

需要システムにおける関数形を選択

—— 日本の場合 ——

小 椋 真奈美

概 要

本稿は、日本の需要システムを推定するにあたってどのような関数形が適切であるかを明らかにするものである。Barten (1993) などの先行研究に従って、Rotterdam モデル、AIDS モデル、CBS モデル、NBR モデルの4つ関数形を分析対象とした。選択基準として、Barten (1993) によって提唱された非入れ子型仮説における検定を用いた。さらに、効用最大化行動に基づいた同次性や対称性などの需要理論の当てはまりについても比較を行った。これらの検定の結果として、4つの関数形の中からAIDSモデルがデータを説明する上で最も適切であると判断された。

Key words: Demand systems; Choice of functional form; Non-nested hypothesis testing

1. は じ め に

需要分析は、家計の消費行動や選好がどのような関数形であるかを明らかにするノンパラメトリック・アプローチと、関数形を特定化して推定を行うパラメトリック・アプローチに大別される。需要理論の検証が可能であることから、多くの研究ではパラメトリック・アプローチを用いる場合が一般的である。しかし、パラメトリック・アプローチはどの関数形を選択するかによって目的となる分析結果が異なる可能性がある。つまり、正

確に分析を行うには関数形が正しく特定化されていることが重要となる。そこで、本稿では日本の多品目支出データを推定するにはどの関数形を選択すべきか、また関数形の違いが検定結果にどのような影響を与えるのかという点に着目した。

関数形の選択に関する先行研究は、Barten (1993)、Duffy (2001) などが存在する。これらの先行研究では、Barten (1964)、Theil (1965) による Rotterdam モデル、Deaton and Muellbauer (1980) による Almost Ideal Demand System (AIDS) モデル、Keller and van Driel (1985) による Central Bureau of Statistics (CBS) モデル、Neves (1987) による Natinal Bureau of Research (NBR) モデルの 4 つの需要関数の比較が行われた。特に、Barten (1993) は関数形選択における仮説検定を提唱した¹⁾。この検定は比較対象となる各モデルのデータに対する当てはまりを統計的に判断するものである。Barten (1993) の検定は Duffy (2001) の中でも関数形を選択する基準の一つとして用いられている。また、Duffy (2001) は価格項と所得を説明変数とする通常の需要モデルに各財の広告効果を表す広告変数を加えた拡張型モデルを使用し、関数形選択を行った。検定結果から、4 つの関数形の中で AIDS モデルが UK の消費者行動を説明するのに適切なモデルであるという結論を得ている。

また、関数形を正しく特定化するにはモデルの所得、価格変数の扱いにも注意しなければならない。多くの場合、推定を行う際に所得、価格項を外生変数として扱い、推定量は一致性を満たすことを仮定してきた。しかし、厳密にはこれら変数の外生性を検定し、その上で判断することが必要である。この問題を無視することによって、関数形の特定化の誤りを引き起こす可能性が生じる。説明変数が方程式の誤差項と相関を持ち、内生変数と判断された場合には、推定量の一致性が満たされず、適切な操作変数

1) Barten (1993) の検定の詳細に関しては第 5 節で説明を行っている。

を用いた推定が必要となる．Attfield（1991）は説明変数が内生である場合，パラメータに線形制約を課すことにより全ての説明変数が外生であるシステムに変換する方法²⁾を提案し，さらに通常の重回帰で推定が可能であることを示した．また Attfield（1985, 1991）は，同次性制約の棄却と内生性の問題が同義であることを示した³⁾．需要理論と変数の内生性の問題に関して，Pitarakis and Tridimas（1999）においても，同次性や対称性の棄却が所得変数の内生性を考慮しないことにより生じることが指摘された．これらの内生性の問題については補論の中で詳しく説明を行う．

本稿の構成は次のとおりである．第2節では分析目的の対象となる4つの需要関数を説明し，第3節では分析に使用されるデータの詳細を述べる．第4，5節では分析の内容についての詳細や，日本の支出データを用いて推定や検定を行った結果を記載している．最後に，第6節では推定や検定から得られた本稿での結論について述べる．

2. モデル

モデルを紹介する前に，一般的な需要関数を導く方法について述べておく．第 i 財の消費支出を q_i とすると，個人の消費行動は以下のような効用関数 u によって表されると仮定する．

$$u(\mathbf{q}) = u(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

また，消費者は自らの効用を最大化する特定の財バスケットを選択すると

2) 操作変数を用いた推定の際に，識別性の条件として価格パラメータへの同次性制約を使用する．

3) Attfield（1985）は所得変数を外生と仮定した場合の推定結果と説明変数を価格変数のみで表す場合の結果を比較することによって，所得変数の外生性が棄却されることを示し，所得変数を暗黙に外生と仮定することが，同次性制約が棄却されてきた要因であることを指摘した．

仮定すると、予算制約は

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i = x \quad (2)$$

となる。 p_i は第 i 財の価格であり、 x は名目所得 (=総支出額)⁴⁾ を示す。この予算制約はマーシャル需要関数 $q_i = f_i(x, p_1, \dots, p_n)$ と呼ばれる通常の需要関数を導く。近年、Deaton and Muellbauer (1980) の AIDS モデルや Theil (1965) の Rotterdam モデルなどが代表的な需要システムとして実証分析に多く利用されている。これらのモデルは任意の需要関数の 1 階の近似と考えるのに十分なパラメータを含んでおり、需要理論 (加法性, 同次性, 対称性) をパラメータの線形制約として表し、検証することができる。

