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ の上では $\frac{dp}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS}{dt} = 0$ 、固定点 $(C'(0), 0)$ を除く等傾線 $\sigma(p)f_2(p, S) = 0$ の上では $\frac{dp}{dt} = 0$ かつ $\frac{dS}{dt} < 0$ である。

命題 8 $S_1(p)$ の極大点が少なくとも一つ存在すると仮定し、 $p \leq p_1^M$ 、 $\sigma(p)f_1(p, S) \leq 0$ 、 $\sigma(p)f_2(p, S) \leq 0$ で囲まれた有界閉領域を Γ_M と表記する (図 4)。第一象限 Q における (4) 式の軌跡を $\phi(t, (p_0, S_0)) = (p(t), S(t))$ とする。

(a) $t_1 \geq 0$ で $(p(t_1), S(t_1)) \in Q_A$ の場合、その軌跡は有限時間 $t = t_2$ ($t_2 > t_1$) で等傾線 $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ に到達する。 $(p(t_2) \in (C'(0), p_1^M)$ もしくは $p(t_2) \in [p_k^m, p_{k+1}^M]$ である。

(b) $t_1 \geq 0$ で $(p(t_1), S(t_1)) \in Q_B$ かつ $p(t_1) > p_1^M$ の場合、その軌跡は有限時間 $t = t_2$ ($t_2 > t_1$) で、 $p(t_2) \in [p_k^M, p_k^m]$ を満たして等傾線 $\sigma(p)f_1(p, S) = 0$ に到達するか、もしくは領域 Q_B から直線 $p = p_1^M$ に到達する。

(c) $t_1 \geq 0$ で $f_1(p(t_1), S(t_1)) = 0$ であり、 $p(t_1) > C'(S(t_1))$ かつ $p(t_1) \in (p_k^m, p_{k+1}^M]$ を満たす場合は、その軌跡は t が増加するにつれて領域 Q_B に入る。

$t_1 \geq 0$ で $f_1(p(t_1), S(t_1)) = 0$ であり、 $p(t_1) > C'(S(t_1))$ かつ $p(t_1) \in [p_k^M, p_k^m]$ を満たす場合は、その軌跡は t が増加するにつれて領域 Q_A に入る。

(d) $t_1 \geq 0$ で $(p(t_1), S(t_1)) \in \Gamma_M$ である場合、その軌跡は $t \rightarrow \infty$ に伴い、固定点 $(C'(0), 0)$ に収束する。

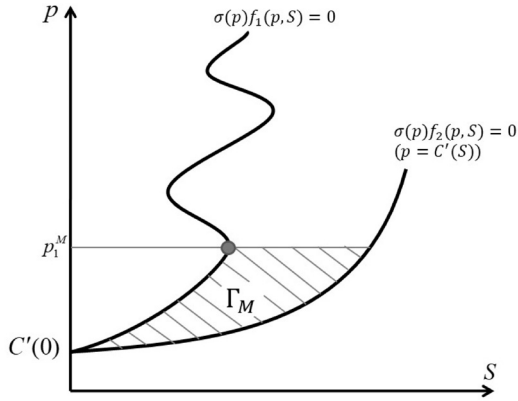


図4 有界閉領域 Γ_M

証明 (a) $p \leq p(t_1)$ 、 $S \geq S(t_1)$ 、 $f_1(p, S) \geq 0$ で囲まれた有界閉領域を考える。

$\frac{dp}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS}{dt} \geq 0$ (等号は曲線 $f_1(p, S) = 0$) から、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は有限時間 $t = t_2$ ($t_2 > t_1$) で、曲線 $f_1(p, S) = 0$ に到達する。いま、 $p(t_2) \in [p_k^M, p_k^m]$ と仮定しよう。 $p(t_2)$ の右からの除外近傍について $\frac{dS_1(p)}{dp} < 0$ であり、陰関数定理から $p(t_2)$ の同じ近傍で $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p, S(t_d)) < 0$ である。十分小さな $\Delta t > 0$ に対して、 $S'(p(t_2 - \Delta t)) = S'(p(t_2) + \Delta p) < 0$ が成立するが、これは命題6と命題7の $S'(p(t_2) + \Delta p) > 0$ に矛盾する。従って、 $p(t_2) \in (C'(0), p_1^M)$ もしくは $p(t_2) \in [p_k^m, p_{k+1}^M)$ が成立する。

(b) $p \leq p(t_1)$ 、 $p \geq p_1^M$ 、 $S \leq S(t_1)$ 、 $f_1(p, S) \leq 0$ によって囲まれた有界閉領域を考える。 $\frac{dp}{dt} < 0$ かつ $\frac{dS}{dt} \leq 0$ (等号は曲線 $f_1(p, S) = 0$) から、軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ は有限時間 $t = t_2$ ($t_2 > t_1$) で、曲線 $f_1(p, S) = 0$ または直線 $p = p_1^M$ に到達する。軌跡が曲線 $f_1(p, S) = 0$ に到達する場合、 $p(t_2) \in (C'(0), p_1^M)$ もしくは $p(t_2) \in [p_k^m, p_{k+1}^M)$ と仮定しよう。この時、 $p(t_2)$ の右からの除外近傍について $\frac{dS_1(p)}{dp} > 0$ であり、陰関数定理から $p(t_2)$ の同じ近傍