2.1 ロッテルダムモデル

はじめに、Barten (1964), Theil (1965) によって提唱された Rotterdam モデルを紹介する。Rotterdam モデルは元来から需要理論を検証できるかたちで定式化された関数形である。すなわち、マーシャル需要関数を特定化し、これを全微分することにより導出された。Rotterdam モデルは以下のように表される。

$$\bar{w}_i dq_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \pi_{ij} d \ln p_{jt} + \theta_i d \ln Q_t + u_{it}, \quad (3)$$

ここで、 w_{it} を t 期における第 i 財の支出シェア、 p_{it} を t 期における第 i 財の価格、 x_t を総支出とすると、 $\bar{w}_i$ には微分の差分近似として移動平均 $\bar{w}_i = (w_{it} + w_{it-1})/2$ が用いられ、価格と所得変数に関しても差分近似 $d \ln p_{it} = \ln p_{it} - \ln p_{it-1}$ 、 $d \ln Q_t = d \ln x_t - d \ln P_t$ で代用される⁵⁾。また、 $d \ln P_t =$

4) 各財の支出額は内生変数と扱われており、各財の支出額の和として表される総支出額 (ここでは総支出=所得) x も内生変数である可能性があるのではないかという指摘がある。

5) Rotterdam モデルは本来変数が微分形で表された微分需要体系であるが、微分形のままでは推定できないため差分形で近似したモデルに変換される。

$\sum w_{jt} d \ln p_{jt}$ は差分形の Divisia 価格指数である。Rotterdam モデルは、通常所得変数と価格項のみで説明され、定数項は存在しないが、実際の分析には嗜好の変化を表すパラメータとして定数項が加えられることが多い。本稿でもトレンドを示すパラメータとして定数項を加えて推定を行う。さらに、Rotterdam モデルでは次のような加法性、同次性、対称性⁶⁾が検定可能である。なお、加法性は自動的に満たされるため検定を行う必要はない。

加法性： $\sum_i \theta_i = 1, \sum_i \pi_{ij} = 0$

同次性： $\sum_j \pi_{ij} = 0$

対称性： $\pi_{ij} = \pi_{ji}$

2.2 AIDS モデル

次に、Deaton and Muellbauer (1980) の AIDS モデルを紹介する。AIDS モデルは家計間の集計問題に配慮した PIGLOG (Price Independence Generalized LOGarithmic)⁷⁾ 型の費用関数から導出されている。このため、一般的にマイクロデータの使用が困難である現状において、代表的家計の行動を考える上で家計間の集計問題を大きく解決している。AIDS モデルは以下のように表される。

$$w_{it} = a_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} \ln p_{jt} + c_i \ln Q_t + u_{it}, \quad (4)$$

ここで、 $\ln Q_t = \ln x_t - \ln P_t$, $\ln P_t = \sum w_{it} \ln p_{it}$ とする⁸⁾。AIDS モデルは支出

6) Rotterdam モデルは加法性、同次性、対称性に加えて、負値性も検定可能であるが、本稿では扱わないため説明は省略する。

7) 代表的家計の支出水準が価格と独立で、支出分布のみの関数となる場合、相対価格が変化しても代表家計の所得水準は変化しない。この下では整合的な集計が可能である。

8) 本来ならば、デフレータの総合価格指数はトランスログ型の非線形指数となるが、本稿では実際の推定には AIDS モデルの 1 階差分で表すモデルを使

シェアの変化を所得変数と価格項そして定数項で説明する方程式体系となっている。また、このモデルは Rotterdam モデルと同様に加法性、同次性、対称性の需要理論を満たす。しかしながら、負値性に関しては満たされるかどうかは保証されない。

加法性： $\sum_i a_i = 1, \sum_i b_i = 0, \sum_i c_{ij} = 0$

同次性： $\sum_j c_{ij} = 0$

対称性： $c_{ij} = c_{ji}$

本稿では関数形選択に関する検定を行うため、Rotterdam モデルと説明変数を揃える必要がある。(4) 式の AIDS モデルを 1 階差分で表し、さらに定数項を加えると、

$$dw_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} d \ln p_{jt} + \beta_i d \ln Q_t + u_{it}, \quad (5)$$

また、 $dw_{it} = w_{it} - w_{it-1}$ である。この差分形の AIDS モデルは Rotterdam モデルと比べると、説明変数は同じであるが、左辺の従属変数が異なることによって違いが生じている。

2.3 CBS モデル

Rotterdam モデルと同様に微分需要体系に含まれる CBS モデル (Keller and van Driel, 1985) は AIDS モデルの所得パラメータ β_i と Rotterdam モデルの価格パラメータ π_{ij} を持つ混合型モデルである。

$$w_i(dq_{it} - d \ln Q_t) = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \pi_{ij} d \ln P_{jt} + \beta_i d \ln Q_t + u_{it}, \quad (6)$$

用し比較を行うため、他のモデルと説明変数を一致させる必要があり、Stone (1954) の線形近似価格指数を用いている。これは、1 階差分モデルにおいて差分型の Divisia 指数に一致させている。

微分需要体系ではあるが，実際の推定には差分近似によって代用される．
このモデルは Rotterdam モデルと同様に加法性，同次性，対称性，負値性のいずれの制約も満たす．つまり，加法性は $\sum_i \beta_i = 0$ ， $\sum_i \pi_{ij} = 0$ ，同次性は $\sum_j \pi_{ij} = 0$ ，対称性は $\pi_{ij} = \pi_{ji}$ である．

2.4 NBR モデル

NBR モデル (Neves, 1987) は CBS モデルとは逆に AIDS モデルの価格パラメータ γ_{ij} と Rotterdam モデルの所得パラメータ θ_i を持つ混合型の微分需要体系モデルである．

$$dw_i + w_i d \ln Q_t = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} d \ln p_{jt} + \theta_i d \ln Q_t + u_{it}, \quad (7)$$

NBR モデルは AIDS モデルと同様に加法性，同次性，対称性の需要理論を満たす．加法性は $\sum_i \theta_i = 1$ ， $\sum_i \gamma_{ij} = 0$ ，同次性は $\sum_j \gamma_{ij} = 0$ ，対称性は $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ である．またこのモデルは AIDS モデルと同様に負値性が満たされるかどうかは保証されない．

さらにこれら 4 つの関数形の所得や価格パラメータから所得弾力性，価格弾力性が計算されるが，これらの公式はそれぞれの関数形により異なる．各モデルの価格・所得弾力性の公式に関しては下記の表 1 に記載している．

表 1 所得・価格弾力性の公式

モデル	所得弾力性	価格弾力性
Rotterdam	$\frac{\theta_i}{w_i}$	$\frac{\pi_{ij} - \theta_i w_j}{w_i}$
AIDS	$1 + \frac{\beta_i}{w_i}$	$-\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij} - \beta_i w_j}{w_i}$
CBS	$1 + \frac{\beta_i}{w_i}$	$\frac{\pi_{ij} - (\beta_i + w_i) w_j}{w_i}$
NBR	$\frac{\theta_i}{w_i}$	$-\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij} + w_i w_j - \beta_i w_j}{w_i}$

3. データ

本稿の推計に用いられたデータは、総務省統計局『家計調査』「全世帯一
世帯あたり年平均1ヶ月の支出」（全国、農林漁家世帯を除く）の1980年第
一四半期から2004年第四四半期までの四半期データである。消費支出
データは、食料、住居、光熱、家事用品、被服、保健医療、交通通信、教
育、教養娯楽、その他の10費目を、(1)食料、(2)住居、(3)光熱、(4)被服、
(5)雑費の5費目に加工したものを用いた。価格データは消費者物価指数
の中分類指数（全国、年平均）より用い、2000年を基準年とした。また推
定の際には各年の第一四半期から第三四半期までを季節ダミーにより、原
系列の季節性を調整した。

4. 関数形の選択について

本稿の目的は、どの関数形が日本の支出データを推定するのに適切であ
るかを調査することである。Barten（1993）は関数形選択を行うための仮
説検定を提唱した。これは、第2節で紹介された4つの需要関数のうちど
のモデルがもっともデータに対する当てはまりがよいかを比較検討するも
のである。まず、各モデルを次のように

$$\mathbf{y}_{jt} = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{u}_{jt}, \quad j = \text{ROT, AID, CBS, NBR.} \quad (8)$$

と表すとする。左辺の従属変数 $\mathbf{y}_j$ (n ベクトル) は各モデル間で異なっ
ており、 $\mathbf{X}$ ($(n \times k)$ 行列) は外生変数で構成される行列を示している。
Barten（1993）は4つの需要システムのスカラー結合を考慮し、4つの各
システムの能力を評価できるような合成モデルを取り入れた。4つのシス
テムの線形結合は次のように表わされる。

$$\alpha_{ROT} \mathbf{y}_{ROT,t} + \alpha_{AID} \mathbf{y}_{AID,t} + \alpha_{CBS} \mathbf{y}_{CBS,t} + \alpha_{NBR} \mathbf{y}_{NBR,t} = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\gamma} + \nu_t \quad (9)$$

ここで、 ν_t は誤差項ベクトル、 $\boldsymbol{\alpha}$ はスカラーである。この式から導かれた合成モデルは最終的に次のように表される⁹⁾。

$$\mathbf{y}_{ROT,t} = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\gamma} + \delta_1 (\mathbf{y}_{ROT,t} - \mathbf{y}_{CBS,t}) + \delta_2 (\mathbf{y}_{ROT,t} - \mathbf{y}_{NBR,t}) + \nu_t \quad (10)$$

また、 $\delta_1 = (\alpha_{CBS} + \alpha_{AID})$ 、 $\delta_2 = (\alpha_{AID} + \alpha_{NBR})$ とする。ここで、 $\hat{\delta}_1$ 、 $\hat{\delta}_2$ は推定可能であるが、 α は識別することができない。 δ_1 は Rotterdam モデルと CBS モデルの差を表す係数であり、すなわち Rotterdam モデルと AIDS モデルの所得係数の差を表している。 δ_2 は Rotterdam モデルと NBR モデルの差に関係した係数であり、Rotterdam モデルと AIDS モデルの価格係数の差を表している。ここで、(10) 式の係数が $\delta_1 = \delta_2 = 0$ であるならば、データを説明するのにもっとも相応しい関数形は Rotterdam モデルとなる。また、 δ_1 と δ_2 の両方もしくはどちらか一方が非ゼロであるならば、Rotterdam モデルはデータを十分に説明しているとはいえないと考える。加えて、(10) 式の合成モデルにおいて $\delta_1 = \delta_2 = 1$ の仮説が棄却されない場合、AIDS モデルが選択される。また、 $\delta_1 = 1$ 、 $\delta_2 = 0$ の仮説が棄却されない場合、AIDS モデルタイプの所得パラメータと Rotterdam タイプの価格パラメータが好まれると考えられる。つまり、両方のパラ