二階微分の符号制約なしの需要関数に対応する供給関数均衡解の軌跡について

で $\frac{\partial}{\partial p} f_1(p, S(t_d)) > 0$ である。十分小さな $\Delta t > 0$ に対して $S'(p(t_2 - \Delta t)) = S'(p(t_2) + \Delta p) > 0$ であるが、これは命題 6 と命題 7 の $S'(p(t_2) + \Delta p) < 0$ に矛盾する。従って、 $p(t_2) \in [p_k^M, p_k^m]$ ($k \leq N$ は自然数)、もしくは軌跡が直線 $p = p_1^M$ に到達する。

(c) $p(t_1) \in (p_k^m, p_{k+1}^M]$ の場合、 $p(t_1)$ の左からの除外近傍について $\frac{dS_1(p)}{dp} > 0$ である。従って、命題 6 と命題 7 から $S'(p(t_1 + \Delta t)) = S'(p(t_1) - \Delta p) < 0$ であり、これは軌跡が領域 Q_B に入ることを示している。

$p(t_1) \in [p_k^M, p_k^m)$ の場合、 $p(t_1)$ の左からの除外近傍について $\frac{dS_1(p)}{dp} < 0$ である。従って、命題 6 と命題 7 から $S'(p(t_1 + \Delta t)) = S'(p(t_1) - \Delta p) > 0$ であり、これは軌跡が領域 Q_A に入ることを示している。

(d) $(p_1, S_1) \in \partial \Gamma_M$ を満たすあらゆる軌跡 $\phi(t, (p_1, S_1))$ は、領域 Γ_M または境界 $\partial \Gamma_M$ の一部に存在し、領域 Γ_M は自励系 (4) 式の正の不変集合であることが命題 3 と同様に証明することができる。補題において $D_C \equiv \Gamma_M$ 、 $V(p, S) \equiv p - C'(0)$ とおくことにより、 $t \rightarrow \infty$ に伴い、軌跡は固定点 $(C'(0), 0)$ に収束することが命題 4 と同様に証明することができる。

Q. E. D.

今や我々は、固定点 $(C'(0), 0)$ に収束する軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ が、等傾線 $f_1(p, S) = 0$ を横断したり、接したりするごとに接ベクトルの符号を変える様子を命題 8 から描くことができる (図 5)。

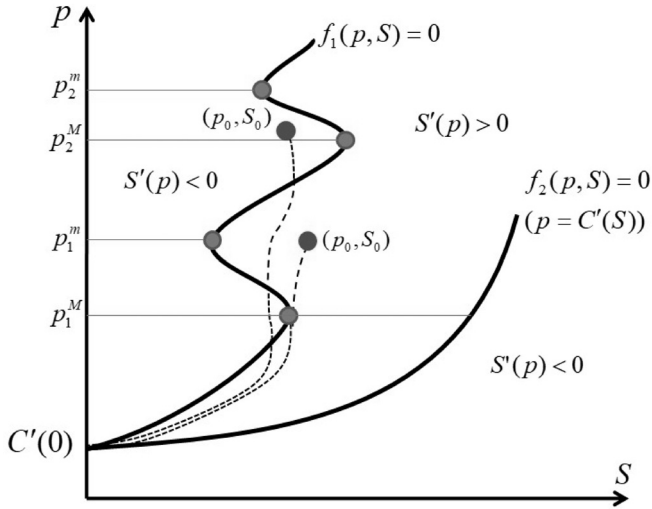


図5 軌跡 $\phi(t, (p_0, S_0))$ の接ベクトルの符号変化

7. おわりに

本論文では、需要関数の価格についての二階微分値の符号に仮定を設けない場合を検討し、対称型SFEの一階条件を満たす解の軌跡に関する八つの命題を自励系の形式で証明した。八つの命題から、第一に解の軌跡が調整した原点に収束することを厳密に示し、第二に解の軌跡が原点に収束する過程において、その傾きの符号をどのように変えるのか記述することが出来た。これらの結果は、需要関数の価格の二階微分値の符号が非負の場合の証明と比べ、リヤプノフ関数的な手法や微妙な平面解析的な手法を使用するので、多くの命題を積み重ねて証明する必要があった。今後は、これらの軌跡群の中から、その傾きが非負である解を取り出す予定である。

参考文献

- [1] Paul Klemperer and Margaret Meyer : Supply Function Equilibria in Oligopoly Under Uncertainty, *Econometrica*, Vol.57, No.6, pp.1243-1277, 1989.
- [2] Richard Green and David M Newbery : Competition in the British Electricity Spot Market. *Journal of Political Economy*, Vol. 100, No.6, pp.929-53, 1992.
- [3] 松田年弘 : 需給曲線モデルに基づく電力市場の価格リスク評価に関する研究, 京都大学大学院エネルギー科学研究科博士論文, 2003.
- [4] M. McManus : Numbers and Size in Cournot Oligopoly , *Bulletin of Economic Research Bulletin of Economic Research*, Vol.14, Issue 1, pp.14-22, 1962.
- [5] Andrew F. Daughety, ed. : *Cournot oligopoly*. Cambridge University Press, Cambridge. 1988.
- [6] 松田年弘 : 供給関数均衡解の利潤最大化二階条件の証明, *追手門経済論集*, 56巻1号, pp.1-15, 2021.
- [7] 石村隆一、岡田靖則、日野義之 : *微分方程式*, 牧野書店, 1995.