9) α_i の和を 1 にすることによって正規化を行う。 α_{ROT} を削除するため、 $\alpha_{ROT} = 1 - \alpha_{AID} - \alpha_{CBS} - \alpha_{NBR}$ を (9) 式に代入すると、

$$\alpha_{ROT} \mathbf{y}_{ROT} + \alpha_{AID} \mathbf{y}_{AID} + \alpha_{CBS} \mathbf{y}_{CBS} + \alpha_{NBR} \mathbf{y}_{NBR} = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\gamma} + \alpha_{AID} (\mathbf{y}_{ROT} - \mathbf{y}_{AID}) + \alpha_{CBS} (\mathbf{y}_{ROT} - \mathbf{y}_{CBS}) + \alpha_{NBR} (\mathbf{y}_{ROT} - \mathbf{y}_{NBR}) + \nu_i$$

しかしこの式は右辺の変数が線形従属であるため推定できない。そこで各システムの従属変数がモデルごとに異なることから、以下の関係を利用する。

$$(\mathbf{y}_{ROT} - \mathbf{y}_{CBS}) - (\mathbf{y}_{ROT} - \mathbf{y}_{AID}) - (\mathbf{y}_{ROT} - \mathbf{y}_{NBR}) = 0$$

この式は上式の次数を減らすために用いられる。よって、上式は (10) 式のように書き直すことができる。

需要システムにおける関数形の選択

メータを持つ CBS モデルが選択される。一方、 $\delta_1=0$, $\delta_2=1$ の仮説が棄却されない場合、Rotterdam タイプの所得パラメータと AIDS モデルタイプの価格パラメータを持つ NBR システムが好ましいモデルとなる。さらに、Barten (1993) ではこれらの係数に対する仮説の検証と同様に、(10) 式と各 4 つの需要関数を比較した尤度比検定を行っている。尤度比検定では、各 4 つの需要関数を帰無仮説、(10) 式を対立仮説として対数尤度を比較している。これらの関数形選択の検定結果は第 5 節で述べられる。

表 2 4 つの需要システムの推定結果

		価格						
	定数項	食品	住居	光熱	被服	雜費	所得	R ²
ROT								
食品	0.0086 (3.7356)	− 0.0167 (− 0.4550)	0.0311 (0.6675)	− 0.0242 (− 0.7000)	− 0.1200 (− 3.8642)	0.1026 (1.6336)	0.2155 (10.1825)	0.9786
住居	− 0.0007 (− 2.0623)		− 0.0185 (− 2.2314)	− 0.0065 (− 1.1299)	0.0177 (3.5017)	0.0122 (1.1316)	0.0049 (1.3843)	0.1979
光熱	− 0.0025 (− 1.3667)			0.0907 (2.8988)	0.0531 (2.7607)	− 0.2136 (− 4.8447)	0.0796 (4.5790)	0.9335
被服	0.0062 (3.5781)				− 0.0381 (− 1.6341)	0.0067 (0.1791)	0.1858 (12.3187)	0.9577
AID								
食品	0.0124 (4.9982)	0.2193 (5.4274)	0.0475 (0.8954)	− 0.0665 (− 1.9012)	− 0.1943 (− 6.2022)	0.0141 (0.2017)	− 0.0629 (− 2.7097)	0.9535
住居	− 0.0023 (− 0.9177)		− 0.0254 (− 0.4223)	0.0066 (0.2185)	0.1448 (5.2654)	− 0.1618 (− 2.1421)	− 0.0699 (− 2.7555)	0.9443
光熱	− 0.0008 (− 0.4573)			0.1466 (4.8850)	0.0312 (1.6447)	− 0.2529 (− 5.0899)	0.0059 (0.3386)	0.9372
被服	0.0086 (4.9175)				− 0.0216 (− 0.9083)	− 0.1051 (− 2.5055)	0.1005 (6.4617)	0.9578
CBS								
食品	0.0116 (4.6268)	0.0018 (0.0521)	0.0122 (0.2631)	0.0021 (0.1182)	− 0.1560 (− 5.1100)	0.1372 (2.1630)	− 0.0627 (− 2.8900)	0.9637
住居	− 0.0015 (− 3.0606)		− 0.0274 (− 2.8228)	0.0074 (2.0471)	0.0305 (4.9441)	− 0.0044 (− 0.3386)	− 0.0864 (− 19.5862)	0.9799
光熱	0.0004 (0.2340)			0.0546 (3.5698)	0.0139 (1.1858)	− 0.1933 (− 4.9077)	0.0036 (0.2184)	0.9398
被服	0.0074 (4.5038)				− 0.0209 (− 0.9498)	− 0.0176 (− 0.4842)	0.1207 (8.3622)	0.9425

需要システムにおける関数形の選択

NBR

食品	0.0096 (3.9055)	0.1598 (4.7765)	0.0711 (1.4085)	- 0.0258 (- 1.4110)	- 0.1680 (- 5.4255)	- 0.0521 (- 0.7829)	0.2186 (9.5775)	0.9736
住居	- 0.0027 (- 1.0819)		- 0.0229 (- 0.4040)	- 0.0007 (- 0.0377)	0.1583 (5.8113)	- 0.1703 (- 2.3379)	0.0208 (0.8343)	0.9521
光熱	- 0.0008 (- 0.5005)			0.1267 (8.0963)	0.0135 (1.0744)	- 0.2107 (- 4.8704)	0.0788 (4.4827)	0.9340
被服	0.0078 (4.2166)				- 0.0193 (- 0.7815)	- 0.1173 (- 2.7062)	0.1725 (10.5895)	0.9678

注：表の推定結果は、同次性と対称性が課されたものである。なお、加法性は自動的に満たされる。括弧内は t 値を示す。

表 3 所得・価格弾力性

モデル		価格弾力性					所得弾力性
		食品	住居	光熱	被服	雑費	
ROT	食品	- 0.0602	0.0389	- 0.1452	- 0.5103	- 0.0303	0.8229
	住居	0.0026	- 0.1949	- 0.0699	0.1794	0.0995	0.0500
	光熱	0.7627	0.3984	1.3308	0.7482	- 3.9579	1.2378
	被服	- 1.2313	2.4864	0.2307	- 0.7881	- 1.4008	2.9359
	雑費	- 0.4239	- 0.5292	- 0.2332	0.1065	- 0.3346	1.0020
AID	食品	- 0.0998	0.2049	- 0.2384	- 0.7268	0.1769	0.7598
	住居	0.6058	- 1.1911	0.1139	1.5337	- 1.2943	0.2812
	光熱	0.9152	0.3714	1.2739	0.4787	- 3.9803	1.0923
	被服	- 1.1489	2.5159	0.1937	- 1.4415	- 2.4746	2.5883
	雑費	- 0.5473	- 0.4253	- 0.2087	0.0746	- 0.0408	1.0514
CBS	食品	- 0.0365	- 0.0276	- 0.0408	- 0.6439	0.1335	0.7607
	住居	0.0455	- 0.2935	0.0691	0.3061	- 0.1038	0.1125
	光熱	1.2137	0.1614	0.7809	0.1498	- 3.5484	1.0571
	被服	- 0.9258	2.2121	0.0162	- 0.5152	- 1.7699	2.9072
	雑費	- 0.5382	- 0.4130	- 0.2174	0.1920	- 0.3854	1.0479
NBR	食品	- 0.1566	0.2875	- 0.0878	- 0.6310	- 0.1141	0.8347
	住居	0.5632	- 1.1595	0.0434	1.6767	- 1.3466	0.2137
	光熱	0.6885	0.4603	0.9589	0.1951	- 3.3929	1.2262
	被服	- 1.2017	2.9137	- 0.0012	- 1.4148	- 2.7381	2.7254
	雑費	- 0.4754	- 0.5336	- 0.2088	0.0308	0.0765	0.9925

表 4 需要理論の検証

帰無仮説	ROT	AIDS	CBS	NBR	CV
同次性 (4)	61.811	13.981	72.101	17.593	13.277
対称性 (6)	29.458	13.483	28.309	16.027	16.812
同次性+対称性 (10)	91.091	15.809	88.521	26.243	23.209

注：括弧内は各制約における自由度を表している。CV は各自由度に対するカイ自乗分布の有意水準 1% における臨界値を示している。また、有意水準 5% における臨界値は、自由度 4 のとき 9.488、自由度 6 のとき 12.592、自由度 10 のとき 18.307 である。

5. 推 定 結 果

まず、4つの需要システムモデルを推定し、推定値、ならびに所得・価格弾力性の結果について比較していく。表2と3には、4つの需要システムモデルの Seemingly Unrelated Regression (SUR) 推定量と所得・価格弾力性の結果が記されている。表2の推定値は同次性ならびに対称性が課せられた結果が示されている。また、加法性に関しては $n-1$ 本の方程式体系を推定することにより自動的に満たされる。まず、決定係数をみると、ほとんどのモデルの財方程式において高い決定係数を得ている。しかし、Rotterdam モデルのみが住居に関する方程式において極端に低い決定係数を示している。次にモデル間の推定値の違いについて比較すると、Rotterdam モデルと同じ価格パラメータを持つ CBS モデルと Rotterdam モデルでは、住居方程式の雑費に関する交差価格パラメータの推定値に大きな差がみられた。また、Rotterdam モデルと同じ所得パラメータを持つ NBR モデルと Rotterdam モデルを比較すると、住居に関する推定値に大きな差が見られた。つまり、Rotterdam モデルに関しては住居の所得や価格パラメータにおいて他のモデルとの違いがみられる。他のモデルの推定値をみると、Rotterdam モデルほど特徴的な傾向はみられないが、住居価格や光熱価格の交差パラメータの t 値が低くなっている。次に、表3の価格弾力性と所得弾力性についてみていく。所得弾力性の結果では、すべてのモデルで光熱、被服、雑費が奢侈品、食料、住居が必需品となっている¹⁰⁾。先の推定値の結果と合わせると、特に Rotterdam モデルの住居の所得弾力性の低さが目立つ。本来、住居の弾力性は1より大きいか1に近い場合が多く、奢侈品と判断される。しかし、

10) 所得弾力性の値が1より大きい場合、弾力的または奢侈品、小さい場合は非弾力的または必需品と判断される。

表3の結果は他の財に比べて住居の所得弾力性が低いことが分かる。逆に、必需的な要素を持つはずの光熱の所得弾力性が高くなっている。これは、パラメータが需要理論の制約の影響を受けやすいことを表しているといえる。この問題に関しては橋本（2004）でも指摘されており、モデルの推定値がパラメータ制約の影響を受けやすいことが分かっている。価格弾力性の結果は、すべてのモデルで光熱の自己価格弾力性¹¹⁾が負値にはならなかった。また、NBRモデルは雑費の自己価格弾力性に関しても負値にはなっていない。すべてのモデルに共通する特徴的な傾向としては、光熱のシェアは雑費の価格の変化に反動的であることや、被服のシェアは住居の価格に対して反動的であることである。一方、食品や雑費のシェアはどの財の価格の変化に対してもそれほど敏感ではないことが示されている。さらに、表4には需要理論（同次性・対称性）に関するパラメータ制約の検定結果が記されている。RotterdamモデルとRotterdamモデルと同じ価格パラメータを持つCBSモデルはすべての制約において帰無仮説は棄却される。AIDSモデルは同次性のみ棄却されるが、対称性や同次性・対称性の仮説は棄却されない。AIDSモデルと同じ価格パラメータを持つNBRモデルは対称性のみが成立する結果となっている。これらの結果から、AIDSモデルは需要理論との一致性をほぼ満たしているが、他のモデルはパラメータ制約を満たすことが困難であることが分かる。

次に、4つの需要システムモデルの関数形選択に対する検定を行った。
(10) 式を推定した結果は以下のようになる。

$$\mathbf{y}_{ROT,t} = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\gamma} + 1.194 (\mathbf{y}_{ROT,t} - \mathbf{y}_{CBS,t}) + 1.471 (\mathbf{y}_{ROT,t} - \mathbf{y}_{NBR,t}) \quad (11)$$

また、 $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$ の t 値はそれぞれ 3.416, 2.169 である。第4節での解釈に沿って考えると、(11) 式から $\delta_1 = 1$ となる AIDS モデルタイプの所得係

11) 自己価格弾力性は通常マイナス値をとる。

数と $\delta_2 = 1$ となる AIDS モデルタイプの価格係数が支持されることが分かる。この結果より、4つの需要関数の中で AIDS モデルが選択された。次に、合成モデル (10) 式と各4つの需要関数の尤度比検定の結果は表5に記されている。AIDS モデルを帰無仮説とし、対立仮説を (10) 式とする場合の検定統計量は2.216、同様にして NBR モデルの場合では3.574となり、自由度2のカイ自乗分布の5%水準の棄却域は5.99であるので、両モデルを支持する結果となった。一方、Rotterdam モデルと CBS モデルでは両者とも帰無仮説は棄却された。よって、4つのモデルの尤度比検定では、AIDS と NBR モデルが支持された。これらの結果から、関数形選択は AIDS と NBR モデルの2つに絞られた。

関数型の選択にあたっては、選択基準としてデータへの説明力が優れていること、需要関数から導かれるパラメータ制約を満たすことが必要であると考えられる。まず、関数形選択の Barten (1993) の検定において、AIDS と NBR モデルが選択され、4つのシステムの中でデータへの説明力が優れていると判断された。次に、需要理論の観点からパラメータの当てはまりを見ると、AIDS モデルの方が同次性・対称性の需要理論を満たしている。つまり、AIDS モデルの方がデータと理論の一致性をもたらす。よって、これら2つの結果を合わせると、整合的に AIDS モデルがもっともデータを説明するのに適しているという結果が導かれる。すなわち、日本の多品目支出データを推定するには AIDS モデルがもっとも適切であると判断した。

表5 関数形選択に関する Barten (1993) の検定

モデル	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	対数尤度	尤度比
Rotterdam	0	0	1331.168	153.508
AIDS	1	1	1406.814	2.216
CBS	1	0	1332.237	151.370
NBR	0	1	1406.135	3.574
Synthetic system (11) 式	1.194	1.471	1407.922	—

注：自由度2のカイ自乗分布における5%の棄却域は5.99である。

6. お わ り に

本稿での目的は、日本の需要システムを推定するにあたってどのような関数形が適切であるかを明らかにすることであった。データへの説明力が優れている、需要理論を満足するといった点から、4つの需要システムの中で AIDS モデルが選択された。これはあくまでも日本の場合に限られる結果である。関数形選択に関する過去の先行研究では、UK の家計に関して説明変数に広告変数を加えた拡張型の需要システムモデルを使用した Duffy (2001) でも同様に AIDS モデルが選択された。しかし、AIDS モデルは一様に適切ではなく、関数形選択の検定を提唱した Barten (1993) 自体の研究では CBS モデルが選択されている。

需要理論の同次性が棄却された原因として、AIDS モデルや NBR モデルでは、その棄却は小さかったことから、選択されたデータ期間の問題があげられる。本分析では 1980 年から 2004 年までの長期間のデータを用いたことから、パラメータに変化がみられる可能性がある。特に、1990 年代前半のバブル崩壊や以降の消費不振やデフレなどの変化が価格パラメータに影響を与えた可能性も否定できない。また、Rotterdam モデルとその同じ価格パラメータを持つ CBS モデルはすべての制約が大きく棄却されたことから、Rotterdam モデルの価格パラメータ自身が上手く推定されていない可能性がある。つまり、Rotterdam モデルの価格パラメータを用いることは、日本の多品目支出データを推定するには不適切であるかもしれない。これはまた第 1 節で述べられた需要理論の棄却と変数の内生性の問題に関係しているだろう。これらの問題については次の補論の中で議論されている。この問題に関して結論を先に述べると、Rotterdam モデルや CBS モデルの需要理論の棄却は、内生である変数を誤って外生と扱うことによって、データの当てはまりが悪くなることが要因として考えられる。これは、同様に関数形選択の検定結果にも影響を与えるものであ

り、両者の相関は避けられないであろう。しかしながら、補論の結果から両モデルの所得変数が内生である原因として、何らかの変数が欠如していることが分かった。つまり、これは需要理論に関しては変数の内生性を考慮した推定を行うことによって改善される可能性があることを示しているが、一方で、関数形選択に関してはモデル間の説明変数が同じであることが前提であるため、検定の改良を行っていく必要があるだろう。

【補論】所得変数の扱いについて

第1節でも述べたように、需要システムモデルを推定するにあたって、所得変数の内生性が問題となる。各財の支出額は内生変数であるので、各財の支出額の和として構成される総支出額（ここでは総支出＝所得） x も内生変数であることが指摘されている（Deaton（1980）, Lewbel（1996））。この問題に関して、Attfield（1991）は所得変数が方程式誤差との間に相関を持つかどうかを検定する方法を提案した。また、方程式誤差と相関を持つ場合には事前にパラメータに線形制約を課すことにより説明変数が外生であるシステムに変換可能であること、さらに変換されたシステムは重回帰で推定可能であることを示した。加えて、所得変数を内生として扱うことで需要理論（同次性・対称性）の棄却は回避されること、すなわち、これまでの需要理論の棄却は内生である所得変数を外生として扱うことによって生じたことを示した。

所得変数の外生性の検定を行うにあたって、まず、Zellner（1962）の seemingly unrelated regressions（見かけ上無関連な方程式）システムを考える。第 j 番目の方程式を、

$$y_j = \mathbf{X}\beta_j + u_j, \quad (\text{A. 1})$$

と表す。ここで、 y_j と u_j は $T \times 1$ ベクトル、 $\mathbf{X}$ は全ての方程式に共通す

る説明変数行列 ($T \times k$), β_j はパラメータベクトル ($k \times 1$) である. ここで k 個の説明変数と第 j 番目の方程式誤差との共分散ベクトルを次のように表記する.

$$\sigma_{xu_j} = \Psi' \alpha_j. \quad (\text{A. 2})$$

また, α_j は σ_{xu_j} のうち非ゼロとなる ($L \times 1$) ベクトルである. 各方程式のパラメータベクトルに $H_0: \mathbf{R}_1 \beta_1 + \mathbf{R}_2 \beta_2 = \mathbf{r}$ となる g 個の線形制約 ($L \geq g$) を課した場合を考える. また, $\mathbf{R}_1$ はランク g の ($g \times g$) 行列, $\mathbf{R}_2$ は ($g \times k - g$) 行列, $\mathbf{r}$ は ($g \times 1$) ベクトルである. ここでは事前情報として識別性の条件に同次性制約を使用する. つまり, 1つの操作変数に対して1つの識別性条件を与える調度識別の場合を考える. これを (A. 1) 式に課すと,

$$z_j = \mathbf{X} \hat{\mathbf{A}} \theta_j + \nu_j. \quad (\text{A. 3})$$

また, $z_j = y_j - \mathbf{X}_1 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{r}$, $\hat{\mathbf{A}} = (H, \hat{\Sigma}_{xx}^{-1} \Phi)$, $H = [-\mathbf{R}_2' (\mathbf{R}_1^{-1})', I_{k-g}]$, $\theta_j' = (\beta_{2j}', \alpha_j')$, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ (さらに $\mathbf{X}_1 (T \times g)$, $\mathbf{X}_2 (T \times k - g)$) である. (A. 3) 式を n 本の方程式システムで表すと,

$$\mathbf{z} = \hat{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\theta} + \hat{\boldsymbol{\nu}}. \quad (\text{A. 4})$$

となる. また, $\mathbf{z}' = (z_1', \dots, z_n')$, $\hat{\mathbf{Q}} = [I \otimes \mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}]$, $\boldsymbol{\theta}' = (\theta_1', \dots, \theta_n')$, $\boldsymbol{\nu}' = (\nu_1', \dots, \nu_n')$ である. ここで (A. 4) 式を推定した場合に, 各方程式の個別パラメータ α_j に対して帰無仮説 $H_0: \alpha_j = 0$ ($j = 1, \dots, n-1$) となる仮説を検定し, さらに $H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ の同時仮説に対して検定を行う. 帰無仮説が棄却された場合, 所得変数は方程式誤差と相関を持つ, つまり内生変数であると判断される. これは同時に説明変数と方程式誤差との間に相関が存在することによって β_j の推定量が一致性を持たないことを意味する. また, Attfield (1991) ではこの方程式誤差との相関が推測誤差によるものか, もしくは説明変数と相関を持つ重要な変数が欠けている変

数欠如によるものかどうかについての検定を提案している．この検定ではパラメータに以下のような交差パラメータ制約を課す．

$$r_j = \alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j = 0, \quad i = n-1, j = 1, \dots, p-1. \quad (\text{A. 5})$$

(A. 5) 式の制約数は通常 $(n-1) \times (p-1)$ 個となるが，調度識別 $L = g$ の場合のみ検定可能な制約数は $L(p-1)$ となる．Attfield (1991) ではこの制約に関して Wald 統計量を用いて計算され，自由度 $L(p-1)$ のカイ自乗分布で検定を行っている．線形制約に関する帰無仮説が棄却されない場合，方程式誤差との相関は変数の推測誤差によるものであると判断され，また仮説が棄却された場合には所得変数と相関を持つ重要な変数が欠如している可能性があると考えられる．

Attfield (1991) によって提唱された所得変数の内生性に関する検定結果は表 A に記されている．表の結果 (a) において，個別パラメータ α_j に関する t 検定を行ったところ，AIDS モデルと NBR モデルは被服を除いた方程式でパラメータ α_j がゼロであるという帰無仮説を有意水準 5 % で採択した．一方，Rotterdam モデルと CBS モデルではすべての方程式において， α_j がゼロであるという帰無仮説を棄却した．また，結果 (b) における方程式システム体系に対する検定でもパラメータ $\alpha_j (j=1, \dots, n-1)$ に関する同時仮説を行った場合，AIDS モデルと NBR モデルの検定統計量はそれぞれ 7.87, 8.99 となり，自由度 4 のカイ自乗分布の有意水準 5 % における臨界値は 9.488 であるから，方程式誤差と相関を持たないという同時仮説は棄却されなかった．一方，Rotterdam モデルと CBS モデルに関する検定統計量はそれぞれ 53.307, 55.947 となり，帰無仮説は棄却された．つまり，AIDS モデルと NBR モデルの所得変数は方程式誤差と相関を持たない外生変数であるが，Rotterdam モデルと CBS モデルでは相関を持つ内生変数と判断された．また，表の (c) は (A. 5) 式の線形制約を検定した結果である．これより，所得変数が内生であった Rotterdam

表 A 所得変数の外生性の検定

モデル	Rotterdam	AIDS	CBS	NBR	CV
(a) α_i					
食料	0.5228 (6.3070)	− 0.0278 (− 0.4003)	0.5451 (6.5136)	− 0.0500 (− 0.7192)	—
住居	0.1557 (0.7862)	0.0200 (0.1311)	0.1615 (0.8228)	0.0142 (0.0921)	—
光熱	0.3629 (2.5322)	0.1689 (1.7797)	0.3569 (2.4551)	0.1749 (1.8764)	—
被服	0.6551 (4.7482)	− 0.1055 (− 0.7541)	0.6249 (4.5464)	− 0.0753 (− 0.5398)	—
(b) joint hypothesis Wald	53.307	7.868	55.947	8.996	9.488
(c) Einv	52.702	—	61.103	—	7.815

注：(a) 各方程式の α_i に関して $H_0: \alpha_i = 0$ の仮説検定を行う。推定値は $\alpha_i \times 10^{-2}$ を示す。括弧内は t 値を示す。(b) Wald 検定は同時仮説 $H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1}$ に関する検定を示す。自由度 4 のカイ自乗分布における 5 % もしくは 1 % の棄却域は 9.488 と 13.277 である。示された結果は価格パラメータに同次性を課した場合の検定結果である。(c) 自由度 3 のカイ自乗分布における 5 % もしくは 1 % の棄却域を示す。

モデルと CBS モデルの Wald 検定統計量はそれぞれ 52.702, 61.103 となり、線形制約は有意水準 5 % で棄却された。よって、両モデルの方程式誤差との相関は変数欠如によるものと判断された。

参 考 文 献

- Attfield, C. L. F. (1991) Estimation and testing when explanatory variables are endogenous, *Journal of Econometrics*, 48, 395 – 408.
- Barten, A. P. (1964) Consumer demand functions under conditions of almost additive preference, *Econometrica*, 32, 1 – 38.
- Barten, A. P. (1993) Consumer allocation models: choice of functional form, *Empirical Economics*, 18, 129 – 158.
- Deaton, A. and Muellbauer, J. (1980 a) *Economics and consumer behavior*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Deaton, A. and Muellbauer, J. (1980 b) An almost ideal demand system, *American Economic Review*, 70, 312 – 326.

- Duffy, M. (2001) Advertising in consumer allocation models: choice of functional form, *Applied Economics*, 33, 437 – 456.
- Keller, W.J. and J. Van Driel (1985) Differential consumer demand systems, *European Economic Review*, 27, 375 – 390.
- Lewbel, A. (1996) Demand estimation with expenditure measurement errors on the left and right hand side, *Review of Economics and Statistics*, 78, 595 – 602.
- Neves, P. D. (1987) Analysis of consumer demand in Portugal, 1958 – 1981, *Memoire de maitrise en science economiques*, Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- Pitarakis, J.-Y. and G. Tridimas (1999) Total expenditure endogeneity in a system of demand for public consumption expenditure in the UK, *Economic Modeling*, 16, 279 – 291.
- Stone, J. R. N. (1954) *The Measurement of Consumers' Expenditure and Behavior in the United Kingdom, 1920 – 1938*, vol. I, Cambridge University Press.
- Theil, H. (1965) The information approach to demand analysis, *Econometrica*, 33, 67 – 87.
- 橋本紀子 (2004) 『変わりゆく社会と家計の消費行動』 関西大学出版部

(2009 年 12 月 21 日)